

Exposé aux étudiants de maîtrise

Supraconductivité et opérateur de Schrödinger.

Virginie BONNAILLIE

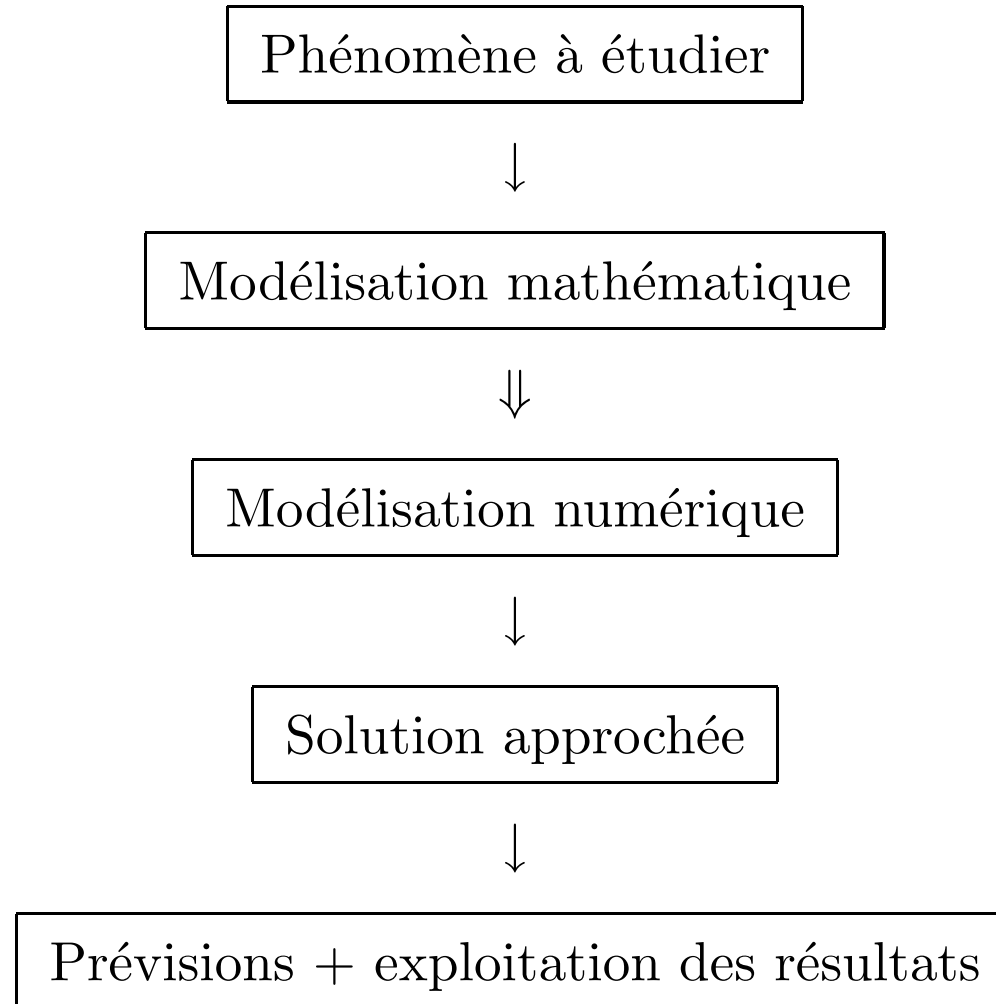
Thèse en préparation avec F. ALOUGES and B. HELFFER

Université de Paris-Sud, Département de Mathématique,

Equipe EDP et Analyse Numérique

Orsay, 12 Mars 2003

Plan :



1 Phénomène physique

Phénomène découvert en 1911.

Supraconductivité : "propriété que possèdent certains matériaux de conduire le courant électrique sans résistance à condition que leur température soit inférieure à une certaine température critique T_C et que le champ magnétique externe ne soit pas trop élevé."

Deux types de supraconducteurs :

2 Modélisation mathématique

Ω section de l'échantillon cylindrique,

\mathcal{H} champ magnétique extérieur,

\mathcal{A} potentiel magnétique induit,

κ constante caractéristique du matériel.

- Champ extérieur intense : perte des propriétés supraconductrices.
- Diminution du champ appliqué : apparition d'un nouvel état supraconducteur.

\Rightarrow Existence d'un champ critique $H_{C_3}(\kappa)$.

Théorie de Ginzburg-Landau

$$\psi \in H^1(\Omega), \mathcal{A} \in H^1(\Omega),$$

$$\mathcal{G}(\psi, \mathcal{A}) = \int_{\Omega} \left(|(\nabla - i\kappa\mathcal{A})\psi|^2 + \kappa^2 |\operatorname{rot} \mathcal{A} - \mathcal{H}|^2 + \frac{\kappa^2}{2} (|\psi|^2 - 1)^2 \right) dx \quad (1)$$

ψ paramètre d'ordre,

$|\psi|^2$ densité des paires d'électrons supraconducteurs,

Simplification : $\mathcal{H} = \sigma \operatorname{rot} \mathbf{F}$ avec :

σ intensité du champ,

\mathbf{F} champ de vecteurs tel que $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ dans Ω , $\mathbf{F} \cdot \nu = 0$ sur $\partial\Omega$ et $\operatorname{rot} \mathbf{F} = 1$.

σ grand $\Rightarrow (0, \sigma\mathbf{F})$ unique minimiseur (état stable)

Déf : $H_{C_3}(\kappa) = \inf\{\sigma > 0 : (0, \sigma\mathbf{F}) \text{ est un minimiseur global de } \mathcal{G}\}$.

Lien avec l'opérateur de Schrödinger

Équation d'Euler quand Ω est borné :

$$\begin{aligned} -(\nabla - i\kappa\mathcal{A})^2\psi &= \kappa^2(1 - |\psi|^2)\psi, \\ \operatorname{rot}^2\mathcal{A} &= -\frac{i}{2\kappa}(\bar{\psi}\nabla\psi - \psi\nabla\bar{\psi}) - |\psi|^2\mathcal{A} + \operatorname{rot}\mathcal{H}, & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial\psi}{\partial\nu} - i\kappa\mathcal{A}\psi \cdot \nu &= 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ \operatorname{rot}\mathcal{A} - \mathcal{H} &= 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Lemme 2.1. *Soit $\mu(\mathcal{A})$ le bas du spectre de l'opérateur $-(\nabla - i\mathcal{A})^2$.*

- *Si $\mu(\kappa\sigma\mathbf{F}) < \kappa^2$, alors \mathcal{G} a un minimiseur non trivial.*
- *Si \mathcal{G} a un minimiseur non trivial $(\psi_{\kappa,\sigma}, \mathcal{A}_{\kappa,\sigma})$, alors $\mu(\kappa\mathcal{A}_{\kappa,\sigma}) < \kappa^2$.*

3 Étude théorique

3.1 Notations

Ω ouvert simplement connexe de \mathbb{R}^2 à bord Lipschitzien noté $\partial\Omega$,

ν normale unitaire extérieure au bord (si définie),

\mathcal{A} potentiel magnétique de champ magnétique associé $B = \text{rot } \mathcal{A}$,

\mathcal{A}_0 potentiel magnétique à champ magnétique constant : $\mathcal{A}_0 := \begin{pmatrix} \frac{x_2}{2} \\ -\frac{x_1}{2} \end{pmatrix}$,

Ω_α secteur d'angle α , $\Omega_\alpha := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, |y| < \tan \frac{\alpha}{2} x\}$.

On note $\nabla_{\mathcal{A}} := \nabla - i\mathcal{A}$.

Forme quadratique et domaine de forme :

$$H_{\mathcal{A}}^1(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega) \mid \nabla_{\mathcal{A}} u \in L^2(\Omega)\},$$

$$q_{\mathcal{A},\Omega}(u) = \int_{\Omega} |\nabla_{\mathcal{A}} u|^2 dx, \quad \forall u \in H_{\mathcal{A}}^1(\Omega).$$

Opérateur auto-adjoint associé :

$$P_{\mathcal{A},\Omega} = -\nabla_{\mathcal{A}}^2,$$

$$\mathcal{D}^N(P_{\mathcal{A},\Omega}) := \{u \in H_{h,\mathcal{A}}^1(\Omega) \mid -\nabla_{\mathcal{A}}^2 u \in L^2(\Omega), \nu \cdot \nabla_{\mathcal{A}} u|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Principe du min-max :

$$\mu(B, \Omega) = \inf_{u \in H_{h,\mathcal{A}}^1(\Omega), u \neq 0} \frac{q_{\mathcal{A},\Omega}(u)}{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2}. \quad (2)$$

On note $\mu(\Omega) = \mu(1, \Omega)$ et $\mu(\alpha) = \mu(\Omega_{\alpha})$.

Théorème 3.1. $\mu(\mathbb{R}^2) = 1$, $\mu(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+) = \Theta_0$, $\mu(\alpha) \leq \Theta_0$.

3.2 $-(\nabla - i\mathcal{A}_0)^2$ sur Ω_α

Changement de variables

Domaine indépendant de α : $\Omega_0 := \mathbb{R}^+ \times]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$.

$$q_\alpha(u) := \int_{\Omega_0} 2t|(D_t - \eta)u|^2 + \frac{1}{2\alpha^2 t}|D_\eta u|^2 dt d\eta, \text{ sur } \mathcal{V}^N,$$

$$\mathcal{V}^N := \left\{ u \in L^2(\Omega_0) \mid \sqrt{t}(D_t - \eta)u \in L^2(\Omega_0), \frac{1}{\sqrt{t}}D_\eta u \in L^2(\Omega_0) \right\},$$

$$P_\alpha := 2(D_t - \eta)t(D_t - \eta) + \frac{1}{2\alpha^2 t}D_\eta^2. \quad (3)$$

$\lambda(\alpha)$: bas du spectre de P_α . Alors $\mu(\alpha) = \alpha\lambda(\alpha)$.

Remarque 3.2. $\alpha \mapsto \alpha\mu(\alpha)$ croissante, $\alpha \mapsto \frac{\mu(\alpha)}{\alpha}$ décroissante.

Pour tout $\alpha \in]0, \pi]$, $\frac{\mu(\alpha)}{\alpha} \geq \frac{\Theta_0}{\pi}$.

But : trouver (λ, u) t.q. $P_\alpha u = \lambda u + \mathcal{O}(\alpha^n)$.

Nouvelle forme : ℓ^{moy}

$$\mathcal{V}_{\text{moy}}^N := \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^+) \mid \sqrt{t}D_t u \in L^2(\mathbb{R}^+), \sqrt{t}u \in L^2(\mathbb{R}^+) \right\},$$

$$\ell^{\text{moy}}(u) := \int_0^\infty 2 \left(|D_t u|^2 + \frac{1}{12}|u|^2 \right) t dt, \quad \forall u \in \mathcal{V}_{\text{moy}}^N.$$

$L^{\text{moy}} = 2 \left(D_t t D_t + \frac{t}{12} \right)$, défini sur $\{u \in H^1(\mathbb{R}^+) \mid tu \in H^2(\mathbb{R}^+)\}$.

Proposition 3.3. *La plus petite valeur propre de L^{moy} est simple, égal à $\mu_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, de vecteur propre associé :*

$$u_0(t) = \frac{1}{3^{\frac{1}{4}}} \exp\left(-\frac{t}{2\sqrt{3}}\right).$$

Corollaire 3.4. $\forall \alpha \in]0, \pi[, \mu(\alpha) \leq \frac{\alpha}{\sqrt{3}}$.

Donc $\mu(\alpha)$ est une valeur propre pour $\alpha \in]0, \sqrt{3}\Theta_0[$.

Lemmes

Lemme 3.5. Soit $f \in \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}^+})$ orthogonale à u_0 , alors il existe un

$$\text{unique } u \in \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}^+}) \text{ t.q. : } \begin{cases} (L^{\text{moy}} - \mu_0)u & = f, \\ \int_0^\infty u(t)\overline{u_0(t)} dt & = 0. \end{cases}$$

$\mathcal{P} \otimes \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}^+})$: fonctions polynomiales en η à coefficients dans $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}^+})$.

Lemme 3.6. Soit $f \in \mathcal{P} \otimes \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}^+})$ tel que pour tout $t \in \overline{\mathbb{R}^+}$,
 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t, \eta) d\eta = 0$. Alors il existe un unique $\tilde{u} \in \mathcal{P} \otimes \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}^+})$ t.q. :

$$\begin{cases} -\partial_\eta^2 \tilde{u} & = 2tf, \\ \partial_\eta \tilde{u}|_{\eta=-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} & = 0, \\ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \tilde{u}(t, \eta) d\eta & = 0. \end{cases}$$

Retour à P_α

Nous cherchons $u = \sum_{k \geq 0} \alpha^{2k} u_k$ et $\lambda = \sum_{k \geq 0} \alpha^{2k} m_k$ t.q. “ $P_\alpha u = \lambda u$ ”.

Nous annulons chaque coefficient de α^{2k} .

Nous décomposons u_k :

$$u_k = u_k^0 + \tilde{u}_k \text{ t.q. } u_k^0 = u_k^0(t) \text{ et } \int_{-1/2}^{1/2} \tilde{u}_k dt = 0.$$

- Coefficients de $\frac{1}{\alpha^2}$:

$$\frac{1}{2t} \partial_\eta^2 u_0 = 0 \Rightarrow u_0 \equiv u_0(t).$$

- Coefficients de α^{2n} , $n \geq 0$:

$$2(D_t - \eta)t(D_t - \eta)u_n + \frac{1}{2t} \partial_\eta^2 \tilde{u}_{n+1} = \sum_{k=0}^n m_k u_{n-k}. \quad (4)$$

Proposition 3.7. *Pour tout $n \geq 1$, nous pouvons choisir m_n et $u_n = u_n^0 + \tilde{u}_n$, avec $u_n^0 \in \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}^+})$, uniquement déterminés par :*

$$m_n = \langle \tilde{u}_n, Lu_1^{\text{moy}} \rangle_{L^2(\Omega_0)}. \quad (5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\partial_\eta^2 \tilde{u}_n = 2t \left(\sum_{k=0}^{n-1} m_{n-1-k} u_k - Lu_{n-1} \right), \\ \partial_\eta \tilde{u}_n|_{\eta=-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} = 0 \quad \text{et} \quad \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \tilde{u}_n d\eta = 0. \end{array} \right. \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (L^{\text{moy}} - \lambda_1^{\text{moy}})u_n^0 = - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} L\tilde{u}_n d\eta + \sum_{k=1}^n m_k u_{n-k}^0, \\ \int_0^\infty u_n^0(t) \overline{u_1^{\text{moy}}(t)} dt = 0. \end{array} \right. \quad (7)$$

Théorème 3.8. $\mu(\alpha) = \alpha \sum_{k=0}^n m_k \alpha^{2k} + \mathcal{O}_n(\alpha^{2n+3})$ pour $\alpha \rightarrow 0$.

4 Modélisation numérique

Hypothèse : $\mathcal{A} = B\mathcal{A}_0$.

4.1 Problème approché

Résolution sur \mathbb{P}_k , $u_h = \sum_i u_i \phi_i$.

$$\forall j, \sum_i u_i \int_{\Omega} \nabla_{\mathcal{A}} \phi_i \cdot \overline{\nabla_{\mathcal{A}} \phi_j} dx = \mu_1^h(B, \Omega) \sum_i u_i \int_{\Omega} \phi_i \overline{\phi_j} dx. \quad (8)$$

$$M \quad M_{i,j} = \int_{\Omega} \phi_i \overline{\phi_j} dx \quad {}^t\overline{V} M U \approx \int_{\Omega} u \overline{v} dx,$$

$$A \quad A_{i,j} = \int_{\Omega} \nabla_{\mathcal{A}} \phi_i \cdot \overline{\nabla_{\mathcal{A}} \phi_j} dx \quad {}^t\overline{V} A U \approx a_{B,\Omega}(u, v).$$

Problème numérique : $AU = \mu_1^h(B, \Omega)MU$.

4.2 Premiers résultats

Éléments \mathbb{P}_2 , ordre d'intégration 5, B=50

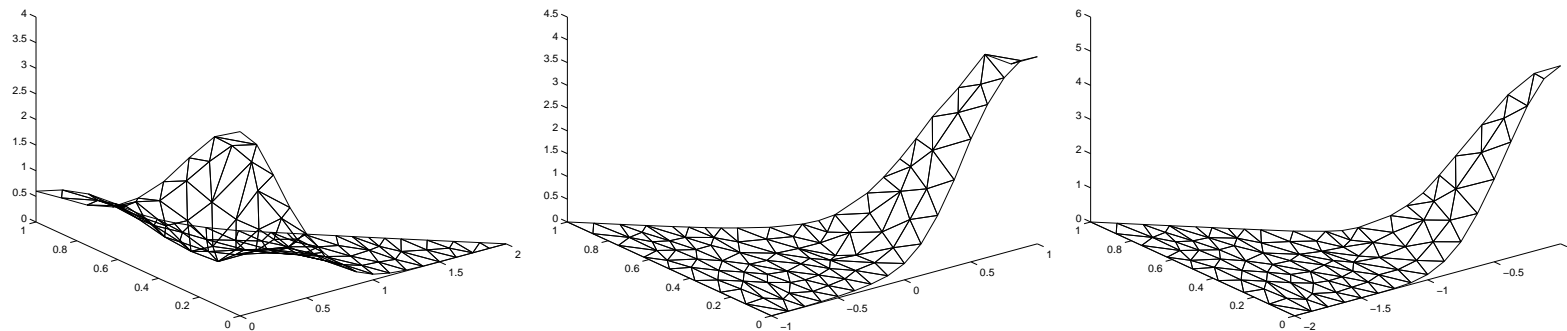


Figure 1: Premier vecteur propre associé à un triangle pour un maillage de 170 éléments

Les valeurs propres valent respectivement 25.7975, 15.0563, 12.5649.

Analyse des résultats :

Translation de vecteur a du domaine

⇒ oscillations pour le vecteur propre dues au terme $e^{i\frac{B}{2}y\wedge a}$

⇒ maillage fin pour capter les oscillations : $B\rho \leq C$.

(ρ rayon de la triangulation)

Conséquences :

- Finesse du maillage et champ magnétique limite sont étroitement liés.
- Technique de raffinement de maillage inadaptée.

4.3 Problème équivalent

$\forall x \in \Omega$, $u(x) = \rho(x)e^{i\theta(x)}$, alors

$$\int_{\Omega} |(\nabla - i\mathcal{A}) u|^2 dx = \int_{\Omega} |(\nabla - i(\mathcal{A} - \nabla\theta)) \rho|^2 dx.$$

Transformation de jauge :

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{A},\Omega}^{\theta} &= -(\nabla - i(\mathcal{A} - \nabla\theta))^2 & \Rightarrow & P_{\mathcal{A},\Omega}(\rho e^{i\theta}) = e^{i\theta} P_{\mathcal{A},\Omega}^{\theta} \rho \\ \text{VP de phase } \theta & \text{ pour } P_{\mathcal{A},\Omega} & \iff & \text{VP réel pour } P_{\mathcal{A},\Omega}^{\theta}. \end{aligned}$$

Remarque 4.1. Si ρ est réel, $P_{\mathcal{A},\Omega}^{\theta} \rho = |\nabla \rho|^2 + \rho^2 |\mathcal{A} - \nabla\theta|^2$.

Algorithme 1

1. Calcul des matrices de masse et d'assemblage associées à $P_{\mathcal{A},\Omega}$.
2. Détermination du module ρ de son premier élément propre.
3. Détermination de la phase par résolution d'un problème de minimisation : $J(\theta) = \|\rho(\mathcal{A} - \nabla\theta)\|_{L^2}^2$.
4. Détermination de l'état fondamental de $P_{\mathcal{A},\Omega}^\theta$.
5. Réitération.

Inconvénient : B grand $\Rightarrow \rho$ petit \Rightarrow difficulté pour déterminer θ .

Algorithme 2

1. Calcul de la matrice de masse.
2. Choix aléatoire de ρ .
3. Détermination de θ qui minimise $\rho^2|\mathcal{A} - \nabla\theta|^2$.
4. Détermination de μ et ρ , état fondamental pour $P_{\mathcal{A},\Omega}^\theta$.
5. Réitération.

Avantage : le premier θ est très régulier.

4.4 Estimateurs a posteriori

\mathcal{T}_h , triangulation de Ω .

$\forall T \in \mathcal{T}_h$, $\mathcal{E}(T)$: ensemble des arêtes du triangle T .

$\mathcal{E}_{h,\Omega}$: ensemble des arêtes E internes ($E \subset \Omega$).

ω_T : ensemble des éléments ayant une arête commune avec T .

$$\forall T \in \mathcal{T}_h, \eta_T^2 := h_T^2 \int_T |-\nabla_{\mathcal{A}}^2 u_h - \mu_h u_h|^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}(T) \cap \mathcal{E}_{h,\Omega}} h_E \int_E |[n_E \cdot \nabla_{\mathcal{A}} u_h]_E|^2.$$

Théorème 4.2.

$$|\mu - \mu_h| + \|u - u_h\|_{H_{\mathcal{A}}^1(\Omega)} \leq c_1 \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T^2 \right\}^{1/2},$$
$$\left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T^2 \right\}^{1/2} \leq c_2 \{ |\mu - \mu_h| + \|u - u_h\|_{H_{\mathcal{A}}^1(\Omega)} \}.$$

5 Conclusion

A propos de $\mu(\alpha)$

Nous avons montré :

- $\forall \alpha \in]0, \pi], \mu(\alpha) \geq \frac{\Theta_0}{\pi} \alpha$ ($\frac{\mu(\alpha)}{\alpha}$ décroissant).
- $\forall \alpha \in]0, 2\pi[, \mu(\alpha) \leq \Theta_0$ (analyse du spectre essentiel).
- $\forall \alpha \in]0, 2\pi[, \mu(\alpha) \leq \frac{\alpha}{\sqrt{3}}$ (état fondamental de L^{moy}).

Questions ouvertes :

- $\forall \alpha \in]0, \pi[, \mu(\alpha) < \Theta_0$? $\forall \alpha \in [\pi, 2\pi[, \mu(\alpha) = \Theta_0$?
- $\lim_{\alpha \rightarrow \pi^-} \mu(\alpha) = \Theta_0$?
- monotonie de $\mu(\alpha)$? Croissance selon les physiciens.