6 Espaces $\mathbb{L}^p$

Les corrections sont partielles et indicatives. N'hésitez pas à utiliser le mail ou passer me voir dans le bureau V2 si vous avez des problèmes. Toutes les remarques (et fautes trouvées) sont les bienvenues pour l'amélioration du TD.

Exercice 6.1. (C'est limite...)

1. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de $\mathbb{L}^p(E,\mathcal{A},\mu)\cap\mathbb{L}^q(E,\mathcal{A},\mu)$ avec $p,q\in[1,+\infty[$ et $p\neq q$. On suppose que $f_n\to 0$ dans $\mathbb{L}^p$ quand $n\to\infty$ et que $(f_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{L}^q$. Montrer que $f_n\to 0$ dans $\mathbb{L}^q$ quand $n\to\infty$.

2. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de $\mathbb{L}^p(E,\mathcal{A},\mu)$ qui converge dans $\mathbb{L}^p$ vers f et qui converge également μ-p.p. vers g. Montrer que $g\in\mathbb{L}^p$ et que $f=g$ μ-p.p.

Correction :

1. La suite $(f_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{L}^q$ donc il existe une fonction $f\in\mathbb{L}^q$ telle que $f_n\to f$ dans $\mathbb{L}^q$ quand $n\to\infty$. On peut extraire de $(f_n)_{n\geq 0}$ une sous-suite $(f_{n_k})_{k\geq 0}$ telle que $f_{n_k}\to f$ μ-p.p. quand $k\to\infty$. Par ailleurs $f_{n_k}\to 0$ dans $\mathbb{L}^p$ quand $k\to\infty$. Donc on peut en extraire une sous-suite $(f_{n_{k_j}})_{k\geq 0}$ telle que $f_{n_{k_j}}\to 0$ μ-p.p. quand $j\to\infty$. On en déduit donc que $f=0$ μ-p.p.

2. On utilise Fatou pour prouver que $g\in\mathbb{L}^p$ et la même astuce que la question précédente pour montrer que $f=g$ μ-p.p.

Exercice 6.2. Soit f une fonction mesurable sur $(E,\mathcal{A},\mu)$, avec $\|f\|_\infty>0$. Pour $0<p<+\infty$, on pose

$$\varphi(p):=\int_E |f|^p d\mu, \text{ et } I:=\left\{p\in\mathbb{R}_+^*:\varphi(p)<\infty\right\}.$$

1. Montrer que I est un intervalle. Est-il fermé ? ouvert ?

2. Montrer que $\ln\circ\varphi$ est convexe sur I et que φ est continue sur I.

Correction :

1. Soit $a<b\in I$, et $t\in]0,1[$. On pose $\frac{1}{p}=t$ et $\frac{1}{q}=(1-t)$, l'inégalité de Hölder donne
$$\left(\int_E |f|^{ta+(1-t)b}d\mu\right)\leq\left(\int_E |f|^a\right)^t\left(\int_E |f|^b\right)^{(1-t)}, \tag{1}$$
ce qui montre donc que I est un intervalle. En considérant les fonctions $x\mapsto x^\alpha$ et $x\mapsto\frac{1}{x\ln(x)^2}$ sur $[2,+\infty]$ muni de la mesure de Lebesgue, on montre que I n'est pas nécéssairement ouvert ou fermé.

2. En passant au logarithme dans l'inégalité (1) on obtient que $\ln\circ\varphi$ est convexe sur $\overset{\circ}{I}$, donc en particulier ϕ est convexe sur $\overset{\circ}{I}$, elle y est continue. Si $a=\min I$ et (a_n) une suite décroissante vers a alors
$$|f|^{a_n}\leq 1_{|f|\geq 1}|f|^{a_0}+1_{|f|\leq 1}|f|^a,$$

et $|f|^{a_n} \underset{\mu\text{-p.p.}}{\longrightarrow} |f|^a$. Le théorème de convergence dominée permet donc de conclure que ϕ est continue en a.

Exercice 6.3 (Réciproque au Théorème de convergence dominée)**.** Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite convergente de fonctions de $\mathbb{L}^1(\mu)$ *i.e.* il existe $f \in \mathbb{L}^1(\mu)$ avec $\|f_n - f\|_{\mathbb{L}^1} \longrightarrow 0$. Montrer qu'il existe une suite extraite $(f_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ qui convergent μ-pp vers f et telle qu'il existe $h \in \mathbb{L}^1(\mu)$ avec μ-pp

$$\sup_{n\geq 0} |f_{\varphi(n)}| \leq h.$$

Indication : Calquer la démonstration de la complétude des espaces $\mathbb{L}^p$.

Correction : Comme la suite (f_n) est convergente, elle est de Cauchy et on peut alors choisir une extraction $(\phi(k))_{k\geq 0}$ telle que

$$\|f_{\phi(k)} - f_{\phi(k+1)}\|_1 \leq \frac{1}{2^n}.$$

Puis on considère la suite croissante de fonctions $g_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |f_{\phi(k+1)} - f_{\phi(k)}|$, d'après le théorème de convergence monotone $g = \lim g_n$ est intégrable d'intégrale plus petite que 1. Et il vient que pour presque tout x la série $f_{\phi(n)} - f_{\phi(1)} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (f_{\phi(k+1)} - f_{\phi(k)})$ est absolument convergente donc convergente. La suite de fonction $f_{\phi(n)}$ converge donc presque sûrement vers $\tilde{f}$. La domination $|f_{\phi(n)}| \leq g + |f_{\phi(1)}|$ entraine par convergence dominée que $\|f_{\phi(n)} - (\tilde{f})\|_{\mathbb{L}^1} = 0$. Ainsi on a $\|f - \tilde{f}\|_{\mathbb{L}^1} = 0$ et donc $f = \tilde{f}$ μ-p.p.

Exercice 6.4 (Un semblant d'uniforme intégrabilité)**.** Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(E) < \infty$. On considère une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ bornée de $\mathbb{L}^p(E, \mathcal{A}, \mu)$, $p \in]1, \infty[$ et une fonction mesurable f sur $(E, \mathcal{A}, \mu)$ telles que $f_n \to f$ μ-p.p. quand $n \to \infty$.

1. Montrer que $f \in \mathbb{L}^p(E, \mathcal{A}, \mu)$.
2. Montrer en utilisant le théorème d'Egoroff (à rappeler) que $f_n \to f$ dans $\mathbb{L}^r$ quand $n \to \infty$ pour tout $r \in [1, p[$.
3. Que se passe-t-il pour $p = \infty$???

Correction : On étudie séparément les cas $p = +\infty$ et $p < +\infty$.
<u>Cas $p = +\infty$.</u>

1. On a l'existence d'une constante $M < \infty$ telle que $\mu(|f_n| > M) = 0$ pour tout $n \geq 0$. Or

$$\{f > M\} \subset \bigcup_{n\geq 0} \{|f_n| > M\}.$$

Donc $\mu(|f| > M) = 0$ et $f \in \mathbb{L}^\infty$.

2. On fixe $r \in [1, +\infty[$, $\varepsilon > 0$ et un ensemble A_ε donné par le théorème d'Egoroff. Soit $n_0 \geq 0$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on a
$$\sup_{x \in E \setminus A_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$
Alors pour tout $n \geq n_0$ on a
$$\begin{aligned} \int_E |f_n - f|^r \, d\mu &= \int_{E \setminus A_\varepsilon} |f_n - f|^r \, d\mu + \int_{A_\varepsilon} |f_n - f|^r \, d\mu \\ &\leq \varepsilon^r \mu(E) + \varepsilon (2M)^r. \end{aligned}$$

Cas $p < +\infty$.

1. D'après le lemme de Fatou on a
$$\int_E |f_n|^p \, d\mu \leq \liminf_{n \to \infty} \int_E |f_n|^p \, d\mu \leq \sup_{n \geq 0} \|f_n\|_p^p < \infty,$$
et donc $f \in \mathbb{L}^p$.

2. On fixe $r \in [1, p[$, $\varepsilon > 0$ et un ensemble A_ε donné par le théorème d'Egoroff. Soit $n_0 \geq 0$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on a
$$\sup_{x \in E \setminus A_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$
Alors pour tout $n \geq n_0$ on a d'après l'inégalité de Hölder
$$\begin{aligned} \int_E |f_n - f|^r \, d\mu &= \int_{E \setminus A_\varepsilon} |f_n - f|^r \, d\mu + \int_{A_\varepsilon} |f_n - f|^r \, d\mu \\ &\leq \varepsilon^r \mu(E) + \varepsilon^{1 - r/p} \left(\int_{A_\varepsilon} |f_n - f|^p \, d\mu \right)^{r/p} \\ &\leq \varepsilon^r \mu(E) + 2^r \varepsilon^{1 - r/p} \left(\|f\|_p^p + \sup_{n \geq 0} \|f_n\|_p^p \right)^{r/p} \end{aligned}$$

Exercice 6.5 (Continuité de l'opérateur de translation). Soient $h \in \mathbb{R}$ et $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable. On définit $\tau_h f$ par
$$\tau_h f(x) = f(x - h), \;\; x \in \mathbb{R}.$$

1. Vérifier que l'opérateur de translation τ_h est une isométrie de l'espace $\mathbb{L}^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ pour $p \in [1, +\infty]$.

2. On suppose $p < \infty$. Montrer que si $f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ alors,
$$\lim_{h \to 0} \|\tau_h f - f\|_p = 0,$$
$$\lim_{|h| \to +\infty} \|\tau_h f - f\|_p = 2^{1/p} \|f\|_p.$$
Indication : on pourra traiter tout d'abord le cas où f est continue à support compact.

3. Que deviennent les résultats de la question (2) si $p = \infty$?

4. Déduire des questions prédentes que si $\lambda(A) > 0$, alors l'ensemble $A - A = \{x - y : x, y \in A\}$ contient un voisinage de 0. (Deuxième démonstration de l'année)

Correction :

1. Évident.

2. Soit f une fonction continue à support compact. La fonction f est donc uniformément continue. Soient $a < b$ deux réels tels que le segment $[a, b]$ contient le support de f. On a, pour tout $|h| < 1$,
$$\|\tau_h f - f\|_p^p \leq (b - a + 2) \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x + h) - f(x)|^p,$$
et $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x+h) - f(x)|^p \to 0$ quand $h \to 0$. Soit h tel que $|h| > b - a$. Alors les supports de $\tau_h f$ et f sont disjoints. On a donc
$$\begin{aligned}
&\|\tau_h f - f\|_p^p \\
&= \int_E |\tau_h f(x) - f(x)|^p \, dx \\
&= \int_E |\tau_h f(x) - f(x)|^p \, \mathbb{1}_{\{x \in \mathrm{supp}(f)\}} \, dx + \int_E |\tau_h f(x) - f(x)|^p \, \mathbb{1}_{\{x \in \mathrm{supp}(\tau_h f)\}} \, dx \\
&= \|f\|_p^p + \|\tau_h f\|_p^p = 2\|f\|_p^p.
\end{aligned}$$
Soient maintenant $f \in \mathbb{L}^p$ et $\varepsilon > 0$. On peut trouver une fonction g continue à support compact telle que $\|f - g\|_p \leq \varepsilon$. Ainsi, pour tout $h \geq 0$,
$$\|\tau_h g - g\|_p - \|\tau_h g - \tau_h f\|_p - \|g - f\|_p \leq \|\tau_h f - f\|_p \leq \|\tau_h g - g\|_p + \|\tau_h f - \tau_h g\|_p + \|g - f\|_p,$$
c'est à dire
$$-2\varepsilon + \|\tau_h g - g\|_p \leq \|\tau_h f - f\|_p \leq 2\varepsilon + \|\tau_h g - g\|_p.$$
Ainsi, on a
$$\limsup_{h \to 0} \|\tau_h f - f\|_p \leq 2\varepsilon,$$
et
$$2^{1/p} - (2 + 2^{1/p})\varepsilon \|f\|_p \leq \liminf_{|h| \to \infty} \|\tau_h f - f\|_p \leq \limsup_{|h| \to \infty} \|\tau_h f - f\|_p \leq (2 + 2^{1/p})\varepsilon + 2^{1/p}\|f\|_p.$$
Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit les deux limites.

3. Dans le cas où $p = +\infty$, les résultats ne sont plus vrais. En effet, en posant $f = \mathbb{1}_{[0,1]}$, on a $\|\tau_h f - f\|_\infty = 1$ pour tout $h \in \mathbb{R}$ donc $\|\tau_h f - f\|_\infty \nrightarrow 0$ quand $h \to 0$. De même en posant $g = \mathbb{1}_{\mathbb{R}}$ on a $\|\tau_h g - g\|_\infty = 0$ et donc $\|\tau_h g - g\|_\infty \nrightarrow 2^{1/p}$ quand $|h| \to \infty$.

4. Notons $A_n = A \cap B(0,n)$. Alors $\lambda(A) = \lim_{n\to\infty} \lambda(A_n)$. Il existe donc $n \geq 0$ tel que $\lambda(A_n) > 0$. On peut donc supposer que A est borné, de mesure strictement positive, de sorte que $f = \mathbb{1}_A$ est dans L^1. On a
$$\tau_h f - f = \mathbb{1}_{A\Delta(A+h)},$$
donc
$$\|\mathbb{1}_{A\Delta(A+h)}\|_1 \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0 \text{ ie } \lambda(A\Delta(A+h)) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0.$$
En particulier, $\lambda(A \cap (A+h)^c) \to 0$ donc $\lambda(A \cap (A+h)) \to \lambda(A)$. On peut donc trouver h_0 tel que $\lambda(A \cap (A+h)) > 0$ pour tout $h \leq h_0$. En particulier, $A \cap (A+h) \neq \varnothing$. Donc il existe $x, y \in A$ tels que $x = y + h$ ie $h = x - y$. On a donc montré que $]-h_0, h_0[\subset A - A$.

Exercice 6.6. 1. Soient $p \in [1, +\infty[$ et $f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \lambda)$. On pose $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Montrer que F est bien définie et que si q est l'exposant conjugué de p, alors
$$\lim_{h\to 0} \frac{\sup_{x\in\mathbb{R}} |F(x+h) - F(x)|}{|h|^{1/q}} = 0.$$

2. En déduire que si g est une fonction sur $\mathbb{R}_+$ de classe $\mathcal{C}^1$ intégrable telle que $g' \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}_+)$ pour un $p \in [1, +\infty[$, alors $g(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$.

Correction :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f \in \mathbb{L}^p([0,x]) \subset \mathbb{L}^1([0,x])$ donc F est bien définie. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a, d'après l'inégalité de Hölder,
$$|F(x+h) - F(x)| = \left| \int_E f \mathbb{1}_{[x,x+h]}\,d\mu \right| \leq \left(\int_E |f|^p \mathbb{1}_{[x,x+h]}\,d\mu \right)^{1/p} |h|^{1/q}.$$
Donc, en posant $G(x) = \int_0^x |f|^p\,d\mu$, on a
$$\frac{\sup_{x\in\mathbb{R}} |F(x+h) - F(x)|}{|h|^{1/q}} \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} (|G(x+h) - G(x)|)^{1/p} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0,$$
car G est uniformément continue.

2. La fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ donc $g(x) = g(0) + \int_0^x g'(t)\,dt$. D'après la question 1.,
$$\lim_{h\to 0} \frac{\sup_{x\in\mathbb{R}} |g(x+h) - g(x)|}{|h|^{1/q}} = 0.$$
Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \geq n$ tel que $g(x_n) > \varepsilon$. On peut trouver $h_0 \in]0,1[$ tel que pour tout $h \leq h_0$,
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |g(x+h) - g(x)| \leq \frac{\varepsilon |h|^{1/q}}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$
Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in [x_n, x_n + h_0]$, on a $g(t) \geq \varepsilon/2$. La suite $(x_n)_{n\geq 0}$ peut-être choisie de sorte que les intervalles $[x_n, x_n + h_0]$ soient disjoints. Ainsi,
$$\int_{\mathbb{R}_+} |g(t)|\,dt \geq \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{x_n}^{x_n+h_0} |g(t)|\,dt \geq \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon h_0}{2} = +\infty,$$
ce qui contredit l'intégrabilité de g.

Exercice 6.7 (CS)**.** Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : E \to]0, +\infty[$ une fonction mesurable telle que f et $1/f$ sont intégrables. Montrer que μ est finie.

Correction : On a d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\mu(E) = \int_E \sqrt{f} \sqrt{\frac{1}{f}}\, d\mu \le \left(\int_E f\, d\mu \right)^{1/2} \left(\int_E \frac{1}{f}\, d\mu \right)^{1/2} < \infty.$$

Exercice 6.8. Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini et $p \in [1, \infty[$. Soit $g : E \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que, pour tout fonction $f \in \mathbb{L}^p$, on a $fg \in \mathbb{L}^p$. Montrer que $g \in \mathbb{L}^\infty$.

Correction : On note $(E_k)_{k \ge 0}$ une suite croissante d'ensembles mesurables telle que $\mu(E_k) < \infty$ pour tout $k \ge 0$ et $\cup_{k \ge 0} E_k = E$. Supposons que $g \notin \mathbb{L}^\infty$. Alors l'ensemble

$$I = \{(n, k) \in \mathbb{N}^2 : \mu(\{2^n < g \le 2^{n+1}\} \cap E_k) > 0\}$$

est infini. En effet, si I est fini, alors on peut trouver $n_0 \ge 0$ et $k_0 \ge 0$ tels que pour tout $k \ge k_0$ et tout $n \ge n_0$, on a $\mu(\{2^n < g \le 2^{n+1}\} \cap E_k) = 0$. Ainsi pour tout $n \ge n_0$, on a

$$\mu(\{2^n < g \le 2^{n+1}\}) = \mu(\cup_{k \ge k_0} \{2^n < g \le 2^{n+1}\} \cap E_k) = 0,$$

puis $\mu(\{2^{n_0} < g\}) = 0$ ce qui est contradictoire. On note, pour tout $(n, k) \in I$, $X_{n,k} = \{2^n < g \le 2^{n+1}\} \cap E_k$. Remarquons que $\mu(X_{n,k}) < \infty$. Soit $\{Y_m, m \ge 0\}$ une énumération de $\{X_{n,k}, (n, k) \in I\}$ telle que $m \ge n$. Posons

$$f = \sum_{m \ge 0} 2^{-m} (\mu(Y_m))^{-1/p} \mathbb{1}_{Y_m}.$$

Alors

$$\int_E f^p d\mu = \int_E \sum_{m \ge 0} 2^{-mp} (\mu(Y_m))^{-1} \mathbb{1}_{Y_m} d\mu = \sum_{m \ge 0} 2^{-mp} < \infty,$$

et par ailleurs,

$$\int_E (fg)^p d\mu = \int_E \sum_{m \ge 0} 2^{-mp} (\mu(Y_m))^{-1} \mathbb{1}_{Y_n} g^p d\mu \ge \int_E \sum_{m \ge 0} 2^{-mp} (\mu(Y_m))^{-1} \mathbb{1}_{Y_m} 2^{mp} d\mu = \sum_{m \ge 0} 1 = \infty.$$

On a donc construit une fonction $f \in \mathbb{L}^p$ telle que $fg \notin \mathbb{L}^p$ ce qui est impossible.

Exercice 6.9 (Pourquoi diable $\|\|_\infty$?)**.** Soit f mesurable sur un espace $(E, \mathcal{A}, \mu)$.

1. On suppose dans cette question que $\mu(E) < \infty$, montrer que

$$\lim_{p \to \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

2. On suppose dans cette question que $f \in \mathbb{L}^{p_0}(\mu)$ pour au moins un $p_0 \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer la même conclusion qu'en **1**.

3. $(\star)$ On suppose ici que μ est une mesure de probabilité. La limite

$$\lim_{p\to 0} \|f\|_p,$$

exite-t-elle ? Si oui, à quoi est-elle égale ?

Correction : Soit $M > 0$ tel que $\mu\{x, |f(x)| > M\} > 0$. Alors on a

$$\|f\|_p \geq M.\mu\{x, |f(x)| > M\}^{\frac{1}{p}} \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} M.$$

En conséquence on a $\liminf_{p\to\infty} \|f\|_p \geq \|f\|_\infty$.

1. Dans le cas de la mesure finie, l'inégalité $\|f\|_p \leq \|f\|_\infty \mu(E)^{\frac{1}{p}}$, permet de conclure.
2. Si il existe $p_0 > 0$ avec $f \in \mathbb{L}^{p_0}$, alors la majoration

   $$|f|^p \leq 1_{|f|>1}\|f\|_\infty^p + 1_{|f|\leq 1}|f|^{p_0},$$

   implique que

   $$\|f\|_p \leq \left(\|f\|_\infty^p \underbrace{\mu\{|f| > 1\}}_{<+\infty} + \|f\|_{p_0}^{p_0}\right)^{\frac{1}{p}} \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} \|f\|_\infty.$$
3. Oui, la limite existe et vaut

   $$\lim_{p\to 0^+} \|f\|_p = \exp\left(\int \ln(f) d\mu\right).$$

   Nous ne corrigerons pas cette question.

Exercice 6.10 (Séparabilité)**.** Montrer que pour tout $p \in [1, \infty[$ $\mathbb{L}^p((\mathbb{R}, \lambda))$ est séparable. Montrer qu'en revanche $\mathbb{L}^\infty((\mathbb{R}, \lambda))$ n'est pas séparable. Plus généralement quelle condition sur $(E, \mathcal{A}, \mu)$ faut-il imposer pour que $\mathbb{L}^\infty(\mu)$ ne soit pas séparable.

Correction : Non corrigé !

6.1 Théorème de Radon-Nikodym

Exercice 6.11 (Contre-Exemple à R-N)**.** Soit m la mesure de comptage sur $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ c'est-à-dire que $m(A) = \#A$ pour toute partie A de $\mathbb{R}$. On note m_0 la restriction de m à la tribu borélienne de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que la mesure de Lebesgue est absolument continue par rapport à m_0.
2. Montrer qu'il n'existe pas de fonction mesurable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ telle que $\lambda = f \cdot m_0$, où λ désigne la mesure de Lebesgue.
3. Conclure quelque chose d'intelligent et intelligible.

Correction :

1. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ telle que $m_0(A) = 0$. Alors $A = \varnothing$ et donc $\lambda(A) = 0$.
2. Supposons qu'il existe une telle fonction f. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$0 = \lambda(\{x\}) = \int_{\{x\}} f dm_0 = f(x).$$
Ainsi $f = 0$ puis $\lambda = 0$. Contradiction.
3. La mesure μ_0 n'est pas σ-finie et le théorème de Radon-Nikodym ne s'applique pas.

Exercice 6.12 (Quantification de l'absolue continuité). Soient μ et ν deux mesures sur un espace mesurable $(E, \mathcal{A})$.

1. On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $A \in \mathcal{A}$,
$$\mu(A) \leq \eta \;\Rightarrow\; \nu(A) \leq \varepsilon.$$
Montrer que ν est absolument continue par rapport à μ.
2. Montrer que la réciproque est vraie dans le cas où la mesure ν est finie.

Correction :

1. Soit $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) = 0$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ on a $\nu(A) \leq \varepsilon$ c'est-à-dire $\nu(A) = 0$.
2. On suppose que l'assertion n'est pas vérifiée. Soient $\varepsilon > 0$ et une suite $(A_n)_{n\geq 1}$ tels que, pour tout $n \geq 1$, $\mu(A_n) \leq 2^{-n}$ et $\nu(A_n) \geq \varepsilon$. Notons $B_n = \cup_{k\geq n} A_k$ pour tout $n \geq 1$ et $B = \cap_{n\geq 1} B_n$. Alors d'après le lemme de Borel-Cantelli, on a $\mu(B) = 0$, puis $\nu(B) = 0$. Par ailleurs, pour tout $n \geq 1$, on a $\nu(B_n) \leq \nu(A_n) \geq \varepsilon$. Et la suite $(B_n)_{n\geq 1}$ est décroissante pour l'inclusion. La mesure ν étant finie, on en déduit que
$$\nu(B) = \lim_{n\to\infty} \nu(B_n) \geq \varepsilon,$$
ce qui est contradictoire.

6.2 Physionomie

Exercice 6.13. Qui sont ces charmants messieurs ?

  

Correction : Hölder, Cauchy, Schwarz.