Université Paris-Sud 11
Faculté des Sciences d'Orsay

Mémoire présenté pour obtenir
le diplôme d'habilitation à diriger des recherches
de l'Université Paris-Sud 11
Spécialité : Mathématiques

par
François CHARLES

Autour de l'arithmétique et de la géométrie des variétés dont la première classe de Chern est nulle

Rapporteurs : Daniel HUYBRECHTS, Gérard LAUMON, Bjorn POONEN

Soutenu le 6 décembre 2013 devant le jury composé de :

M. Yves ANDRÉ
M. Jean-Benoît BOST
M. Olivier DEBARRE
M. Daniel HUYBRECHTS
M. Gérard LAUMON
Mme Claire VOISIN

Table des matières

Remerciements

Je suis très reconnaissant à Daniel Huybrechts, Gérard Laumon et Bjorn Poonen d'avoir accepté d'écrire des rapports sur ce mémoire. Je remercie également chaleureusement Yves André, Jean-Benoît Bost, Olivier Debarre et Claire Voisin d'avoir accepté de faire partie du jury.

Je souhaite remercier les mathématiciens avec qui j'ai pu collaborer : Jean-Benoît Bost, Eyal Markman, Gianluca Pacienza, Alena Pirutka, Bjorn Poonen, ainsi que tout ceux qui m'ont beaucoup apporté lors de nombreuses discussions : Olivier Benoist, Jean-Louis Colliot-Thélène, Davesh Maulik, Christian Schnell, Benjamin Schraen, Tamás Szamuely, Olivier Wittenberg, . . . En particulier, l'article [Cha13] a largement bénéficié d'une conversation avec Emmanuel Ullmo.

Le titre de ce mémoire rend je l'espère manifeste l'influence des travaux d'Arnaud Beauville. Plusieurs parties de ce texte ont été influencées par le travail de Claire Voisin. Je dois en outre remercier particulièrement Daniel Huybrechts. Outre ses travaux fondateurs sur ce sujet, une invitation à Bonn a eu beaucoup d'influence sur mon travail, et ce sont de nombreuses discussions avec lui qui m'ont permis d'élaborer la preuve dans [Cha12c] de la conjecture de Tate pour les surfaces $K3$ sur les corps de caractéristique au moins 5.

Toute ma reconnaissance va aux départements de mathématiques de l'université de Rennes 1, de l'université d'Orsay et du MIT, où j'ai eu plaisir à travailler. Je remercie en particulier Valérie Blandin-Lavigne pour son aide dans la préparation à distance de cette soutenance.

1. Introduction

Ce mémoire a pour but de présenter des résultats de géométrie algébrique et arithmétique que j'ai obtenus depuis la fin de ma thèse, en vue de l'obtention d'une habilitation à diriger des recherches.

Les travaux décrits dans ce texte concernent tous des variétés dont la première classe de Chern est nulle, et plus particulièrement les variétés symplectiques holomorphes, introduites par Beauville dans [Bea83]. Dans un certain nombre de cas, ils sont aussi nouveaux dans le cas des variétés symplectiques holomorphes les plus simples, à savoir les surfaces $K3$.

Nous avons choisi d'organiser nos résultats en fonction du corps de base des variétés auxquelles ils s'appliquent. Il y aura donc une partie de géométrie complexe, la plus géométrique à proprement parler, puis deux parties de géométrie arithmétique traitant le cas des corps de nombres et des corps finis respectivement. Cependant, cette séparation n'est pas entièrement satisfaisante tant ces travaux sont reliés entre eux par les méthodes qu'ils mettent en oeuvre. Nous avons donc fait précéder l'exposition de nos résultats d'une partie qui rappelle les résultats fondamentaux, dûs entre autre à Beauville, Huybrechts, Verbitsky, Markman, Borcherds..., qui sont à l'origine de nos travaux.

Donnons quelques mots de présentation et de motivation. Beaucoup des résultats que nous présentons sont d'inspiration motivique : feront leur apparition les conjectures standard, la conjecture de Tate, les groupes de Mumford-Tate, etc. Dans ce contexte, la place des surfaces $K3$, et plus généralement des variétés symplectiques holomorphes, est particulière. En effet, leur motif est – conjecturalement – de type abélien, ce qui permet d'espérer que certaines des conjectures motiviques soient accessibles dans leur cas, mais elles nécessitent – notamment parce que ce ne sont pas des schémas en groupes – une approche plus géométrique que celle qu'appellent les schémas abéliens.

En ce sens, l'étude des variétés symplectiques holomorphes nous a semblé, outre son intérêt intrinsèque, un terrain intéressant sur lequel tester plusieurs approches des conjectures motiviques. C'est ce qui apparaît notamment dans notre preuve des conjectures standard pour les variétés de type $K3^{[n]}$ [CM13] et dans celle de la conjecture de Tate pour les surfaces $K3$ [Cha12c].

Plus généralement, on peut considérer que la théorie de Hodge des variétés symplectiques holomorphes est très bien comprise. Par opposition, plusieurs aspects de leur arithmétique sont encore mystérieux. Leur étude peut donc se comprendre comme une tentative, dans un cas bien sûr particulièrement simple, de comprendre mieux l'interface entre géométrie complexe et géométrie arithmétique. On pourra comme exemple de cette démarche considérer le théorème 4.2 prouvé dans [Cha13], directement inspiré d'un résultat de théorie de Hodge dû à Green et Oguiso, mais qui se place dans le contexte de la répartition des traces des différents morphismes de Frobenius agissant sur la cohomologie des courbes elliptiques sur les corps de nombres.

2. Quelques variétés dont la première classe de Chern est nulle

Cette partie introductive est consacrée à quelques résultats généraux sur la géométrie de certaines variétés dont la première classe de Chern est nulle, qui concernent plus particulièrement les variétés symplectiques holomorphes. Nous décrivons brièvement quelques énoncés importants qui jouent un rôle majeur dans la plupart des résultats présentés dans cette habilitation, aussi bien dans le contexte de la géométrie complexe que dans celui de la géométrie algébrique. Il est à noter que la plupart de ces résultats sont non-triviaux déjà dans le cas des surfaces $K3$.

Les résultats généraux sur les variétés symplectiques holomorphes sont décrits dans [Bea83] et [Huy99]

2.1. **Variétés symplectiques holomorphes et leurs déformations.**

Sauf mention explicite du contraire, les variétés que nous considérons sont des variétés kähleriennes compactes – pas nécessairement algébriques.

Nous nous intéressons ici aux variétés dont la première classe de Chern du fibré tangent s'annule. D'après la solution par Yau de la conjecture de Calabi, il s'agit exactement des variétés admettant une métrique kählerienne Ricci-plate. On dispose pour celles-ci d'un théorème de structure démontré dans [Bea83] et [Bog78].

Théorème 2.1. *Soit X une variété kählerienne compacte dont la courbure de Ricci est nulle. Alors il existe un revêtement fini étale X' de X isomorphe comme variété kählerienne à un produit fini*

$$T \times \Pi V_i \times \Pi X_i$$

où T est un tore complexe, les V_i sont des variétés kähleriennes compactes simplement connexes de groupe d'holonomie le groupe spécial unitaire $\mathrm{SU}(m_i)$, avec $\dim V_i = m_i$, et les X_i sont des variétés kähleriennes compactes simplement connexes de groupe d'holonomie le groupe symplectique $\mathrm{Sp}(m_i)$, avec $\dim X_i = 2m_i$.

Remarque. La notion de simple connexité qui apparaît dans le théorème ci-dessus est celle associée à la topologie usuelle : une variété simplement connexe n'a pas de revêtement étale, fini ou infini.

Les variétés V_i sont des variétés de Calabi-Yau [1]. Nous nous intéressons aux variétés X_i.

1. Il s'agit de variétés de Calabi-Yau au sens fort du terme, c'est-à-dire de variétés V dont le fibré canonique est trivial et telles que les nombres de Hodge $h^i(V, \mathcal{O}_V)$ s'annulent si i est différent de 0 et $\dim V$.

Définition 2.2. Soit X une variété kählerienne compacte. On dit que X est une *variété symplectique holomorphe* si X est simplement connexe et si le groupe $H^0(X, \Omega_X^2)$ est engendré par une 2-forme partout non-dégénérée.

Remarque. Dans la littérature, on parle souvent de variétés symplectiques holomorphes irréductibles pour les objets définis ci-dessus – l'adjectif irréductible correspondant à la simple connexité. Il sera toujours sous-entendu dans ce texte.

Les variétés symplectiques holomorphes de dimension 2 sont les surfaces $K3$, telles les surfaces quartiques lisses dans $\mathbb{P}^3$. Une surface $K3$ est toujours déformation d'une telle quartique.

Il est plus difficile de construire des exemples de variétés symplectiques holomorphes en dimension supérieure. Dans [Bea83], Beauville construit deux familles d'exemples comme suit. Soit S une surface $K3$, et soit n un entier strictement positif. Le n-ième schéma de Hilbert ponctuel $S^{[n]}$ associé à S est le schéma de Hilbert – ou, dans le cas analytique complexe, l'espace de Douady – qui paramètre les sous-schémas de dimension zéro et de longueur n de S. Il s'agit d'une variété lisse, qui résout les singularités du n-ième produit symétrique $S^{(n)}$ de S.

Soit aussi A un tore complexe de dimension 2. Le schéma de Hilbert $A^{[n+1]}$ s'envoie par addition dans A. Le morphisme $A^{[n+1]} \to A$ est lisse. Soit K_n la fibre au-dessus de 0.

Proposition 2.3. *Les variétés $S^{[n]}$ et K_n sont des variétés symplectiques holomorphes.*

Remarque. La surface K_1 est la surface de Kummer associée à A. C'est une surface $K3$.

Pour construire d'autres variétés symplectiques holomorphes, on peut raisonner par déformations. En effet, on peut montrer qu'une déformation kählerienne d'une variété symplectique holomorphe est elle-même symplectique holomorphe.

Dans le cas qui nous occupe, la situation est la suivante. Soit X une variété symplectique holomorphe. La famille de déformation verselle $\pi : \mathcal{X} \to S$ est universelle car $H^0(X, T_X) = 0$ – S est ici un schéma formel ou un germe d'espace analytique, et X est la fibre de π au-dessus de $0 \in S$. L'espace tangent de Zariski à S en 0 est canoniquement isomorphe à $H^1(X, T_X) \simeq H^1(X, \Omega_X^1)$.

Le résultat qui vient, d'abord dû à Bogomolov, Tian et Todorov [Bog78, Tia87, Tod89], et reprouvé ensuite par Kawamata [Kaw92] et Ran [Ran95], est fondamental. Il vient de ce que la dimension de l'espace tangent de S est donné par un nombre de Hodge, et que les nombres de Hodge sont inchangés par déformation (contrairement à la dimension de $H^1(X, T_X)$ en général).

Théorème 2.4. *Les déformations de X sont non-obstruées : S est lisse.*

Le théorème précédent permet de construire de nouveaux exemples de variétés symplectiques holomorphes par déformation des variétés $S^{[n]}$ et K_n ci-dessus. En effet, la dimension de l'espace des déformations vaut 21 et 5 respectivement, tandis que l'espace des déformations d'une surface $K3$ (resp. d'un tore complexe de dimension 2) est de dimension 20 (resp. 4). Par conséquent, une déformation générique d'une variété de type $S^{[n]}$ (resp. K_n) n'est pas de type $S'^{[n]}$ (resp. K'_n). Il est en général difficile de décrire des exemples explicites de telles déformations, voir par exemple [DV10].

On connaît par ailleurs très peu d'exemples de variétés symplectiques holomorphes. Hors les deux familles exhibées par Beauville que nous avons décrites ci-dessus, on connaît deux familles d'exemples en dimension 6 et 10, dûs à O'Grady [O'G99, O'G03].

Ce qui précède concerne les déformations de variétés kähleriennes générales. L'étude des déformations polarisées s'en déduit. Puisque $H^2(X, \mathcal{O}_X)$ est de dimension 1 lorsque X est une variété symplectique holomorphe, les déformations polarisées forment une collection dénombrable d'hypersurfaces dans l'espace des déformations de X.

2.2. **L'application des périodes.** L'analyse plus fine des déformations des variétés symplectiques holomorphes passe par l'application des périodes et le théorème de Torelli global, que nous rappelons maintenant brièvement. Dû à Verbitsky, il est fondamental pour plusieurs de nos résultats. Nous renvoyons à [Ver09, Huy11, Mar11b] pour plus de détails.

Soit X une variété symplectique holomorphe. On dispose sur le réseau $H^2(X, \mathbb{Z})$ d'une forme quadratique q primitive canonique, la *forme de Beauville-Bogomolov*. Elle est de signature $(3, b_2(X)-3)$, et est compatible avec la structure de Hodge sur $H^2(X, \mathbb{Z})$: la décomposition

$$H^2(X, \mathbb{C}) = H^{1,1}(X) \oplus (H^{0,2}(X) \oplus H^{2,0}(X))$$

est orthogonale. Enfin, si σ est un élément non nul de $H^{2,0}(X) = H^0(X, \Omega_X^2)$ – donc une forme symplectique sur X – on a $q(\sigma) = 0$ et $q(\sigma, \overline{\sigma}) > 0$.

Soit (Λ, q) un réseau non-dégénéré de signature $(3, b-3)$. Le *domaine des périodes* associé à Λ est l'ensemble

$$D = \{x \in \mathbb{P}(\Lambda \otimes \mathbb{C}) | q(x) = 0 \, \mathrm{et} \, q(x, \overline{x}) > 0\}.$$

L'ensemble D est naturellement muni d'une structure de variété complexe de dimension $b-2$. Il est connexe et simplement connexe.

Nous considérerons ici *l'espace de modules des variétés symplectiques holomorphes marquées par* Λ. Il s'agit de l'ensemble $\mathcal{M}$ dont les éléments sont les paires (X, ϕ), où X est une variété symplectique holomorphe et

$$\phi : H^2(X, \mathbb{Z}) \to \Lambda$$

est une isométrie.

La théorie générale des déformations et le théorème 2.4 ci-dessus permettent de montrer que $\mathcal{M}$ est muni d'une structure naturelle de variété complexe lisse de dimension $b-2$. Néanmoins, $\mathcal{M}$ n'est pas en général séparé. Le voisinage d'un point (X, ϕ) de $\mathcal{M}$ est isomorphe à la déformation universelle de X.

Il est vraisemblable que l'espace de modules $\mathcal{M}$ soit nul pour la plupart des choix du réseau Λ. On dispose de très peu de résultats à ce sujet.

L'espace de modules $\mathcal{M}$ s'envoie naturellement vers D.

Définition 2.5. *L'application des périodes*

$$p : \mathcal{M} \to D$$

est l'application qui à (X, ϕ) associe $\phi(H^0(X, \Omega^2_X))$.

Pour des raisons générales de théorie de Hodge, l'application des périodes p est holomorphe. Beauville montre dans [Bea83] que c'est un isomorphisme local. Le résultat important qui suit est plus difficile. Il est dû à Verbitsky [Ver09].

Théorème 2.6 (Théorème de Torelli global)**.** *Soit $\mathcal{M}^\circ$ une composante connexe de $\mathcal{M}$. La restriction de l'application des périodes à $\mathcal{M}^\circ$*

$$p : \mathcal{M}^\circ \to D$$

est surjective et génériquement injective.

Ici, dire que l'application p est génériquement injective signifie qu'elle est injective au-dessus du complémentaire d'une union dénombrable de fermés stricts de D. C'est le caractère non-séparé de $\mathcal{M}$ qui empêche p d'être injective.

Le théorème de de Torelli global ci-dessus montre que – au moins au-dessus d'un point très général de D – le défaut d'injectivité de l'application des périodes vient de l'existence de plusieurs composantes connexes dans l'espace de modules. Pour les variétés symplectiques holomorphes connues, on sait souvent contrôler le nombre de ces composantes connexes. Pour les surfaces $K3$, à degré fixé, il y en a deux, qui correspondent à l'involution $(X, \phi) \mapsto (X, -\phi)$. Pour les déformations de schémas de Hilbert ponctuels de $K3$, la détermination des composantes connexes est dûe à Markman et Apostolov [Mar11b, Apo11].

Bien entendu, ce qui précède donne des résultats sur l'application des périodes dans le cas polarisé (i.e. projectif). Nous renvoyons aux références ci-dessus pour les énoncés correspondant. Le domaine des périodes correspondant est cette fois-ci associé cette à un réseau de signature $(2, n)$. Il s'agit donc d'un domaine hermitien symétrique. On peut dans cette situation passer de l'espace de modules marqués à un espace de modules usuel (avec éventuellement structure de niveau), et l'application des périodes est dans ce cas à valeur dans une variété de Shimura associée à un groupe du type $\mathrm{SO}(2, n)$. Dans ce cas, le théorème de Torelli global montre que l'application des périodes est un isomorphisme sur son image [2]

2.3. **Le lieu de Noether-Lefschetz.** Un des ingrédients techniques, majeur, des résultats présentés dans ce mémoire est l'étude des propriétés de positivité, au sens géométrique aussi bien qu'arithmétique, du lieu de Noether-Lefschetz pour les variétés symplectiques holomorphes – ou, de manière équivalente via l'application des périodes, de certaines sous-variétés spéciales de variétés de Shimura orthogonales.

C'est un des outils principaux, via un théorème de Borcherds, de la preuve de la conjecture de Tate pour les diviseurs sur les variétés symplectiques holomorphes dans 5.1. Dans le cas géométriquement plus simple des correspondances de Hecke de la courbe modulaire dans elle-même, une estimation de hauteur est à l'origine de 4.2. Nous présentons ici brièvement quelques éléments de contexte. Nous travaillons toujours sur le corps des complexes dans cette partie de survol, mais c'est notamment dans un cadre arithmétique, et en caractéristique positive ou mixte, que ce cercle d'idées interviendra.

Définition 2.7. Soit $\pi : \mathcal{X} \to S$ une famille de variétés symplectiques holomorphes au-dessus d'une base S lisse. Soit ρ le rang du groupe de

2. Dans le cas polarisé, les problèmes de séparation disparaissent, mais la surjectivité n'est plus satisfaite – on peut néanmoins décrire l'image.

Néron-Severi d'une fibre de π en un point très général de S. Le *lieu de Noether-Lefschetz* de π est le lieu dans S des points s tels que le rang du groupe de Néron-Severi de la fibre $\mathcal{X}_s$ est strictement plus grand que ρ.

Autrement dit, le lieu de Noether-Lefschetz de π est le lieu des points de S paramétrant des fibres sur lesquelles existe un fibré en droite qui ne se déforme pas au-dessus de S tout entier. Puisque $h^2(X, \mathcal{O}_X)$ vaut 1 si X est une variété symplectique holomorphe, le lieu de Noether-Lefschetz est une réunion dénombrable d'hypersurfaces de S.

On peut décrire simplement un cas particulier du lieu de Noether-Lefschetz. Considérons le produit $X(1) \times X(1)$ de la courbe modulaire par elle-même. Il s'agit de l'espace de modules des paires de courbes elliptiques. Au-dessus de $X(1) \times X(1)$, on dispose d'une famille de surfaces $K3$ obtenues en prenant, en un point paramétrant des courbes elliptiques (E_1, E_2), la surface de Kummer associée à la surface abélienne $E_1 \times E_2$. Soit N un entier strictement positif, et soit $T_N \subset X(1) \times X(1)$ la N-ième correspondance de Hecke. La correspondance T_N paramètre les paires (E_1, E_2) où E_1 et E_2 sont isogènes par une isogénie cyclique de degré N. On vérifie sans difficulté que la réunion des T_N est le lieu de Noether-Lefschetz associé à la famille de surfaces $K3$ paramètrée par $X(1) \times X(1)$.

Plusieurs des résultats que nous présenterons concernent le groupe de Néron-Severi des variétés symplectiques holomorphes. La question de l'amplitude du lieu de Noether-Lefschetz est fondamentale pour ces travaux. Mentionnons deux résultats dans cette direction.

Le premier résulte d'une remarque astucieuse de théorie de Hodge, dûe à Green [Voi02, Chapitre 17] et redécouverte par Oguiso [Ogu03].

Théorème 2.8. *Soit $\mathcal{X} \to S$ une famille non isotriviale de variétés symplectiques holomorphes au-dessus d'une base de dimension* 1*. Alors le lieu de Noether-Lefschetz est dense dans S.*

Il s'agit dans le théorème précédent de densité au sens de la topologie usuelle. Par conséquent, même dans le cas d'une famille projective, il ne s'agit pas d'un énoncé de géométrie algébrique. La démonstration en est transcendante.

De manière plus profonde, même s'il ne semble pas clair qu'ils impliquent le théorème 2.8 ci-dessus, les travaux de Borcherds [Bor98, Bor99] ont permis d'analyser les classes des diviseurs de Noether-Lefschetz dans le groupe de Néron-Severi des variétés de Shimura orthogonales.

Ces résultats fournissent une démonstration alternative du théorème précédent [BKPSB98].

De manière similaire aux résultats de Gross-Zagier [GZ86] qui montrent que les hauteurs des points de Heegner sur les courbes modulaires sont les coefficients de certaines formes modulaires, Borcherds montre que les classes des diviseurs de Noether-Lefschetz sont les coefficients d'une certaine forme modulaire à valeur dans le groupe de Néron-Severi de la variété de Shimura en question, de poids relié à la dimension du réseau. Pour ne pas rallonger ce survol, nous ne donnerons pas l'énoncé technique.

Une fois que l'on sait que les classes de cohomologie de certains diviseurs de Noether-Lefschetz sont des coefficients de formes modulaires, les propriétés de croissance des coefficients des séries d'Eisenstein permettent de déduire de manière standard des propriétés d'amplitude de ces diviseurs comme par exemple énoncé dans [Mau12]. Plus précisément, les résultats de Borcherds permettent de construire «beaucoup», en un sens précis, de sections du fibré de Hodge sur la variété de Shimura qui sont supportées sur le lieu de Noether-Lefschetz. L'existence de ces sections est cruciale dans la preuve de la conjecture de Tate pour les diviseurs sur le variétés symplectiques holomorphes sur les corps finis.

2.4. **Motif des variétés symplectiques holomorphes.** Le dernier point de cette partie de survol concerne le motif des variétés symplectiques holomorphes projectives. Ce qui suit est fondamental pour les résultats motiviques de 4.3 (conjecture des périodes) et 5.1, 5.2 (conjecture de Tate), et, dans une moindre mesure et seulement comme motivation, pour 3.2 (conjectures standard) et 4.1 (spécialisation des groupes de Néron-Severi).

Le point clé est dû à Deligne [Del72, DMOS82], et a été amplifié par André [And96a, And96b]. Nous travaillons toujours sur le corps des nombres complexes pour fixer les idées.

Théorème 2.9. *Soit X une variété symplectique holomorphe projective dont le second nombre de Betti vaut au moins 4. Il existe une variété abélienne A, et un morphisme injectif*

$$H^2(X, \mathbb{Q}(1))_{prim} \hookrightarrow \mathrm{End}(H^1(A, \mathbb{Q}))$$

induit par une correspondance motivée entre X et $A \times A^\vee$.

Dans l'énoncé du théorème, l'indice *prim* correspond au fait que l'on travaille avec la partie primitive de la cohomologie, c'est-à-dire avec l'orthogonal de la classe d'une section hyperplane.

La variété abélienne A est la *variété de Kuga-Satake* associée à X. La correspondance du théorème est la *correspondance de Kuga-Satake*. On ne connaît pas à l'heure actuelle de variété symplectique holomorphe dont le deuxième nombre de Betti serait 3 (ce dernier vaut toujours au moins 3 pour des raisons de structure de Hodge).

Dans [And96b], André définit la notion de correspondance motivée et démonter que la correspondance de kuga-Satake est motivée. Pour les groupes de cohomologie en degrés supérieurs, on trouvera des résultats dans [Sch12]. Il n'est pas connu à l'heure actuelle qu'il existe une correspondance algébrique induisant la correspondance de Kuga-Satake. Ce serait une conséquence des conjectures standard de [Gro69].

Il résulte du théorème 2.9 que – au moins conjecturalement – le motif associé au deuxième groupe de cohomologie d'une variété symplectique holomorphe projective est abélien, au sens où il est découpé sur le motif d'une variété abélienne. Un certains nombres de conjectures motiviques – conjectures standard, conjecture de Tate pour les diviseurs – étant connues pour les variétés abéliennes, le cas symplectique holomorphe, et en particulier celui des surfaces $K3$, est un champ d'investigation naturelle pour ce type de questions.

Le formalisme de la correspondance de Kuga-Satake est flexible : il existe en famille, dans un cadre arithmétique, et pour toutes les théories cohomologiques usuelles. On pourra consulter [CS11] pour certains détails.

3. Géométrie complexe

Dans cette partie, nous présentons ceux de nos résultats obtenus sur le corps des complexes. Il s'agit de nos résultats les plus géométriques. Le corps de base est $\mathbb{C}$.

3.1. **Le théorème de Torelli pour les hypersurfaces cubiques de dimension** 4**.** Nous présentons ici brièvement le contenu de la note [Cha12b]. Elle vise à donner une démonstration simple, à partir du théorème de Torelli global 2.6 pour les variétés symplectiques holomorphes, du théorème de Torelli global pour les cubiques de dimension 4.

Théorème 3.1. *Soient X et X' deux hypersurfaces cubiques lisses de $\mathbb{P}^5_{\mathbb{C}}$, et soit*

$$\phi : H^4(X, \mathbb{Z}) \to H^4(X', \mathbb{Z})$$

un isomorphisme de structures de Hodge polarisées qui préserve la classe h^2 d'une section linéaire. Il existe alors un isomorphisme $f : X' \to X$ tel que $\phi = f^*$.

Le théorème de Torelli global pour les hypersurfaces cubiques de dimension 4 a été prouvé par Voisin dans [Voi86], puis plus récemment, de manière différente, par Looijenga [Loo09]. Parmi d'autres arguments, ces deux preuves nécessitent chacune une analyse détailée de cubiques particulières, que ce soient celles qui contiennent un plan dans l'article original de Voisin ou des cubiques présentant des singularités spécifiques dans le travail de Looijenga.

De manière sensiblement différente, la preuve du théorème de Torelli global de Verbitsky ne procède pas par réduction à des variétés spéciales. En utilisant son résultat, nous donnons une preuve courte du théorème 3.1 qui ne passe pas par l'étude de cas particuliers.

L'idée de la preuve repose sur une construction de Beauville et Donagi [BD85] qui réapparaîtra à plusieurs reprises dans ce mémoire. Soit X une hypersurface cubique lisse de $\mathbb{P}^5_{\mathbb{C}}$. C'est un résultat classique que la variété F des droites de $\mathbb{P}^5_{\mathbb{C}}$ contenues dans X est une variété projective lisse de dimension 4. Beauville et Donagi montrent qu'il s'agit plus précisément d'une variété symplectique holomorphe – qui est déformation d'une variété de type $S^{[2]}$, où S est une surface $K3$. De plus, la relation d'incidence

$$Z = \{(x, l) | x \in X, l \in F, x \in l\} \subset X \times F$$

induit une correspondance entre les parties primitives de $H^4(X, \mathbb{Z})$ et $H^2(F, \mathbb{Z})$.

Le théorème de Torelli de Verbitsky s'applique à F : la connaissance de $H^2(F, \mathbb{Z})$ permet de retrouver F. On montre, à l'aide de résultats géométriques classiques sur F dûs à Altman et Kleiman [AK77], que la connaissance de la variété des droites F munie de son plongement projectif de Plücker permet de retrouver X plongée dans $\mathbb{P}^5_{\mathbb{C}}$, ce qui permet de conclure. Un point technique est le contrôle des composantes connexes des espaces de modules en jeu pour pouvoir appliquer le théorème de Verbitsky. Ce contrôle est permis par des calculs de Beauville [Bea86].

3.2. **Les conjectures standard pour certaines variétés symplectiques holomorphes.** Ce paragraphe est consacré à l'article [CM13]. Il s'agit d'un travail en collaboration avec Eyal Markman, qui a notamment pour origine l'article [Cha13] écrit pendant ma thèse.

Dans l'article [Gro69], Grothendieck énonce un certain nombre de «conjectures standard» qui prédisent notamment l'existence de cycles algébriques sur certaines variétés projectives lisses. La conjecture standard de Lefschetz est la suivante.

Soit X une variété projective lisse de dimension d, et soit $h \in H^2(X, \mathbb{Q}(1))$ la classe de cohomologie d'une section hyperplane. Soit i un entier compris entre 0 et d. Le théorème de Lefschetz difficile affirme que la flèche

$$H^i(X, \mathbb{Q}(i)) \to H^{2d-i}(X, \mathbb{Q}(d-i)),$$

donnée par le cup-produit avec h^{d-i}, est un isomorphisme. La conjecture standard de Lefschetz pour X en degré i prédit l'existence d'un cycle algébrique Z de codimension i dans $X \times X$ tel que la correspondance

$$[Z]_* : H^{2d-i}(X, \mathbb{Q}) \to H^i(X, \mathbb{Q})$$

soit l'inverse de la flèche ci-dessus.

Nous renvoyons par exemple à [And04] pour des discussions détaillées du sens et de l'importance des conjectures standard – qui sont toutes conséquences de la conjecture standard de Lefschetz en caractéristique nulle – dans la construction d'une catégorie satisfaisante de motifs purs.

Depuis l'article original de Grothendieck, on dispose de peu d'exemples de variétés satisfaisant les conjectures standard. Les variétés abéliennes sont dans ce cas [Lie68], et la conjecture standard de Lefschetz est vraie en degré 1 grâce au théorème de Lefschetz sur les classes de type $(1, 1)$. Elles est aussi connue pour les variétés dont la cohomologie est engendrée par des classes de cycles algébriques, comme les grassmanniennes, ou par celles se déduisant d'une surface par certaines constructions géométriques : variétés de dimension 3 uniréglées, variétés de dimension 4 unirationnelles, ... Ainsi, il est possible de déduire du cas des surfaces les conjectures standard pour le schéma de Hilbert des points sur une surface projective lisse [Ara06].

Nous prouvons le résultat suivant.

Théorème 3.2. *La conjecture standard de Lefschetz – et donc les conjectures standard en général – vaut pour toute déformation projective du schéma de Hilbert des points sur une surface* $K3$.

Il est important de remarquer, comme nous l'avons expliqué plus haut, qu'une déformation générique d'un schéma de Hilbert ponctuel sur une surface n'est pas un tel schéma de Hilbert, et n'est donc pas en correspondance naturelle avec une surface. Il est notoirement difficile de déformer les cycles algébriques. Le théorème ci-dessus n'est donc pas a priori une conséquence des conjectures standard pour les schémas de Hilbert ponctuel des surfaces.

Décrivons brièvement d'où viennent les cycles algébriques nécessaires. Le point est de les construire, de manière géométrique, sur certaines déformations particulières de variétés de type $S^{[n]}$, puis de les déformer. En général, ce genre de techniques n'est pas accessible pour les cycles de codimension au moins 2. Dans le cas symplectique holomorphe, on dispose néanmoins de déformations particulières qui permettent de faire fonctionner la preuve.

Une variété symplectique holomorphe X – pas nécessairement projective – munie d'une métrique Ricci-plate est munie d'une structure hyperkählerienne canonique. Cela signifie que la variété riemannienne sous-jacente à X est munie de trois structures complexes I, J et K vérifiant les relations quaternioniques, où I est la structure complexe naturelle de X, et que la métrique de départ est kählerienne pour I, J et K.

Á tout point (a, b, c) de la sphère S^2 on peut associer la structure complexe $aI + bJ + cK$ sur X. Cela donne lieu à une famille de déformations de X paramètrée par la sphère S^2, qui est isomorphe à $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ par la projection stéréographique. On peut montrer qu'il s'agit bien d'une déformation holomorphe : c'est *l'espace de twisteurs* associé à la variété X muni de sa métrique Ricci-plate.

Un fibré vectoriel sur X peut être lui aussi muni d'une structure hypercomplexe compatible à la structure hyperkählerienne de X. On parle alors de *fibré hyperholomorphe*. Un tel fibré se déforme de manière tautologique au-dessus de l'espace des twisteurs. En particulier, les cycles algébriques donnés par ses classes de Chern se déforment eux aussi. Dans [Ver96], Verbitsky présente une étude détaillée des fibrés hyperholomorphes et de leurs espaces de modules. Il donne notamment un critère cohomologique permettant de vérifier qu'un fibré stable est hyperholomorphe.

Enfin, c'est un résultat de Verbitsky que l'espace des déformations d'une variété symplectique holomorphe est connexe par espaces de twisteurs. C'est d'ailleurs un ingrédient essentiel dans sa preuve du théorème de Torelli global.

Une des remarques principales menant au théorème 3.2 est que l'on peut effectivement construire des fibrés hyperholomorphes sur les variétés du type $S^{[n]}$ – ou certaines variantes – en modifiant de manière convenable certains fibrés tautologiques construit à partir de leur interprétation modulaire. Ces calculs sont menés dans [CM13] et [Mar11a]. Il est peut-être intéressant de constater que cet argument montre que la démonstration des conjectures standard pour les déformations projectives des $S^{[n]}$ utilise de manière cruciale des variétés non-projectives : la fibre générale de la déformation d'une variété symplectique holomorphe au-dessus de son espace de twisteurs n'est jamais une variété algébrique.

3.3. **Courbes rationnelles sur certaines variétés symplectiques holomorphes.** Nous décrivons ici certains résultats de [CP13a]. Il s'agit d'un travail en commun avec Gianluca Pacienza.

Le but de l'article [CP13a] est d'étendre en dimension supérieure des phénomènes géométriques connus sur les surfaces $K3$, qui sont liés à la position intermédiaire des variétés dont la première classe de Chern est nulle dans la classification des variétés projectives. La conjecture de Lang prédit en effet que si X est une variété de type général, les courbes rationnelles sur X sont contenues dans une sous-variété algébrique stricte de X. Á l'extrême inverse, on conjecture que les variétés projectives de dimension de Kodaira strictement négatives sont uniréglées.

Les surfaces $K3$, et plus généralement les variétés symplectiques holomorphes, se situent à la frontière de ces deux phénomènes conjecturaux. Ainsi, un théorème de Bogomolov et Mumford [MM83] montre que si X est une surface $K3$, toute classe de cohomologie ample sur X est réalisée par une courbe rationnelle. Chen montre de plus dans [Che99] qu'une surface $K3$ projective très générale en module contient une infinité de courbes rationnelles amples.

Une conséquence frappante de l'existence de courbes rationnelles amples sur les surfaces $K3$ projective a été mise en avant par Beauville et Voisin dans [BV04] : elle implique l'existence d'un zéro-cycle de degré 1 canonique sur une surface $K3$. Rappelons par ailleurs que le groupe de Chow des zéro-cycles de degré zéro sur une surface $K3$ est de dimension infinie par un théorème de Mumford [Mum68].

Le zéro-cycle de Beauville-Voisin est construit de la manière suivante : soit R une courbe rationnelle sur X, et soit p un point de R. Alors l'image de p dans le groupe $CH_0(X)$ ne dépend pas du choix de R ou de p. Clairement, le choix de p sur R ne change pas la classe de p dans le groupe de Chow de X puisque R est une courbe rationnelle. On sait qu'il existe une courbe rationnelle ample sur X. Cette dernière intersecte toute courbe rationnelle. Cette remarque permet de montrer que l'image du point p dans $CH_0(X)$ est indépendante de R.

Nous renvoyons à [BV04, Bea07, Voi08] pour des résultats et des conjectures reliés à ce cercle d'idées. Les articles précédents traitent aussi de certains schémas de Hilbert ponctuels.

Dans [CP13a], nous traitons le cas de variétés symplectiques holomorphes générales en module. En dimension strictement supérieure à 2, on peut espérer trouver plus que des courbes rationnelles. Voici certains de nos résultats.

Théorème 3.3. *Soit X une variété symplectique holomorphe projective qui est une déformation du schéma de Hilbert $S^{[2]}$ d'une surface $K3$ S. Soit $h \in H^2(X, \mathbb{Z})$ la classe de cohomologie d'un diviseur ample. Alors*

(1) Il existe un diviseur uniréglé dans X dont la classe de cohomologie est proportionnelle à h.

(2) Il existe une surface rationnelle dans X.

Corollaire 3.4. *Soit X une variété symplectique holomorphe projective qui est une déformation du schéma de Hilbert $S^{[2]}$ d'une surface $K3$ S. On peut construire un zéro-cycle de degré 1 canonique sur X.*

Le zéro-cycle canonique mentionné dans le corollaire est représenté par n'importe quel point dans la surface rationnelle dont l'existence est prédite dans le théorème.

La démonstration du théorème repose sur des techniques de déformations de courbes rationnelles déjà développées par plusieurs auteurs [Ran95, BHT11, GHS03]. Il s'agit de construire, à partir de courbes rationnelles ou elliptiques sur une surface $K3$, des courbes rationnelles adaptées sur le schéma de Hilbert $S^{[2]}$, puis de les déformer jusqu'à X. Il est notamment beaucoup plus facile de déformer des courbes rationnelles que de tenter de déformer directement des surfaces lagrangiennes.

Pour que cette méthode fonctionne, il faut en particulier comprendre, étant donnée une déformation X d'un schéma de Hilbert de deux points sur une surface $K3$, et une classe ample h dans $H^2(X, \mathbb{Z})$, quelles sont les paires $(S^{[2]}, h')$, où S est une surface $K3$ et $h' \in H^2(S^{[2]}, \mathbb{Z})$, qui sont déformation de (X, h). Le point crucial est de contrôler la classe h' dans le réseau $H^2(S^{[2]}, \mathbb{Z})$ muni de sa décomposition canonique

$$H^2(S^{[2]}, \mathbb{Z}) = H^2(S, \mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z}\delta$$

où δ est la moitié de la classe du lieu paramétrant les sous-schémas non réduits [Bea83].

Ce qui précède correspond à l'étude des composantes connexes de l'espace de modules des déformations polarisées de variétés de la forme $S^{[2]}$. L'ingrédient essentiel est ici, outre le théorème de Torelli global de Verbitsky, un résultat de Markman [Mar11b] précisé par Apostolov [Apo11] qui calcule le nombre de ces composantes connexes. Dans le cas de la dimension 4, il y a aussi peu de composantes connexes que possible, ce qui est essentiel pour la preuve du théorème. On peut espérer étendre ce résultat à des variétés symplectiques holomorphes plus générales [3].

3. Il est peut-être intéressant de remarquer que la preuve dans [MM83] de l'existence de courbes rationnelles sur les surfaces $K3$ est elle aussi dépendante de l'étude de surfaces particulières.

4. Variétés sur les corps de nombres

Cette partie est consacrée à des résultats de nature arithmétique. Ils concernent tous des variétés définies sur les corps de nombres. Les deux premiers paragraphes concernent le lieu de Noether-Lefschetz en caractéristique mixte, tandis que le troisième décrit des résultats en collaboration avec Jean-Benoît Bost autour de conjectures sur les périodes des variétés algébriques.

Toutes les variétés sont maintenant des variétés algébriques.

4.1. **Spécialisation du groupe de Néron-Severi : le cas générique.** Nous décrivons ici certains des résultats de [Cha12a]. Nous ne traitons que le cas des surfaces $K3$, mais ils valent *mutatis mutandis* pour les variétés symplectiques holomorphes de dimension supérieure.

Avec les résultats qui font l'objet du paragraphe suivant, cet article entreprend l'étude de certains aspects du lieu de Noether-Lefschetz dans un contexte arithmétique. Nous considérons donc une famille $\pi : \mathcal{X} \to S$ de surfaces $K3$ au-dessus d'une base régulière de dimension 1. Le lieu de Noether-Lefschetz est le lieu des points géométriques s de S, d'image un point fermé, tels que le nombre de Picard $\rho(\mathcal{X}_s)$ de $\mathcal{X}_s$ – c'est-à-dire, le rang du groupe de Néron-Severi de $\mathcal{X}_s$ – est strictement supérieur au nombre de Picard de la fibre générique géométrique de π. Nous ne cherchons pas à mettre de structure particulière sur cet ensemble ici.

Étudier le lieu de Noether-Lefschetz de π revient à étudier l'application de spécialisation

$$sp : NS(\mathcal{X}_{\overline{\eta}}) \to NS(\mathcal{X}_s) \tag{1}$$

du groupe de Néron-Severi de la fibre générique géométrique de π vers le groupe de Néron-Severi de $\mathcal{X}_s$. Pour des raisons générales, l'application de spécialisation est toujours injective à torsion p-primaire près, où p est la caractéristique résiduelle de s. La torsion de son conoyau est elle aussi p-primaire.

L'objet de l'article [Cha12a] est l'étude des points s «typiques», c'est-à-dire de ceux pour lesquels le nombre de Picard $\rho(\mathcal{X}_s)$ est minimal. Ici, la nature de la base S est essentielle. Le cas le plus simple est celui où S est une courbe sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$. Dans ce cas, puisque le lieu de Noether-Lefschetz est une réunion dénombrable de sous-variétés strictes de S, le théorème de Baire montre que ce lieu est d'intérieur vide. En particulier, l'application de spécialisation ci-dessus est un isomorphisme si s est très général.

En égale caractéristique zéro, on peut toujours trouver de tels points s. Si S est une courbe sur $\overline{\mathbb{Q}}$, c'est un théorème de Terasoma [Ter85] qui repose sur le théorème d'irréductibilité de Hilbert. On pourra aussi consulter [MP12].

Dans le cas où les corps résiduels de S sont de caractéristique non nulle, un nouveau phénomène apparaît comme l'a remarqué Shioda [Shi81]. Soit X une surface $K3$ sur un corps fini k de caractéristique au moins 3 et soit ℓ un nombre premier différent de la caractéristique de k. D'après la conjecture de Tate pour X, qui sera l'objet d'une partie ultérieure, le nombre de Picard de $X_{\overline{k}}$ est égal à la dimension du sous-espace de $H^2(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell(1))$ sur lequel le Frobenius de k agit par un sous-groupe fini. On sait par ailleurs que le Frobenius agit par un groupe orthogonal, puisqu'il est compatible au produit d'intersection. La parité du nombre de Picard de $X_{\overline{k}}$ est donc égale à la parité du deuxième nombre de Betti de X. Ici, le deuxième nombre de Betti est 22. Le nombre de Picard géométrique d'une surface $K3$ définie sur un corps fini est donc toujours pair.

L'argument précédent montre que, dans le cas où S est un ouvert du spectre de l'anneau des entiers d'un corps de nombres, l'application de spécialisation (1) peut n'être surjective, même à torsion près, pour aucune valeur de s : il suffit de prendre pour fibre générique une surface $K3$ de nombre de Picard 1 définie sur un corps de nombres.

L'existence d'une telle surface $K3$ n'est d'ailleurs pas tout à fait évidente a priori. Elle résulte du résultat de Terasoma mentionné ci-dessus. Dans [vL07], van Luijk utilise un argument de spécialisation du groupe de Néron-Severi pour exhiber une telle surface.

Nos résultats concernent le cas où S est un ouvert du spectre de l'anneau des entiers d'un corps de nombres. Nous décrivons en toute généralité la valeur minimale de $\rho(X_s)$ quand s parcourt les points géométriques au-dessus de points fermés de S. Un des aspects de cette description est que l'obstruction de parité du à Shioda que nous avons décrite ci-dessus n'est pas la seule. Outre le résultat lui-même, ce travail doit être vu comme une tentative de comprendre la place en géométrie arithmétique d'analogues du théorème de Baire.

La forme de l'application de spécialisation (1) est reliée à la théorie de Hodge de la fibre générique géométrique de π. Après changement de base, nous considérons cette dernière comme une variété complexe notée $X_{\mathbb{C}}$. Soit T la partie transcendante de la structure de Hodge $H^2(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q}(1))$. Il s'agit de l'orthogonal du groupe de Néron-Severi de $X_{\mathbb{C}}$ dans $H^2(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q}(1))$. Soit E l'algèbre des endomorphismes de T qui respectent sa structure de Hodge. D'après [Zar83], E est soit un corps totalement réel, soit un corps CM.

Théorème 4.1. *Soit X une surface $K3$ sur un corps de nombres k. Après avoir choisi un plongement de k dans $\mathbb{C}$, définissons E et T comme ci-dessus. Soit ρ le nombre de Picard de $X_{\mathbb{C}}$. Si $\mathfrak{p}$ est une place finie de k telle que X a bonne réduction en $\mathfrak{p}$, soit $\rho_{\mathfrak{p}}$ le nombre de Picard de la réduction de X au-dessus de la clôture algébrique du corps résiduel de $\mathfrak{p}$.*

(1) Si E est un corps CM ou si la dimension de T comme espace vectoriel sur E est paire, alors il existe une infinité de places $\mathfrak{p}$ de bonne réduction pour X telles que $\rho_{\mathfrak{p}} = \rho$. De plus, quitte à remplacer k par une extension finie, l'ensemble des places pour lesquelles cette égalité vaut est de densité 1.

(2) Supposons que E est un corps totalement réel et que la dimension de T comme espace vectoriel sur E est impaire.

Soit $\mathfrak{p}$ une place finie de k, de bonne réduction pour X. Supposons que la caractéristique résiduelle de $\mathfrak{p}$ est au moins 5. Alors

$$\rho_{\mathfrak{p}} \geq \rho + [E : \mathbb{Q}].$$

Il existe une infinité de telles places $\mathfrak{p}$ telles que $\rho_{\mathfrak{p}} = \rho + [E : \mathbb{Q}]$. De plus, quitte à remplacer k par une extension finie, l'ensemble des places pour lesquelles cette égalité vaut est de densité 1.

Remarque. On montre sans difficulté que tous les cas du théorème se présentent, et que les seules contraintes sur les dimensions de T et E sont que $[E : \mathbb{Q}]$ divise la dimension de T et que cette dernière est inférieure ou égale à 21 et supérieure ou égale à 2. On peut aussi montrer que E ne dépend pas du plongement de k dans $\mathbb{C}$.

Le résultat ci-dessus montre que les questions de parité ne sont pas les seules à contrôler les groupes de Néron-Severi des réductions aux places finies d'une surface $K3$ sur un corps de nombres. En particulier, il peut arriver que l'on ait, pour toute place $\mathfrak{p}$, $\rho_{\mathfrak{p}} - \rho \geq 2$, ce qui répond par la négative à une question de [EJ12] – prendre pour E un corps totalement réel de degré au moins 2 et choisir T de dimension impaire.

L'idée principale à l'origine du théorème ci-dessus est que c'est la structure du tore maximal du groupe de Mumford-Tate de la partie transcendante T de la structure de Hodge de $X_{\mathbb{C}}$ qui contrôle la répartition des différentes classes de conjugaison des morphismes de Frobenius aux places finies. Ce cercle d'idée est présent dans des travaux de Serre [Ser86].

Ce sont des résultats de Tankeev [Tan90, Tan95] et [Zar83] qui permettent de mener à bien cette stratégie. Des arguments de groupes algébriques permettent de calculer le groupe de Mumford-Tate de T et de le comparer à l'adhérence de Zariski de l'image du groupe de Galois absolu de k dans $\mathrm{GL}(T \otimes \mathbb{Q}_\ell)$, ce qui permet de mettre la main sur les morphismes de Frobenius.

Donnons deux applications de ce résultat. La première est une application des méthodes de [BHT11] et [LL12] pour la construction de courbes rationnelles sur les surfaces $K3$. Rappelons que ces travaux montrent que toute surface $K3$ projective sur $\mathbb{C}$ dont le nombre de Picard est différent de 2 et 4 contient une infinité de courbes rationnelles.

Corollaire 4.2. *Soit X une surface $K3$ projective sur $\mathbb{C}$. Supposons, avec les notations précédentes, que l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :*

(1) Le nombre de Picard de X est 2 et E est un corps totalement réel de degré 4 sur $\mathbb{Q}$;

(2) Le nombre de Picard de X est 4 et E est un corps totalement réel de degré pair sur $\mathbb{Q}$.

Alors X contient une infinité de courbes rationnelles.

La seconde application est de nature plus concrète.

Corollaire 4.3. *Il existe un algorithme qui, étant donnée une surface $K3$ X sur la clôture algébrique d'un corps de nombres, soit termine et retourne le nombre de Picard de X, soit ne termine pas.*

Si de plus $X \times X$ satisfait la conjecture de Hodge pour les cycles de codimension 2, alors l'algorithme appliqué à X termine.

L'idée du résultat précédent est que, alors qu'il est a priori difficile de calculer la dimension du groupe de Néron-Severi en caractéristique nulle, il est – au moins théoriquement – facile de le faire sur un corps fini, si la conjecture de Tate pour les diviseurs est satisfaite. En effet, il suffit pour cela de connaître le polynôme caractéristique du Frobenius agissant sur le deuxième groupe de cohomologie étale ℓ-adique, ce qui se fait en comptant des points.

L'origine de l'algorithme ci-dessus est la construction par van Luijk [vL07] de surfaces $K3$ explicites de nombre de Picard 1. Des résultats plus généraux et inconditionnels quant au groupe de Néron-Severi ont été obtenus récemment dans [PTvL12].

4.2. **Spécialisation du groupe de Néron-Severi : le cas exceptionnel.** Nous présentons maintenant l'article [Cha13]. Il s'agit du pendant des résultats précédents pour les places "exceptionnelles" :

étant donnée une surface $K3$ X sur un corps de nombre k, on s'intéresse à l'existence de places $\mathfrak{p}$ telles que $\rho_{\mathfrak{p}}$ ne satisfait pas les égalités du théorème 4.1.

C'est donc à l'analogue du théorème 2.8 de Green dans un cadre arithmétique que l'on s'intéresse. Deux problèmes se posent : tout d'abord, la preuve de ce théorème est de nature transcendante. Son énoncé même fait intervenir la topologie usuelle des variétés complexes, et n'est donc pas à proprement parler un énoncé de géométrie algébrique. Ensuite, ce résultat devient tout à fait incorrect en caractéristique positive : dans l'espace de modules des surfaces $K3$ en caractéristique positive, la strate supersingulière est de dimension 9. Cette strate paramètre une famille non-isotriviale de surfaces $K3$ dont les fibres génériques et toutes les fibres spéciales ont pour nombre de Picard 22.

Si l'on croit que ce sont les phénomènes de non-ordinarité qui empêchent le théorème de Green de valoir en toute généralité, il est raisonnable de conjecturer qu'il vaut en caractéristique mixte. Dans [Cha13], nous montrons un prototype de ce genre d'énoncés.

Théorème 4.4. *Soient k un corps de nombres, et E, E' deux courbes elliptiques sur k. Il existe une infinité de places $\mathfrak{p}$ de k telles que les réductions de E et E' modulo $\mathfrak{p}$ soient isogènes.*

Bien que ce ne soit pas immédiatement apparent, il s'agit bien d'un analogue du théorème de Green, appliqué à la surface de Kummer associée à $E \times E'$, comme on l'a expliqué en 2.3. On peut donner une heuristique pour le résultat ci-dessus – cette heuristique pourrait d'ailleurs s'appliquer au cas général.

Pour fixer les idées, supposons que E et E' soient définies sur $\mathbb{Q}$. On peut bien entendu supposer que les deux courbes elliptiques ne sont pas isogènes. Soit p un nombre premier de bonne réduction pour E et E'. D'après un théorème de Tate [Tat66], les réductions modulo p de E et E' sont isogènes si et seulement si la trace du Frobenius en p agissant sur $H^1(E_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_\ell)$ est égale à la trace du Frobenius en p agissant sur $H^1(E'_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_\ell)$, où ℓ est un nombre premier différent de p.

D'après les conjectures de Weil, ces deux trace sont des nombres entiers compris entre $-2\sqrt{p}$ et $2\sqrt{p}$. La conjecture de Sato-Tate prédit que quand p varie, la distribution de ces nombres entiers est essentiellement uniforme, à normalisation près. Enfin, puisque E et E' ne sont pas isogènes, on peut espérer que les distributions des deux traces soient indépendantes. Dans ces conditions, la probabilité que les réductions modulo p de E et E' soient isogènes est de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{p}}$. Sommant sur tous les nombres premiers p, la série diverge, ce qui conduit à s'attendre à l'énoncé du théorème. Bien entendu, le théorème 4.1 montre que, quitte à remplacer k par une extension finie, ce phénomène d'isogénie ne peut arriver que pour une densité nulle de places finies.

Le calcul heuristique précédent permet de considérer le théorème 4.4 comme une version très faible d'un théorème de Sato-Tate qui concernerait l'indépendance des distributions des traces du Frobenius pour des courbes elliptiques non-isogènes.

Dans cet ordre d'idée, il faut insister que l'énoncé ci-dessus est valable sans aucune hypothèse sur le corps de base k, contrairement aux énoncés connus sur Sato-Tate qui demandent que l'on travaille sur un corps totalement réel. Bien entendu, ces derniers sont beaucoup plus difficiles.

Un corollaire du théorème 4.4 concerne l'existence de places supersingulières. Rappelons qu'Elkies a démontré dans [Elk89] qu'une courbe elliptique sur un corps de nombre qui admet un plongement réel a une infinité de places de réduction supersingulière. Le cas d'un corps de base plus général est largement ouvert.

Corollaire 4.5. *Soit E une courbe elliptique sur un corps de nombres k. Alors au moins un des deux énoncés suivants vaut :*

(1) Il existe une infinité de places de k qui sont des places de réduction supersingulière pour E.

(2) Pour tout corps quadratique imaginaire K, il existe une infinité de places de k en lesquelles la réduction de E a multiplication complexe par K.

Remarque. Si E n'a pas de multiplication complexe, on s'attend à ce que les deux énoncés du corollaire soient vrais.

Ce corollaire est une conséquence facile du théorème 4.4, obtenu en l'appliquant au produit de E avec une courbe elliptique à multiplication complexe par un corps quadratique imaginaire arbitraire K.

Donnons quelques indications sur la preuve du théorème. Il s'agit d'un énoncé de géométrie d'Arakelov. Pour fixer les idées, supposons encore que E et E' sont définies sur $\mathbb{Q}$, et qu'elles ne sont pas isogènes. Les j-invariants des deux courbes E et E' correspondent à deux courbes arithmétiques Z et Z' dans la surface arithmétique $X(1)$ au-dessus de $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$.

Si N est un entier strictement positif, on dispose de la correspondance de Hecke T_N de $X(1)$ dans elle-même. Elle envoie le j-invariant d'une courbe elliptique sur les j-invariants des courbes elliptiques qui lui sont isogènes par une isogénie cyclique de degré N. Il s'agit de montrer que l'ensemble des points d'intersection de Z et des $(T_N)_*Z'$ est infini quand N varie.

Le nombre d'intersection, au sens de la géométrie d'Arakelov, de Z et $(T_N)_*Z'$, peut être calculé grâce au calcul par Autissier [Aut03] de la hauteur de T_N. Il varie, à peu de choses près, en $N\mathrm{Log}(N)$.

Pour conclure au résultat du théorème, il faut montrer que le nombre d'intersection local, en une place finie ou infinie, est négligeable devant le nombre d'intersection global. Il s'agit d'un énoncé sur la répartition – dans le cadre archimédien ou non – des orbites de Hecke : on veut montrer qu'en une place donnée, l'orbite de Hecke de Z' n'est pas trop proche d'un point donné Z. C'est l'essentiel du travail technique de [Cha13]. Il s'agit d'énoncés autour de l'équidistribution des orbites de Hecke comme dans [COU01], mais qui intègrent des éléments d'approximation diophantienne.

4.3. **Construction de cycles algébriques et périodes.** Nous présentons maintenant quelques-uns des résultats de [BC13]. Il s'agit d'un travail en commun avec Jean-Benoît Bost.

Soit $\overline{\mathbb{Q}}$ la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$, et soit X une variété projective lisse sur $\overline{\mathbb{Q}}$. On peut associer à X ses groupes de cohomologie singulière – ou, de manière plus rigoureuse, la cohomologie singulière de la variété complexe analytique $X^{an}_{\mathbb{C}}$ définie par l'ensemble des points complexes de X – $H^i(X, \mathbb{Q})$, ainsi que ses groupes de cohomologie de de Rham algébrique qui sont les groupes d'hypercohomologie du complexe de de Rham $\Omega^\bullet_{X/\overline{\mathbb{Q}}}$ et que l'on note $H^i_{dR}(X/\overline{\mathbb{Q}})$.

Le théorème de comparaison entre cohomologie de de Rham et cohomologie singulière affirme l'existence d'un isomorphisme canonique

$$H^i(X, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{C} \simeq H^i_{dR}(X/\overline{\mathbb{Q}}) \otimes \mathbb{C}.$$

Cet isomorphisme est compatible aux classes de cycles : si Z est un cycle de codimension k sur X, la classe de Z dans $H^{2k}(X, \mathbb{Q}(k))$ et sa classe dans $H^{2k}_{dR}(X/\overline{\mathbb{Q}})$ sont envoyées l'une sur l'autre par l'isomorphisme de comparaison ci-dessus.

Nous nous sommes intéressés à l'affirmation réciproque. En effet, une conjecture de Grothendieck énoncée dans [Gro66] et [Lan66], historical note of chapter IV, prédit – mais c'est un énoncé semble-t-il plus faible – que les classes de cohomologie dans les groupes $H^{2k}(X, \mathbb{Q}(k))$ qui, via l'isomorphisme de comparaison, s'envoient sur une classe dans $H^{2k}_{dR}(X/\overline{\mathbb{Q}}) \subset H^{2k}_{dR}(X/\overline{\mathbb{Q}}) \otimes \mathbb{C}$ sont exactement les classes de cycles algébriques de codimension k. C'est la *conjecture des périodes de Grothendieck* $GPC^k(X)$.

La conjecture des périodes de Grothendieck est l'analogue, pour la réalisation de de Rham-Betti – i.e., la donnée de la cohomologie singulière et de la cohomologie de de Rham algébrique munies de l'isomorphisme de comparaison – des conjectures de Hodge et Tate. Ce sont toutes les trois des conjectures qui prédisent la pleine fidélité de certains foncteurs de réalisation sur la catégorie des motifs purs pour l'équivalence homologique.

L'article [BC13] est consacré à plusieurs aspects de la conjecture GPC^k. Donnons ici les résultats qui concernent le sujet de ce mémoire, à savoir les variétés dont la première classe de Chern est nulle.

Théorème 4.6. *La conjecture $GPC^1(X)$ vaut si X est une variété abélienne ou une variété symplectique holomorphe projective dont le deuxième nombre de Betti est au moins égal à 4 – en particulier, si X est une surface $K3$.*

La conjecture $GPC^2(X)$ vaut si X est une hypersurface cubique lisse dans $\mathbb{P}^5_{\overline{\mathbb{Q}}}$.

Il y a deux ingrédients essentiels dans la preuve de ces résultats. Le premier, qui permet de traiter le cas des variétés abéliennes, est le théorème de Schneider-Lang [Sch41, Lan65] ainsi que ses conséquences. Il s'agit d'un théorème de transcendance sur les périodes des groupes algébriques commutatifs sur $\overline{\mathbb{Q}}$ – autrement dit, un théorème de transcendance sur les éléments du noyau de l'exponentielle.

Une fois compris le cas des variétés abéliennes, le second ingrédient est la correspondance de Kuga-Satake du théorème 2.9. Il n'est pas démontré aujourd'hui que cette correspondance soit effectivement algébrique. Néanmoins, elle permet dans le contexte qui nous occupe de construire des diviseurs sur les variétés symplectiques holomorphes. Décrivons brièvement de quelle façon – un argument semblable apparaît dans [Tat94].

Soit X une variété symplectique holomorphe projective sur $\overline{\mathbb{Q}}$ dont le deuxième nombre de Betti est au moins égal à 4, et soit A sa variété abélienne de Kuga-Satake. Comme on l'a rappelé dans le théorème 2.9, la correspondance de Kuga-Satake est un morphisme

$$H^2(X, \mathbb{Q}(1))_{prim} \hookrightarrow \mathrm{End}(H^1(A, \mathbb{Q})).$$

Il est compatible à la $\overline{\mathbb{Q}}$-structure venant de la cohomologie de de Rham algébrique.

Soit maintenant $\alpha \in H^2(X, \mathbb{Q}(1))_{prim}$ une classe satisfaisant à hypothèse de $GPC^1(X)$. Son image par la correspondance de Kuga-Satake satisfait la même hypothèse. Il s'agit donc de la classe d'un endomorphisme de A, essentiellement grâce à la partie du théorème ci-dessus concernant les variétés abéliennes. En particulier, il s'agit d'une classe de Hodge. Comme la correspondance de Kuga-Satake est compatible aux structures de Hodge, la classe α elle-même est une classe de Hodge. Le théorème de Lefschetz sur les classes de type $(1, 1)$ permet de conclure.

Le cas des hypersurfaces cubiques de dimension 4 se démontre à l'aide de la construction de Beauville-Donagi décrite en 3.1.

5. Variétés sur les corps finis

Cette dernière partie concerne des travaux de géométrie arithmétique sur les corps finis. Le résultat essentiel est la preuve de la conjecture de Tate pour les diviseurs sur les surfaces $K3$ sur les corps finis de caractéristique au moins 5. Nous présentons aussi des énoncés en dimension supérieure. Le dernier paragraphe est lié à une version entière de la conjecture de Tate.

5.1. La conjecture de Tate pour les diviseurs sur les variétés symplectiques holomorphes.

Ce paragraphe est lié à la preuve de la conjecture de Tate pour les surfaces $K3$ et pour les diviseurs sur certaines variétés symplectiques holomorphes. Il s'agit de résultats démontrés dans [Cha12c].

Soit X une variété projective lisse sur un corps k de type fini sur son sous-corps premier, et soit ℓ un nombre premier différent de la caractéristique de k. On dispose d'une application classe de cycle

$$CH^r(X) \otimes \mathbb{Q}_\ell \to H^{2r}(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell(r)).$$

La conjecture de Tate (pour les cycles de codimension r) affirme que l'image de la flèche ci-dessus est l'espace des éléments invariants sous l'action du groupe de Galois absolu de k.

L'énoncé principal que nous démontrons est le suivant.

Théorème 5.1. *Soit Y une variété symplectique holomorphe projective de dimension $2n$ sur $\mathbb{C}$ dont le deuxième nombre de Betti vaut au moins 6. Soit h la classe de cohomologie d'une section hyperplane de Y, notons d l'entier h^{2n} et soit q la forme de Beauville-Bogomolov.*

Soit $p \geq 5$ un nombre premier. Supposons que p est premier à d et que $p > 2n$. Supposons que Y est définie sur une extension finie non-ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ et que Y a bonne réduction en p. Supposons enfin que la forme q induise une forme quadratique non-dégénérée sur la réduction modulo p du réseau primitif dans le second groupe de cohomologie de Y. Alors la réduction X de Y modulo p vérifie la conjecture de Tate pour les diviseurs.

Si l'énoncé ci-dessus est technique, on en déduit plusieurs corollaires plus concrets.

Corollaire 5.2. *Soit Y une déformation projective d'un schéma de Hilbert ponctuel d'une surface $K3$. Soit h la classe de cohomologie d'une section hyperplane de Y, et soit d l'entier $q(h)$, où q est la forme de Beauville-Bogomolov.*

Soit $p \geq 5$ un nombre premier. Supposons que p est premier à d et que $p > 2n$. Supposons que Y est définie sur une extension finie non-ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ et que Y a bonne réduction en p. Alors la réduction X de Y modulo p vérifie la conjecture de Tate pour les diviseurs.

Corollaire 5.3. *La conjecture de Tate vaut pour les surfaces $K3$ sur les corps finis de caractéristique au moins 5.*

Corollaire 5.4. *Soit k un corps fini de caractéristique au moins 5. La conjecture de Tate vaut pour les cycles de codimension 2 sur les hypersurfaces cubiques lisses de $\mathbb{P}^5_k$.*

Le corollaire 5.3 n'est pas une conséquence immédiate du théorème principal : il faut se débarrasser de l'hypothèse que la caractéristique est première au degré – par contre, les résultats de [Del81] suffisent à assurer les hypothèses de relèvement à la caractéristique nulle. Pour contourner cette difficulté, on se sert d'une variante de «l'astuce de Zarhin» [Zar74] : si S est une surface $K3$, le groupe de Néron-Severi du schéma de Hilbert $S^{[2]}$ est de rang au moins 2. Sur cette dernière, on peut choisir une classe ample de degré premier à la caractéristique du corps de base et prouver la conjecture de Tate pour les diviseurs. Il n'est pas difficile d'en déduire la conjecture de Tate pour S.

Le corollaire 5.3 était connu dans plusieurs cas. Remarquons d'abord que la conjecture de Tate pour les surfaces $K3$ sur les corps de nombres est une conséquence de la conjecture de Tate pour les variétés abéliennes sur les corps de nombres prouvée par Faltings [Fal83] et de la construction de Kuga-Satake, en utilisant l'argument que nous avons décrit en 4.3.

Il est essentiel de remarquer que cet argument ne fonctionne pas dans le cas des corps finis, alors qu'il est possible de réduire la correspondance de Kuga-Satake modulo p. Le point crucial est que la conjecture de Tate – au contraire de la conjecture de Hodge et de la conjecture des périodes de Grothendieck – ne caractérise pas les classes de cycles algébriques dans la cohomologie étale ℓ-adique, mais simplement le $\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel qu'elles engendrent.

Ce phénomène empêche d'appliquer directement l'argument de 4.3. En caractéristique nulle, il n'est pas difficile de conclure quand même, mais il faut de manière essentielle, quoique élémentaire, utiliser la structure rationnelle sur la cohomologie venant de la cohomologie singulière. Cette structure est absente en caractéristique positive. Le problème décrit ci-dessus est au coeur de notre preuve du théorème 5.1.

De ce qui précède, il est possible de déduire la conjecture de Tate pour les surfaces $K3$ qui se relèvent «de manière convenable» en caractéristique nulle. Comme pour les variétés abéliennes, on dispose pour les surfaces $K3$ sur les corps finis d'une notion de hauteur qui provient de la structure de leur groupe de Brauer formel [Art74]. Dans les articles [Nyg83, NO85], Nygaard et Ogus montrent le corollaire 5.3 pour les surfaces $K3$ de hauteur finie.

Le cas restant est celui des surfaces $K3$ supersingulières. Le morphisme de Frobenius agit sur le deuxième groupe de cohomologie ℓ-adique de ces dernières à travers un groupe fini. Il s'agit donc de montrer que, quitte à passer à une extension finie du corps de base, les surfaces $K3$ supersingulières ont pour nombre de Picard 22. C'est la *conjecture d'Artin*, que nous démontrons.

Notre preuve des résultats ci-dessus s'appuient sur des travaux de Maulik qui dans [Mau12] prouve la conjecture d'Artin quand le degré d'une polarisation sur la surface envisagée est petit devant la caractéristique du corps de base. Un des points essentiels, dans son approche et dans la notre, et d'utiliser des versions en caractéristique mixte des résultats d'amplitude du lieu de Noether-Lefschetz dûs à Borcherds et que nous avons évoqués en 2.3. Pour transférer ces résultats de géométrie complexe en caractéristique mixte, il faut faire appel à l'amplitude du fibré de Hodge sur l'espace de modules des variétés abéliennes en caractéristique mixte, démontrée par Moret-Bailly [MB85].

Ces résultats permettent de montrer que le lieu de Noether-Lefschetz a une intersection non vide avec toute composante de l'adhérence de la strate supersingulière dans une compactification adéquate de l'espace de modules des surfaces $K3$ polarisées (ou des variétés symplectiques holomorphes comme dans l'énoncé du théorème 5.1). On parvient à conclure en utilisant notamment un critère pour que certaines classes de cohomologie soient des classes de cycle en termes de l'algébricité d'un certain lieu de Noether-Lefschetz formel qui leur est associé.

Une fois connue la conjecture de Tate pour les surfaces $K3$ sur les corps de nombres et sur les corps finis de caractéristique au moins 5, il n'est pas difficile, par des techniques standard, d'en déduire la conjecture de Tate pour les surfaces $K3$ sur les corps de type fini sur leur sous-corps premier dont la caractéristique vaut au moins 5. Il en va de même pour les cubiques de dimension 4, en utilisant encore une fois [BD85].

Depuis la publication de [Cha12c], Madapusi Pera [Per13] a donné une nouvelle démonstration de la conjecture de Tate pour les surfaces $K3$, qui vaut aussi en caractéristique 3. Cette preuve n'utilise pas les travaux de Borcherds, mais s'appuie sur des travaux récents de Kisin et Vasiu autour de la conjecture de Langlands-Rapoport. En outre, en s'appuyant sur la conjecture de Tate pour les surfaces $K3$, Liedtke est parvenu dans [Lie13] à démontrer que les surfaces $K3$ supersingulières sont unirationnelles.

5.2. **Fonctions normales sur les hypersurfaces cubiques de dimension 4 et conjecture de Tate entière.** Le dernier résultat que nous présentons est contenu dans l'article [CP13b]. Il s'agit d'un travail en commun avec Alena Pirutka.

Soit k un corps de type fini sur son sous-corps premier, et soit X une variété projective lisse sur k. Soit ℓ un nombre premier différent de la caractéristique de k. La version entière de la conjecture de Tate, qui affirme la surjectivité de l'application

$$CH^r(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^{2r}(X_{\overline{k}}, \mathbb{Z}_\ell(r))^G \tag{2}$$

n'est en général pas vérifiée. Ce problème est discuté en détail dans [CTS08]. Si r vaut 1, un argument classique montre que la surjectivité de l'application (2) est équivalente à la conjecture de Tate à coefficients dans $\mathbb{Q}_\ell$.

Dans le problème entier ci-dessus, on peut distinguer deux questions. La première est l'analogue de la conjecture de Hodge entière, et demande l'existence de cycles sur la clôture algébrique du corps de base k. La seconde demande que ces cycles descendent à k lui-même. De façon plus précise, la première de ces questions demande si l'application

$$CH^r(X_{\bar{k}}) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to \bigcup_U H^{2r}(X_{\overline{k}}, \mathbb{Z}_\ell(r))^U \tag{3}$$

est surjective, où U parcourt les sous-groupes ouverts de G. Pour les classes de courbes, Schoen a montré dans [Sch98] que l'application (3) est surjective si la conjecture de Tate est vraie pour les diviseurs.

Dans [Voi07], Voisin montre que la conjecture de Hodge entière est vraie pour les cycles de codimension 2 dans une cubique lisse de $\mathbb{P}^5_{\mathbb{C}}$. Les arguments de Voisin sont à première vue largement de nature transcendante. Une des clés de la preuve est la méthode des fonctions normales de Zucker [Zuc76] qui généralise à la codimension supérieure la démonstration de Poincaré et Lefschetz de la conjecture de Hodge pour les classes de diviseurs. Nous étendons ce résultat au cas des corps finis.

Théorème 5.5. *Soit k un corps de type fini sur son sous-corps premier et de caractéristique différente de 2 et 3. Soit $\overline{k}$ une clôture algébrique de k. Soit X une hypersurface cubique lisse de $\mathbb{P}^5_k$. La conjecture de Tate entière est vraie pour les cycles de codimension 2 sur X. Autrement dit, pour tout nombre premier ℓ différent de la caractéristique de k,* *l'application classe de cycle*

$$CH^2(X_{\bar{k}}) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to \bigcup_U H^4(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_\ell(2))^U \tag{4}$$

est surjective, où G est le groupe de Galois absolu de k et U parcourt le système des sous-groupes ouverts de G.

Il est à remarquer que le cas où la caractéristique de k est nulle est déjà connu : il résulte de la conjecture de Tate à coefficients rationnels prouvé dans ce cas par André dans [And96a, 1.6.1] – pour les corps de nombres, et le cas général s'en déduit – et de la conjecture de Hodge entière pour les cubiques de dimension 4 prouvée par Voisin dans [Voi07].

La version rationnelle de la conjecture de Tate étant acquise grâce à 5.4, la preuve du théorème s'inspire de celle de [Voi07, Voi13]. Il s'agit d'abord d'utiliser la méthode de Zucker en associant à une classe Galois-invariante une section de la fibration en jacobiennes intermédiaires associée à un pinceau de Lefschetz de X. Ensuite, un résultat de Markushevich et Tikhomirov [MT01] permet de construire une famille de cycles algébriques à partir de toute section comme ci-dessus.

En général, les notions de jacobienne intermédiaire et de fonction normale, qui sont des objets de géométrie complexe, n'ont pas d'analogue en caractéristique positive. Dans notre cas, c'est la description due à Clemens et Griffiths [CG72], de la jacobienne intermédiaire d'une cubique de dimension 3 qui permet de donner un sens à la stratégie ci-dessus.

Articles présentés

[BC13] J.-B. Bost and F. Charles. Some remarks concerning the Grothendieck Period Conjecture. *arXiv preprint arXiv :1307.1045*, 2013.

[Cha12a] F. Charles. On the Picard number of K3 surfaces over number fields. *à paraître dans Algebra and Number Theory*, 2012.

[Cha12b] F. Charles. A remark on the Torelli theorem for cubic fourfolds. *arXiv :1209.4509 [math.AG]*, 2012.

[Cha12c] F. Charles. The Tate conjecture for K3 surfaces over finite fields. *Inventiones mathematicae*, 194(1) :119–145, 2012.

[Cha13] F. Charles. Frobenius distribution for pairs of elliptic curves. *en préparation*, 2013.

[CM13] F. Charles and E. Markman. The standard conjectures for holomorphic symplectic varieties deformation equivalent to Hilbert schemes of K3 surfaces. *Compositio Mathematica*, 149(3) :481–494, 2013.

[CP13a] F. Charles and G. Pacienza. Rational curves on holomorphic symplectic varieties. *en préparation*, 2013.

[CP13b] F. Charles and A. Pirutka. La conjecture de Tate entière pour les cubiques de dimension quatre sur un corps fini. *à paraître dans Compositio Mathematica*, 2013.

Références

[AK77] A. Altman and S. Kleiman. Foundations of the theory of Fano schemes. *Compositio Math.*, 34(1) :3–47, 1977.

[And96a] Y. André. On the Shafarevich and Tate conjectures for hyperkähler varieties. *Math. Ann.*, 305(2) :205–248, 1996.

[And96b] Y. André. Pour une théorie inconditionnelle des motifs. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (83) :5–49, 1996.

[And04] Y. André. *Une introduction aux motifs. Motifs purs, motifs mixtes, périodes.* Panoramas et Synthèses 17. Société Mathématique de France, 2004.

[Apo11] A. Apostolov. Moduli spaces of polarized irreducible symplectic manifolds are not necessarily connected. *arXiv preprint arXiv :1109.0175*, 2011.

[Ara06] D. Arapura. Motivation for Hodge cycles. *Advances in Mathematics*, 207(2) :762–781, 2006.

[Art74] M. Artin. Supersingular $K3$ surfaces. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 7 :543–567 (1975), 1974.

[Aut03] P. Autissier. Hauteur des correspondances de Hecke. *Bull. Soc. Math. France*, 131(3) :421–433, 2003.

[BD85] A. Beauville and R. Donagi. La variété des droites d'une hypersurface cubique de dimension 4. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 301(14) :703–706, 1985.

[Bea83] A. Beauville. Variétés Kähleriennes dont la première classe de Chern est nulle. *J. Differential Geom.*, 18(4) :755–782 (1984), 1983.

[Bea86] A. Beauville. Le groupe de monodromie des familles universelles d'hypersurfaces et d'intersections complètes. In *Complex analysis and algebraic geometry (Göttingen, 1985)*, volume 1194 of *Lecture Notes in Math.*, pages 8–18. Springer, Berlin, 1986.

[Bea07] A Beauville. On the splitting of the Bloch-Beilinson filtration. In *Algebraic cycles and motives (vol. 2)*, volume 344 of *London Math. Soc. Lecture Notes*, pages 38–53. Cambride University Press, 2007.

[BHT11] F. Bogomolov, B. Hassett, and Y. Tschinkel. Constructing rational curves on K3 surfaces. *Duke Math. J.*, 157(3) :535–550, 2011.

[BKPSB98] R. Borcherds, L. Katzarkov, T. Pantev, and N. Shepherd-Barron. Families of K3 surfaces. *J. Algebr. Geom.*, 7 :183–193, 1998.

[Bog78] F. A. Bogomolov. Hamiltonian Kählerian manifolds. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 243(5) :1101–1104, 1978.

[Bor98] R. Borcherds. Automorphic forms with singularities on Grassmannians. *Invent. Math.*, 132(3) :491–562, 1998.

[Bor99] R. Borcherds. The Gross-Kohnen-Zagier theorem in higher dimensions. *Duke Math. J.*, 97(2) :219–233, 1999.

[BV04] A. Beauville and C. Voisin. On the Chow ring of a K3 surface. *J. Alg. Geom.*, 13(3) :417–426, 2004.

[CG72] C. H. Clemens and P. A. Griffiths. The intermediate Jacobian of the cubic threefold. *The Annals of Mathematics*, 95(2) :281–356, 1972.

[Cha13] F. Charles. Remarks on the Lefschetz standard conjecture and hyperkähler varieties. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 88(2) :449–468, 2013.

[Che99] X. Chen. Rational curves on K3 surfaces. *J. Alg. Geom.*, 8(2) :245–278, 1999.

[COU01] L. Clozel, H. Oh, and E. Ullmo. Hecke operators and equidistribution of Hecke points. *Inventiones mathematicae*, 144(2) :327–351, 2001.

[CS11] F. Charles and C. Schnell. Notes on absolute Hodge classes. 2011.

[CTS08] J.-L. Colliot-Thélene and T. Szamuely. Autour de la conjecture de Tate á coefficients F_ℓ pour les variétés sur les corps finis. In *Proceedings of the Conference on Algebraic Cycles, Columbus, Ohio*, 2008.

[Del72] P. Deligne. La conjecture de Weil pour les surfaces $K3$. *Invent. Math.*, 15 :206–226, 1972.

[Del81] P. Deligne. Relèvement des surfaces $K3$ en caractéristique nulle. In *Algebraic surfaces (Orsay, 1976–78)*, volume 868 of *Lecture Notes in Math.*, pages 58–79. Springer, Berlin, 1981. Prepared for publication by Luc Illusie.

[DMOS82] P. Deligne, J. S. Milne, A. Ogus, and K. Shih. *Hodge cycles, motives, and Shimura varieties*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 900. Springer-Verlag, Berlin, 1982.

[DV10] O. Debarre and C. Voisin. Hyper-kähler fourfolds and grassmann geometry. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 2010(649) :63–87, 2010.

[EJ12] A.-S. Elsenhans and J. Jahnel. Kummer surfaces and the computation of the Picard group. *LMS Journal of Computation and Mathematics*, 15 :84–100, 2012.

[Elk89] N. Elkies. Supersingular primes for elliptic curves over real number fields. *Compositio Mathematica*, 72(2) :165–172, 1989.

[Fal83] G. Faltings. Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern. *Invent. Math.*, 73(3) :349–366, 1983.

[GHS03] T. Graber, J. Harris, and J. Starr. Families of rationally connected varieties. *Journal of the American Mathematical Society*, 16(1) :57–67, 2003.

[Gro66] A. Grothendieck. On the de Rham cohomology of algebraic varieties. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (29) :95–103, 1966.

[Gro69] A. Grothendieck. Standard conjectures on algebraic cycles. In *Algebraic Geometry (Internat. Colloq., Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 1968)*, pages 193–199. Oxford Univ. Press, London, 1969.

[GZ86] B. H. Gross and D. Zagier. Heegner points and derivatives of L-series. *Inventiones mathematicae*, 84(2) :225–320, 1986.

[Huy99] D. Huybrechts. Compact hyper-Kähler manifolds : basic results. *Invent. Math.*, 135(1) :63–113, 1999.

[Huy11] Daniel Huybrechts. A global Torelli theorem for hyperkähler manifolds (after Verbitsky). *Séminaire Bourbaki, ArXiv e-prints*, June 2011.

[Kaw92] Y. Kawamata. Unobstructed deformations. *J. Algebr. Geom.*, 1 :183–190, 1992.

[Lan65] S. Lang. Algebraic values of meromorphic functions. *Topology*, 3 :183–191, 1965.

[Lan66] S. Lang. *Introduction to transcendental numbers.* Addison-Wesley Series in Mathematics. Reading, Mass. etc. : Addison-Wesley Publishing Company. VI, 105 p. , 1966.

[Lie68] D. Lieberman. Numerical and homological equivalence of algebraic cycles on hodge manifolds. *American Journal of Mathematics*, 90(2) :366–374, 1968.

[Lie13] C. Liedtke. Supersingular K3 surfaces are unirational. *arXiv preprint arXiv :1304.5623*, 2013.

[LL12] J. Li and C. Liedtke. Rational curves on K3 surfaces. *Inventiones mathematicae*, 188(3) :713–727, 2012.

[Loo09] E. Looijenga. The period map for cubic fourfolds. *Invent. Math.*, 177(1) :213–233, 2009.

[Mar11a] E. Markman. The Beauville-Bogomolov class as a characteristic class. *arXiv preprint arXiv :1105.3223*, 2011.

[Mar11b] E. Markman. A survey of Torelli and monodromy results for holomorphic-symplectic varieties. In *Proceedings of the conference "Complex and differential geometry"*, pages 257–322. Springer Proceedings in Mathematics, 2011.

[Mau12] D. Maulik. Supersingular K3 surfaces for large primes. *arXiv preprint arXiv :1203.2889*, 2012.

[MB85] L. Moret-Bailly. Pinceaux de variétés abéliennes. *Astérisque*, 129 :266, 1985.

[MM83] Shigefumi Mori and Shigeru Mukai. The uniruledness of the moduli space of curves of genus 11. In *Algebraic geometry*, pages 334–353. Springer, 1983.

[MP12] D. Maulik and B. Poonen. Néron–Severi groups under specialization. *Duke Mathematical Journal*, 161(11) :2167–2206, 2012.

[MT01] D. Markushevich and A. S. Tikhomirov. The Abel-Jacobi map of a moduli component of vector bundles on the cubic threefold. *J. Alg. Geom.*, 10(1) :37–62, 2001.

[Mum68] D. Mumford. Rational equivalence of 0-cycles on surfaces. *J. Math. Kyoto Univ*, 9(195204) :18, 1968.

[NO85] N. Nygaard and A. Ogus. Tate's conjecture for $K3$ surfaces of finite height. *Ann. of Math. (2)*, 122(3) :461–507, 1985.

[Nyg83] N. Nygaard. The Tate conjecture for ordinary $K3$ surfaces over finite fields. *Invent. Math.*, 74(2) :213–237, 1983.

[O'G99] K. O'Grady. Desingularized moduli spaces of sheaves on a k3. *Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik*, 512 :49–118, 1999.

[O'G03] K. O'Grady. A new six-dimensional irreducible symplectic variety. *J. Alg. Geom.*, 12(3) :435–505, 2003.

[Ogu03] K. Oguiso. Local families of K3 surfaces and applications. *J. Alg. Geom.*, 12(3) :405–433, 2003.

[Per13] K. M. Pera. The Tate conjecture for K3 surfaces in odd characteristic. *arXiv preprint arXiv :1301.6326*, 2013.

[PTvL12] B. Poonen, D. Testa, and R. van Luijk. Computing Néron-Severi groups and cycle class groups. *arXiv preprint arXiv :1210.3720*, 2012.

[Ran95] Z. Ran. Hodge theory and deformation of maps. *Compositio Mathematica*, 97(3) :309–328, 1995.

[Sch41] Th. Schneider. Zur Theorie der Abelschen Funktionen und Integrale. *J. Reine Angew. Math.*, 183 :110–128, 1941.

[Sch98] C. Schoen. An integral analog of the Tate conjecture for one dimensional cycles on varieties over finite fields. *Mathematische Annalen*, 311(3) :493–500, 1998.

[Sch12] U. Schlickewei. On the Anoré motive of certain irreducible symplectic varieties. *Geometriae Dedicata*, 156(1) :141–149, 2012.

[Ser86] J.-P. Serre. Letter to K. Ribet, jan. 1, 1981. In *Œuvres. Vol. III.* Springer-Verlag, Berlin, 1986. 1972–1984.

[Shi81] T. Shioda. On the Picard number of a complex projective variety. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 14(3) :303–321, 1981.

[Tan90] S. G. Tankeev. Surfaces of $K3$ type over number fields and the Mumford-Tate conjecture. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 54(4) :846–861, 1990.

[Tan95] S. G. Tankeev. Surfaces of $K3$ type over number fields and the Mumford-Tate conjecture. II. *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.*, 59(3) :179–206, 1995.

[Tat66] J. Tate. Endomorphisms of Abelian varieties over finite fields. *Invent. Math.*, 2 :134–144, 1966.

[Tat94] J. Tate. Conjectures on algebraic cycles in l-adic cohomology. In *Motives (Seattle, WA, 1991)*, volume 55 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 71–83. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[Ter85] T. Terasoma. Complete intersections with middle Picard number 1 defined over $\mathbf{Q}$. *Math. Z.*, 189(2) :289–296, 1985.

[Tia87] Gang Tian. Smoothness of the universal deformation space of compact Calabi-Yau manifolds and its Petersson-Weil metric. In *Mathematical aspects of string theory (San Diego, Calif., 1986)*, volume 1 of *Adv. Ser. Math. Phys.*, pages 629–646. World Sci. Publishing, Singapore, 1987.

[Tod89] Andrey N. Todorov. The Weil-Petersson geometry of the moduli space of $\mathrm{SU}(n \geq 3)$ (Calabi-Yau) manifolds. I. *Comm. Math. Phys.*, 126(2) :325–346, 1989.

[Ver96] M. Verbitsky. Hyperholomorphic bundles over a hyperkähler manifold. *Journal of Algebraic Geometry*, 5 :633–670, 1996.

[Ver09] M. Verbitsky. A global Torelli theorem for hyperkahler manifolds. *ArXiv e-prints*, August 2009.

[vL07] R. van Luijk. K3 surfaces with Picard number one and infinitely many rational points. *Algebra Number Theory*, 1(1) :1–15, 2007.

[Voi86] C. Voisin. Théorème de Torelli pour les cubiques de $\mathbf{P}^5$. *Invent. Math.*, 86(3) :577–601, 1986.

[Voi02] C. Voisin. *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe*, volume 10 of *Cours Spécialisés*. Société Mathématique de France, Paris, 2002.

[Voi07] C. Voisin. Some aspects of the hodge conjecture. *Japanese Journal of Mathematics*, 2(2) :261–296, 2007.

[Voi08] C. Voisin. On the Chow ring of certain algebraic hyperkahler manifolds. *Pure and applied mathematics quarterly*, 4(3), 2008.

[Voi13] C. Voisin. Abel-Jacobi map, integral Hodge classes and decomposition of the diagonal. *J. Alg. Geom.*, 22 :141–174, 2013.

[Zar74] Ju. G. Zarhin. A remark on endomorphisms of abelian varieties over function fields of finite characteristic. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 38 :471–474, 1974.

[Zar83] Ju. G. Zarhin. Hodge groups of $K3$ surfaces. *J. Reine Angew. Math.*, 341 :193–220, 1983.

[Zuc76] S. Zucker. Generalized intermediate Jacobians and the theorem on normal functions. *Inventiones mathematicae*, 33(3) :185–222, 1976.