Une journée de chercheuse en Mathématiques

Virginie Bonnaillie-Noël

IRMAR, CNRS, ENS Cachan Bretagne et Univ. Rennes 1

10e salon de la Culture et des Jeux Mathématiques
29 mai 2009

Plan

1. Les mathématiques dans notre quotidien

Plan

1. Les mathématiques dans notre quotidien

2. Quelques caractéristiques de la recherche en mathématiques

Plan

1. Les mathématiques dans notre quotidien

2. Quelques caractéristiques de la recherche en mathématiques

3. Deux exemples de recherche en mathématiques appliquées :

Plan

1. Les mathématiques dans notre quotidien

2. Quelques caractéristiques de la recherche en mathématiques

3. Deux exemples de recherche en mathématiques appliquées :
   - supraconductivité

Plan

1. Les mathématiques dans notre quotidien

2. Quelques caractéristiques de la recherche en mathématiques

3. Deux exemples de recherche en mathématiques appliquées :
   - supraconductivité
   - effet de micro-défauts sur la rupture des structures

Citations

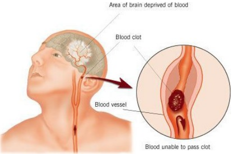
"Le progrès en sciences provient toujours d'une combinaison de pensées décousues et de pensées rigoureuses. . . cette combinaison est notre outil le plus précieux"
Gregory Bateson

"Les mathématiques sont un outil que l'esprit de l'homme ne cesse de construire et de perfectionner afin de comprendre le monde"
Jean-Michel Bony

Les mathématiques dans notre quotidien

Les mathématiques interviennent de manière cachée dans la vie courante :

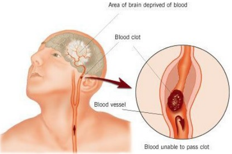
- comprendre, expliquer et prévoir les phénomènes *(météorologie, biologie, santé, finances)*



Les mathématiques dans notre quotidien

Les mathématiques interviennent de manière cachée dans la vie courante :

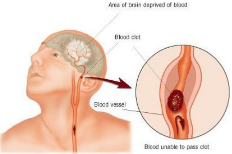
- comprendre, expliquer et prévoir les phénomènes *(météorologie, biologie, santé, finances)*
- développer de nouvelles technologies *(téléphonie mobile, nanotechnologies, médecine, astronomie)*



Les mathématiques dans notre quotidien

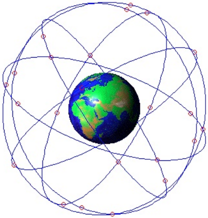
Les mathématiques interviennent de manière cachée dans la vie courante :

- comprendre, expliquer et prévoir les phénomènes *(météorologie, biologie, santé, finances)*
- développer de nouvelles technologies *(téléphonie mobile, nanotechnologies, médecine, astronomie)*
- assurer la sécurité et la confidentialité de transferts de données *(cartes à puces, paiements sur internet, communications)*



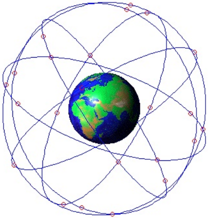
GPS, Géo-Positionnement par Satellite

- 24 satellites répartis sur 6 orbites
- chaque satellite envoie deux signaux radio : sa position et l'instant d'émission
- le récepteur, en surface terrestre, reçoit plusieurs signaux et calcule la latitude, la longitude et l'altitude



GPS, Géo-Positionnement par Satellite

- 24 satellites répartis sur 6 orbites
- chaque satellite envoie deux signaux radio : sa position et l'instant d'émission
- le récepteur, en surface terrestre, reçoit plusieurs signaux et calcule la latitude, la longitude et l'altitude



Aspects mathématiques :

- intersection de sphères
- évaluation de la vitesse des ondes radio en fonction de la densité atmosphérique

Téléphonie

Aspects mathématiques

- optimisation du réseau de câbles ou d'antennes (optimisation combinatoire)
- propagation d'ondes électromagnétiques

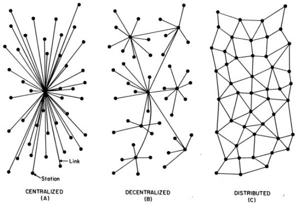


FIG. I — Centralized, Decentralized and Distributed Networks

Crypter des données

- envoyer un courrier électronique
- payer par carte bancaire

Crypter des données

- envoyer un courrier électronique
- payer par carte bancaire

Aspects mathématiques :

- Code RSA (Rivest-Shamir-Adleman, 1977)
- Codes récents basés sur de la géométrie, des probabilités,...

Quelques branches des mathématiques et leurs applications

Algèbre	$\Rightarrow$	mathématiques abstraites
Géométrie	$\Rightarrow$	astrophysique
Arithmétique	$\Rightarrow$	codage, cryptographie
Probabilité	$\Rightarrow$	finances, turbulence, physique quantique
Analyse numérique	$\Rightarrow$	physique, biologie, finances

$+$ ponts entre les différentes branches.

Quelques caractéristiques de la recherche en mathématiques

La recherche... Qu'est-ce que c'est ?

Quelques caractéristiques de la recherche en mathématiques

La recherche… Qu'est-ce que c'est ?

- Ce n'est pas
  - faire du calcul
  - résoudre des exercices

Quelques caractéristiques de la recherche en mathématiques

La recherche... Qu'est-ce que c'est ?

- Ce n'est pas
  - faire du calcul
  - résoudre des exercices

- C'est
  - créer sa propre liste de questions
  - utiliser des résultats déjà connus pour établir de nouvelles théories
  - un travail jamais achevé

Entrelacement entre recherche appliquée et fondamentale

Motivations

- répondre à une attente des autres sciences
- défi intellectuel
- élargir le champ des connaissances et des méthodes mathématiques

Entrelacement entre recherche appliquée et fondamentale

Motivations

- répondre à une attente des autres sciences
- défi intellectuel
- élargir le champ des connaissances et des méthodes mathématiques

Relation à double sens

- une nouvelle théorie peut servir à résoudre un problème pratique
- les applications peuvent stimuler de nouvelles méthodes mathématiques, qui vont elles-mêmes s'appliquer dans des domaines variés

Comment “chercher” ?

Comment “chercher” ?

- “Laver” le problème : comprendre ce qui est important et ce qui l’est moins, ce qui est pertinent ou pas.
  (pour la trajectoire d’un bolide : forme de la voiture, vitesse du vent. . .)

Comment “chercher” ?

- “Laver” le problème : comprendre ce qui est important et ce qui l’est moins, ce qui est pertinent ou pas.
  (pour la trajectoire d’un bolide : forme de la voiture, vitesse du vent. . .)

- Extraire un modèle simplifié mais viable en termes mathématiques :

Comment “chercher” ?

- “Laver” le problème : comprendre ce qui est important et ce qui l’est moins, ce qui est pertinent ou pas.
  (pour la trajectoire d’un bolide : forme de la voiture, vitesse du vent. . .)

- Extraire un modèle simplifié mais viable en termes mathématiques :
  - assez simple pour savoir le résoudre,

Comment “chercher” ?

- “Laver” le problème : comprendre ce qui est important et ce qui l’est moins, ce qui est pertinent ou pas.
  (pour la trajectoire d’un bolide : forme de la voiture, vitesse du vent. . .)

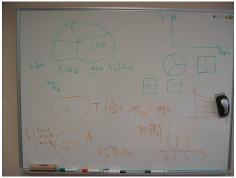
- Extraire un modèle simplifié mais viable en termes mathématiques :
  - assez simple pour savoir le résoudre,
  - assez complexe pour rendre compte de la réalité.

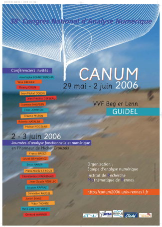
- Utiliser les outils informatiques pour faire les calculs, si besoin est, ou simuler le phénomène réel et prévoir les résultats.

- Utiliser les outils informatiques pour faire les calculs, si besoin est, ou simuler le phénomène réel et prévoir les résultats.

- Lire des articles de revues mathématiques pour connaître et assimiler les résultats déjà acquis.

- Assister à des groupes de travail, des séminaires et des congrès pour présenter ses questions et mettre en commun ses connaissances et ses idées.





- Essayer de résoudre son propre problème.

- Essayer de résoudre son propre problème.

- Dégager de nouvelles idées et de nouvelles problématiques.
  "Comme c'est fréquent en science, j'ai trouvé, grâce à ces données, des réponses à des questions que je ne m'étais pas posées initialement"
  André Langaney

- Essayer de résoudre son propre problème.

- Dégager de nouvelles idées et de nouvelles problématiques.
  “Comme c’est fréquent en science, j’ai trouvé, grâce à ces données, des réponses à des questions que je ne m’étais pas posées initialement”
  André Langaney

- Savoir faire demi-tour quand on est dans une impasse et accepter de tout recommencer après un “échec”.
  “En essayant continuellement, on finit par réussir. Donc plus ça rate, plus on a de chances que ça marche”
  Devise des Shadocks

Comment aborder un problème ?

Phénomène physique

$\downarrow$

Modélisation mathématique (E. D. P.)

$\swarrow$ $\qquad\qquad$ $\searrow$

Résolution numérique $\qquad$ Étude qualitative

$\searrow$ $\qquad\qquad$ $\swarrow$

Prévisions + exploitation des résultats

La rigueur mathématique

Quelque soit son domaine, le mathématicien ne se contente pas de calculer, il démontre!

Ex : montrer l'existence et l'unicité de la solution d'un problème.

Ceci peut sembler évident quand on se fie à la réalité physique.

Mais

$$\text{Modèle} \neq \text{réalité}$$

Ce résultat

- garantit que le problème est bien posé et valide le modèle
- donne parfois des indications sur la solution

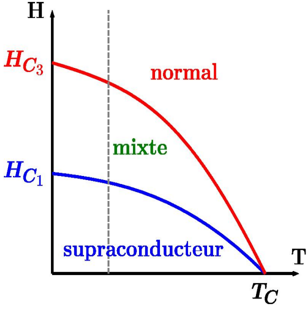
Généralement, on ne sait pas calculer la solution. On a alors recours à des approximations (que l'on essaie de quantifier) ou des simulations numériques.

Deux exemples de recherche en mathématiques appliquées

Supraconductivité
Phénomène découvert en 1911...

... par un étudiant peu attentif

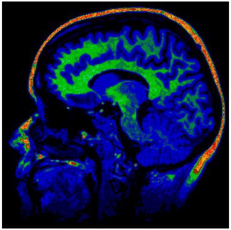
- propriété relative à certains matériaux
- à très basse température ($153K$ au mieux)
- résistance électrique nulle
- expulsion du champ magnétique extérieur
  effet Meissner



Applications

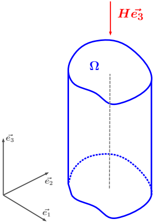
- Lévitation magnétique : trains à sustentation électromagnétique
  Transrapid à Shanghai, MagLev au Japon, projets allemands
- Imagerie médicale : IRM, RMN





Théorie de Ginzburg-Landau (1950)

- *description macroscopique*
- *valable près de la température critique*
- *basée sur une transition de second ordre*



potentiel de référence $\mathcal{A}_0 = \frac{1}{2}(-x_2, x_1)$, $\mathrm{rot}\,\mathcal{A}_0 = \vec{e_3}$

caractéristique du matériau κ

potentiel magnétique induit $H\mathcal{A}$

paramètre d'ordre ψ

$|\psi|^2 \propto$ *densité des électrons supraconducteurs*

Énergie du matériau :

$$\mathcal{E}_{\kappa,H}[\psi,\mathcal{A}] = \int_\Omega \left\{ |(\nabla - i\kappa H\mathcal{A})\psi|^2 + \frac{\kappa^2}{2}(|\psi|^2-1)^2 + \kappa^2 H^2 \int_{\mathbb{R}^2} |\mathrm{rot}\,(\mathcal{A}-\mathcal{A}_0)|^2 \right.$$

But : comprendre l'influence de Ω sur le comportement des minimiseurs

Quelques résultats généraux

Quelques résultats généraux

- Pour tout $\kappa, H > 0$, la fonctionnelle $\mathcal{E}_{\kappa,H}$ a un minimiseur

Quelques résultats généraux

- Pour tout $\kappa, H > 0$, la fonctionnelle $\mathcal{E}_{\kappa,H}$ a un minimiseur
- Pour κ fixé et H assez grand, l'unique solution est $(\psi, \mathcal{A}) = (0, \mathcal{A}_0)$

  $\Rightarrow$ *la supraconductivité est détruite* [GIORGI-PHILLIPS]

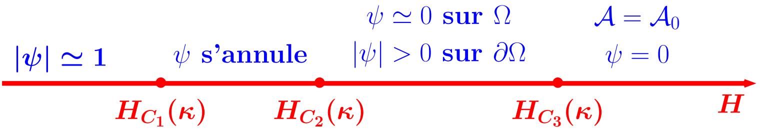
Quelques résultats généraux

- Pour tout $\kappa, H > 0$, la fonctionnelle $\mathcal{E}_{\kappa,H}$ a un minimiseur
- Pour κ fixé et H assez grand, l'unique solution est $(\psi, \mathcal{A}) = (0, \mathcal{A}_0)$

  $\Rightarrow$ *la supraconductivité est détruite* [Giorgi-Phillips]

Champs critiques pour κ grand

$(\psi, \mathcal{A})$ minimiseur de $\mathcal{E}_{\kappa,H}$



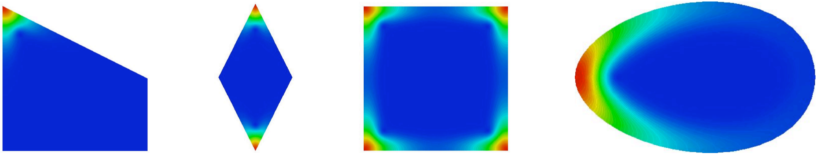
Résultat

Lorsque l'on abaisse l'intensité du champ appliqué, les électrons supraconducteurs apparaissent d'abord dans les coins de plus petit angle puis les autres sommets, puis le bord du domaine et enfin l'intérieur.

Résultat

Lorsque l'on abaisse l'intensité du champ appliqué, les électrons supraconducteurs apparaissent d'abord dans les coins de plus petit angle puis les autres sommets, puis le bord du domaine et enfin l'intérieur.

Simulations numériques



Effet de micro-défauts sur la rupture des structures

Contexte

Effet de micro-défauts sur la rupture des structures

Contexte

- Description du comportement jusqu'à rupture de structures complexes

Effet de micro-défauts sur la rupture des structures

Contexte

- Description du comportement jusqu'à rupture de structures complexes
- Prise en compte de l'effet de défauts : initiation et propagation de fissures
  Défauts du chargement, du matériau et défauts géométriques

Effet de micro-défauts sur la rupture des structures

Contexte

- Description du comportement jusqu'à rupture de structures complexes
- Prise en compte de l'effet de défauts : initiation et propagation de fissures
  Défauts du chargement, du matériau et défauts géométriques

Objectif :

Prédire le comportement jusqu'à rupture en prenant en considération

sans description fine de la géométrie

Effet de micro-défauts sur la rupture des structures

Contexte

- Description du comportement jusqu'à rupture de structures complexes
- Prise en compte de l'effet de défauts : initiation et propagation de fissures
  Défauts du chargement, du matériau et défauts géométriques

Objectif :

Prédire le comportement jusqu'à rupture en prenant en considération

- l'influence de défauts géométriques de surface

sans description fine de la géométrie

Effet de micro-défauts sur la rupture des structures

Contexte

- Description du comportement jusqu'à rupture de structures complexes
- Prise en compte de l'effet de défauts : initiation et propagation de fissures
  Défauts du chargement, du matériau et défauts géométriques

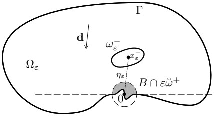
Objectif :

Prédire le comportement jusqu'à rupture en prenant en considération

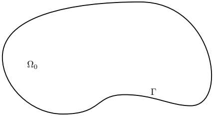
- l'influence de défauts géométriques de surface
- la présence de zones de localisation

sans description fine de la géométrie

Outils mathématiques : analyse à deux échelles



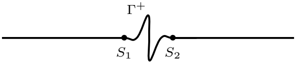
Échelle de la structure



Solution non perturbée : $u_0(x)$

Échelle de la perturbation

$$H_\infty = \lim_{\varepsilon \to 0} \Omega_\varepsilon / \varepsilon$$

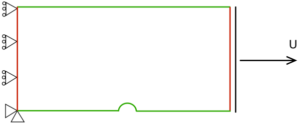


Correcteur ou profil : $V(\frac{x}{\varepsilon})$

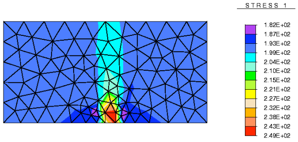
Approximation au premier ordre de la solution :

$$u_\varepsilon(x) \simeq u_0(x) + \varepsilon V(\tfrac{x}{\varepsilon}).$$

Barre en traction



Début de traction



Fin de traction