12 Indépendance

Les corrections sont partielles et indicatives. N'hésitez pas à utiliser le mail ou passer me voir dans le bureau V2 si vous avez des problèmes. Toutes les remarques (et fautes trouvées) sont les bienvenues pour l'amélioration du TD.

12.1 Borel-Cantelli

Exercice 12.1. Soit $\alpha > 0$, et soit, sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, $(Z_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi donnée par

$$\mathbb{P}(Z_n = 1) = \frac{1}{n^\alpha} \text{ et } \mathbb{P}(Z_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^\alpha}.$$

Montrer que $Z_n \to 0$ dans $\mathbb{L}^1$ mais que, p.s.,

$$\limsup_{n\to\infty} Z_n = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha \leq 1 \\ 0 & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}.$$

Correction : On a,

$$\mathbb{E}(|Z_n|) = \mathbb{E}(Z_n) = \frac{1}{n^\alpha} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

ce qui signifie que $Z_n \to 0$ dans $\mathbb{L}^1$. Pour tout $n \geq 1$, on note $A_n = \{Z_n = 1\}$. Si $\alpha > 1$ alors $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n) < \infty$. D'après le lemme de Borel-Cantelli, on a donc $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$ c'est-à-dire p.s., il existe $n_0 \geq 1$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $Z_n = 0$ et ainsi $\limsup Z_n = 0$. Si $\alpha \leq 1$ alors $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n) = \infty$. Les A_n étant indépendants, d'après le lemme de Borel-Cantelli, on a donc $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$ c'est-à-dire p.s., pour tout $n_0 \geq 1$, il existe $n \geq n_0$ tel que $Z_n = 1$ et ainsi $\limsup Z_n = 1$.

Exercice 12.2 (LFGN cas non intégrable)**.** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi. On pose, pour tout $n \geq 1$, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.

1. Montrer que
$$\mathbb{E}(|X_1|) \leq 1 + \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(|X_n| \geq n).$$

2. En déduire que si X_1 n'est pas intégrable alors la suite $(n^{-1}S_n)_{n\geq 1}$ diverge p.s.

Correction :

1. On utilise la relation
$$\mathbb{E}(|X_1|) = \int_0^\infty \mathbb{P}(|X_1| > t)\, dt,$$
pour obtenir $\mathbb{E}(|X_1|) \leq 1 + \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(|X_1| \geq n)$. Puis on a $\mathbb{P}(|X_1| \geq n) = \mathbb{P}(|X_n| \geq n)$.

2. Si X_1 n'est pas intégrable alors $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(|X_n| \geq n) = +\infty$. Les événements $\{|X_n| \geq n\}$ étant indépendants, on a $\mathbb{P}(\limsup\{|X_n| \geq n\}) = 1$ d'après le lemme de Borel-Cantelli. On remarque que

$$\left\{\frac{S_n}{n} \to \text{ une limite reelle}\right\} \subset \left\{\frac{S_n}{n} - \frac{S_{n+1}}{n+1} \to 0\right\} \bigcap \left\{\frac{S_n}{n(n+1)} \to 0\right\}.$$

Donc
$$\left\{\frac{S_n}{n} \to \text{ une limite reelle}\right\} \subset \left\{\frac{X_n}{n} \to 0\right\} \subset (\limsup\{|X_n| \geq n\})^c.$$

Donc S_n/n diverge p.s.

Exercice 12.3. 1. Soient X et Y deux v.a.i.i.d de loi μ. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.

2. Soit $(X_n, n \geq 0)$ une suite de variables réelles positives et indépendantes, de même loi. Montrer que p.s. $\lim_{n\to\infty} \sum X_i = +\infty$ sauf dans un cas que l'on déterminera.

3. Soit $(X_n, n \geq 0)$ une suite de v.a. réelles indépendantes, de fonction de répartition F. Montrer que presque sûrement,

$$\max(X_1, ..., X_n) \to l \text{ où } l = \sup\{t \in \mathbb{R}, F(t) < 1\}.$$

Correction : Non corrigé.

Exercice 12.4 (Lois exponentielles)**.** Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de v.a. i. i.d. de loi exponentielle de paramètre 1.

1. Montrer que $\limsup_{n\to\infty} X_n/\ln(n) = 1$ p.s.

2. On pose $Z_n = \max(X_1, ..., X_n)/\ln(n)$, montrer que $\liminf_{n\to\infty} Z_n \geq 1$ p.s.

3. Montre que pour une suite $(n_k)_{k\geq 0}$ bien choisie, $\limsup_{k\to\infty} Z_{n_k} \leq 1$ p.s. En déduire que $\lim_{n\to\infty} Z_n = 1$ p.s.

Correction : Non corrigé.

Exercice 12.5 (une autre version du lemme de Borel-Cantelli)**.** 1. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante de variables aléatoires réelles positives définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n] = +\infty \quad \text{et} \quad \liminf_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}(X_n^2)}{\mathbb{E}(X_n)^2} = 1.$$

Montrer en considérant les événements $B_n = \{|X_n - \mathbb{E}(X_n)| \geq \mathbb{E}(X_n)/2\}$ que $X_n \to \infty$ p.s quand $n \to \infty$.

2. En déduire que si une suite d'événements $(A_n, n \geq 1)$ vérifie

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n) = +\infty \quad \text{et} \quad \liminf_{n\to+\infty} \frac{\sum_{1\leq k,l\leq n} \mathbb{P}(A_k \cap A_l)}{\left(\sum_{m\leq n} \mathbb{P}(A_m)\right)^2} = 1,$$

alors $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$.

12.2 Exercices d'indépendance.

Exercice 12.6. On définit sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ des variables aléatoires $U_1, \ldots, U_n$ indépendantes et de loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, p\}$.

1. Trouver la loi de $M_n = \max_{1 \leq k \leq n} U_k$.
2. Montrer que
$$\frac{\mathbb{E}[M_n]}{p} \underset{p \to \infty}{\longrightarrow} \frac{n}{n+1}.$$

Correction :

1. Pour tout $k \in \{1, \ldots, p\}$, on a,
$$\mathbb{P}(M_n \leq k) = \mathbb{P}(U_1 \leq k, \ldots, U_n \leq k) = \mathbb{P}(U_1 \leq k) \ldots \mathbb{P}(U_n \leq k) = \mathbb{P}(U_1 \leq k)^n = \left(\frac{k}{p}\right)^n.$$
On en déduit la loi de M_n :
$$\mathbb{P}(M_n = k) = \mathbb{P}(M_n \leq k) - \mathbb{P}(M_n \leq k-1) = \frac{k^n - (k-1)^n}{p^n}.$$

2. On a,
$$\mathbb{E}(M_n) = \sum_{k=1}^{p} \mathbb{P}(M_n \geq k),$$
et donc
$$\frac{E(M_n)}{p} = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} \left(1 - \left(\frac{k-1}{p}\right)^n\right) = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \left(1 - \left(\frac{k}{p}\right)^n\right).$$
On reconnaît une somme de Riemann de la fonction $x \mapsto 1 - x^n$, dont l'intégrale entre 0 et 1 vaut $n/(n+1)$. D'où le résultat.

Exercice 12.7 (Formule de compensation)**.** Soient $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de loi μ et N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendante de la suite $(X_n)_{n \geq 1}$.

1. On suppose que μ est la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$ c'est-à-dire que
$$\mu = p\delta_1 + (1-p)\delta_0,$$
et que N suit la loi de Poisson de paramètre λ c'est-à-dire que
$$\mathbb{P}(N = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$
On pose
$$P = \sum_{i=1}^{N} X_i \quad \text{et} \quad F = N - P = \sum_{i=1}^{N} (1 - X_i),$$
avec $P = F = 0$ sur $\{N = 0\}$. Les variables aléatoires P et F représentent respectivement le nombre de piles et de faces dans un jeu de pile ou face de paramètre p à N lancers.

(a) Déterminer la loi du couple (P, N).

(b) En déduire les lois de P et F et montrer que P et F sont indépendantes.

2. On ne fait plus d'hypothèse sur les lois. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable. Montrer que
$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N} f(X_i)\right) = \mathbb{E}(N) \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \mu(dx),$$
avec $\sum_{i=1}^{N} f(X_i) = 0$ sur $\{N = 0\}$.

Correction :

(1)(a) On a $\mathbb{P}(P = 0, N = 0) = \mathbb{P}(N = 0) = e^{-\lambda}$, et pour $n \geq 1$ et $0 \leq k \leq n$,
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(P = k, N = n) &= \mathbb{P}\left(N = n, \sum_{i=1}^{n} X_i = k\right) \\
&= \mathbb{P}(N = n)\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right) \\
&= e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \\
&= e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^k}{k!}\frac{(\lambda(1-p))^{n-k}}{(n-k)!}
\end{aligned}$$

(1)(b) On a pour $k, l \geq 0$,
$$\mathbb{P}(P = k, F = l) = \mathbb{P}(P = k, N = k + l) = \left(e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!}\right)\left(e^{-\lambda(1-p)}\frac{(\lambda(1-p))^l}{l!}\right).$$

Donc les variables aléatoires P et F sont indépendantes et de lois respectives les lois de Poisson de paramètres λp et $\lambda(1-p)$.

(2) On a
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N} f(X_i)\right) &= \mathbb{E}\left(\sum_{n\geq 1} \mathbb{1}_{\{N=n\}} \sum_{i=1}^{n} f(X_i)\right) \\
&= \sum_{n\geq 1} \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{N=n\}} \sum_{i=1}^{n} f(X_i)\right) \\
&= \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(N = n)\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} f(X_i)\right) \\
&= \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(N = n) n \mathbb{E}(f(X_1)) \\
&= \mathbb{E}(N) \int_{\mathbb{R}} f(x)\mu(dx).
\end{aligned}$$

Exercice 12.8 (Processus de Poisson). Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, de même loi exponentielle de paramètre 1. On pose $T_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$,

$$T_n = X_1 + \ldots + X_n.$$

Pour tout $t \geq 0$, on pose

$$N_t = \max\{n \geq 0 : T_n \leq t\}.$$

1. Soit $n \geq 1$. Calculer la loi du n-uplet $(T_1, \ldots, T_n)$.

2. En déduire la loi de N_t pour tout $t > 0$.

3. Pour $n \geq 1$ et $t > 0$, on définit sur Ω une nouvelle mesure de probabilité $\mathbb{Q}^{n,t}$ par la formule
$$\mathbb{Q}^{n,t}(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap \{N_t = n\})}{\mathbb{P}(N_t = n)}, \ A \in \mathcal{A}.$$
Calculer la loi du n-uplet $(T_1, \ldots, T_n)$ sous la mesure de probabilité $\mathbb{Q}^{n,t}$.

Correction :

1. Soit $f : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+$, une fonction mesurable. On a
$$\mathbb{E}(f(T_1, \ldots, T_n)) = \int_{\mathbb{R}_+^n} f(x_1, x_1 + x_2, \ldots, x_1 + x_2 + \ldots + x_n) e^{-(x_1+x_2+\ldots+x_n)} \, dx_1 \ldots dx_n.$$
Or $\phi : (x_1, \ldots, x_n) \in (R_+^*)^n \mapsto (x_1, x_1 + x_2, \ldots, x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \in \{0 < t_1 < \ldots < t_n\}$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de jacobien égal à 1 donc d'après la formule du changement de variables,
$$\mathbb{E}(f(T_1, \ldots, T_n)) = \int_{\mathbb{R}_+^n} f(t_1, t_2, \ldots, t_n) e^{-t_n} \mathbb{1}_{\{0<t_1<\ldots<t_n\}} \, dt_1 \ldots dt_n,$$
ce qui signfie que la loi de $(T_1, \ldots, T_n)$ a pour densité $e^{-t_n} \mathbb{1}_{\{0<t_1<\ldots<t_n\}}$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\{N_t = n\} = \{T_n \leq t, T_{n+1} > t\}$ car la suite $(T_n)_{n \geq 0}$ est p.s. croissante et donc $\mathbb{P}(N_t = n) = \mathbb{P}(T_n \leq t, T_{n+1} > t)$. On en déduit d'après la question (1) que pour $n \geq 1$,
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_t = n) &= \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} e^{-t_{n+1}} \mathbb{1}_{\{0<t_1<\ldots<t_n<t_{n+1}\}} \mathbb{1}_{\{t_n \leq t\}} \mathbb{1}_{\{t_{n+1}>t\}} \, dt_1 \ldots dt_n dt_{n+1} \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^n} \mathbb{1}_{\{0<t_1<\ldots<t_n \leq t\}} \, dt_1 \ldots dt_n \int_t^\infty e^{-t_{n+1}} \\ &= \frac{t^n}{n!} \, e^{-t}, \end{aligned}$$
où la deuxième égalité est une conséquence du théorème de Fubini-Tonelli. Et l'on a
$$\mathbb{P}(N_t = 0) = \mathbb{P}(T_1 > t) = \mathbb{P}(X_1 > t) = \int_t^\infty e^{-x} \, dx = e^{-t}.$$
On voit que N_t suit la loi de Poisson de paramètre t.

3. Soit $f : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+$, une fonction mesurable. On a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(f(T_1,\ldots,T_n)\mathbb{1}_{\{N_t=n\}}) \\
&= \mathbb{E}(f(T_1,\ldots,T_n)\mathbb{1}_{\{T_n\le t, T_{n+1}>t\}}) \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} f(t_1,\ldots,t_n)\mathbb{1}_{\{t_n\le t, t_{n+1}>t\}})e^{-t_{n+1}}\mathbb{1}_{\{0<t_1<\ldots<t_n<t_{n+1}\}}\, dt_1\ldots dt_n dt_{n+1} \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^n} f(t_1,\ldots,t_n)\mathbb{1}_{\{0<t_1<\ldots<t_n<t\}}\, dt_1\ldots dt_n \int_t^\infty e^{-t_{n+1}}dt_{n+1}dt_{n+1} \\
&= e^{-t}\int_{\mathbb{R}_+^n} f(t_1,\ldots,t_n)\mathbb{1}_{\{0<t_1<\ldots<t_n<t\}}\, dt_1\ldots dt_n,
\end{aligned}$$

où la troisième égalité est une conséquence du théorème de Fubini-Tonelli. Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{n,t}}(f(T_1,\ldots,T_n)) &= \frac{\mathbb{E}(f(T_1,\ldots,T_n)\mathbb{1}_{\{N_t=n\}})}{\mathbb{P}(N_t=n)} \\
&= \frac{n!}{t^n}\int_{\mathbb{R}_+^n} f(t_1,\ldots,t_n)\mathbb{1}_{\{0<t_1<\ldots<t_n<t\}}\, dt_1\ldots dt_n,
\end{aligned}$$

ce qui signfie que la loi de $(T_1,\ldots,T_n)$ sous $\mathbb{Q}^{n,t}$ a pour densité $n!\,t^{-n}\ \mathbb{1}_{\{0<t_1<\ldots<t_n<t\}}$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 12.9 (Grandes déviations.)**.** Soit $(X_n)_{n\ge 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, intégrables de moyenne m. On note L la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $L(\lambda) = \log(\mathbb{E}(e^{\lambda X_1}))$ si $\mathbb{E}(e^{\lambda X_1}) < \infty$ et $L(\lambda) = +\infty$ sinon, et L^* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $L^*(x) = \sup\{x\lambda - L(\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

1. Vérifier que $L(\lambda) \ge \lambda m$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, puis que $L^*(x) = \sup\{x\lambda - L(\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}_+\}$ pour tout $x > m$ et $L^*(x) = \sup\{x\lambda - L(\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}_-\}$ pour tout $x < m$.
2. Montrer que pour tout $\alpha > 0$ et pour tout $n \ge 1$,
$$\mathbb{P}\Big(\frac{X_1+\ldots+X_n}{n} - m \ge \alpha\Big) \le e^{-nL^*(m+\alpha)}.$$
3. En déduire que pour tout $\alpha > 0$ et pour tout $n \ge 1$,
$$\mathbb{P}\Big(\Big|\frac{X_1+\ldots+X_n}{n} - m\Big| \ge \alpha\Big) \le e^{-nL^*(m+\alpha)} + e^{-nL^*(m-\alpha)}.$$

Correction :

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto e^{\lambda x}$ est convexe et l'inégalité de Jensen assure que $\mathbb{E}(e^{\lambda X}) \ge e^{\lambda m}$. Ainsi $L(\lambda) \ge \lambda m$. Soit $x > m$. On a donc $\lambda x - L(\lambda) \le 0$ pour tout $\lambda \le 0$. Or $L(0) = 0$. Donc $L^*(x) \ge 0$ puis $L^*(x) = \sup\{x\lambda - L(\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}_+\}$. On montre de même que si $x < m$ alors $L^*(x) = \sup\{x\lambda - L(\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}_-\}$.

2. On a d'après l'inégalité de Markov, pour tout $\lambda \geq 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}-m\geq\alpha\Big) &= \mathbb{P}(X_1+\ldots+X_n\geq n(\alpha+m))\\ &= \mathbb{P}(e^{\lambda(X_1+\ldots+X_n)}\geq e^{n\lambda(\alpha+m)})\\ &\leq e^{-n\lambda(\alpha+m)}\mathbb{E}(e^{\lambda(X_1+\ldots+X_n)})\\ &= e^{-n\lambda(\alpha+m)}e^{nL(\lambda)}.\end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$\mathbb{P}\Big(\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}-m\geq\alpha\Big)\leq e^{-n\sup\{(\alpha+m)\lambda-L(\lambda):\lambda\in\mathbb{R}_+\}}=e^{-nL^*(m+\alpha)}.$$

3. Comme précedemment, pour tout $\lambda \leq 0$,

$$P\Big(\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}-m\leq-\alpha\Big)\leq e^{-n\lambda(m-\alpha)}e^{nL(\lambda)},$$

puis

$$P\Big(\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}-m\leq-\alpha\Big)\leq e^{-nL^*(m-\alpha)}.$$

On en déduit le résultat.

Exercice 12.10. On se place sur l'espace $(\mathbb{N}^*,\mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$. Le but de l'exercice est de montrer qu'il n'existe pas sur cet espace une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ telle que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

$$\mathbb{P}(n\mathbb{N}^*)=\frac{1}{n},$$

où $n\mathbb{N}^*=\{nk:k\in\mathbb{N}^*\}$. Supposons qu'une telle mesure de probabilité $\mathbb{P}$ existe. On note $(p_k)_{k\geq1}$ la suite des nombres premiers énumérés dans l'ordre croissant.

1. Montrer que $(p_k\mathbb{N}^*)_{k\geq1}$ est une suite d'événements indépendants.
2. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(\limsup(p_k\mathbb{N}^*))$.
3. Décrire l'ensemble $\limsup(p_k\mathbb{N}^*)$ et conclure.

Correction :

1. Soient $p_{i_1}<\ldots<p_{i_k}$, k nombres premiers. On a

$$p_{i_1}\mathbb{N}^*\cap\ldots\cap p_{i_k}\mathbb{N}^*=p_{i_1}\ldots p_{i_k}\mathbb{N}^*.$$

Donc

$$\mathbb{P}\left(p_{i_1}\mathbb{N}^*\cap\ldots\cap p_{i_k}\mathbb{N}^*\right)=\mathbb{P}\left(p_{i_1}\ldots p_{i_k}\mathbb{N}^*\right)=\frac{1}{p_{i_1}\ldots p_{i_k}}=\prod_{j=1}^k\mathbb{P}(p_{i_j}\mathbb{N}^*).$$

Donc la suite $(p_k\mathbb{N}^*)_{k\geq1}$ est une suite d'événements indépendants.

2. On a
$$\sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(p_k\mathbb{N}^*) = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{p_k} = +\infty,$$
donc d'après le lemme de Borel-Cantelli,
$$\mathbb{P}\left(\limsup(p_k\mathbb{N}^*)\right) = 1.$$

3. L'ensemble $\limsup(p_k\mathbb{N}^*)$ est l'ensemble des entiers divisibles par une infinité de nombres premiers donc $\limsup(p_k\mathbb{N}^*) = \varnothing$. Cela contredit $\mathbb{P}\left(\limsup(p_k\mathbb{N}^*)\right) = 1$.

12.3 Physionomie

Exercice 12.11. Qui sont ces charmants messieurs ? Attention cette semaine il y a un intrus !

  

Correction : De gauche à droite, Cantelli (Guido), Borel, Cantelli (le vrai).