12 Indépendance

12.1 Borel-Cantelli

Exercice 12.1. Soit $\alpha > 0$, et soit, sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, $(Z_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi donnée par

$$\mathbb{P}(Z_n = 1) = \frac{1}{n^\alpha} \text{ et } \mathbb{P}(Z_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^\alpha}.$$

Montrer que $Z_n \to 0$ dans $\mathbb{L}^1$ mais que, p.s.,

$$\limsup_{n\to\infty} Z_n = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha \leq 1 \\ 0 & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}.$$

Exercice 12.2 (LFGN cas non intégrable). Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi. On pose, pour tout $n \geq 1$, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.

1. Montrer que
$$\mathbb{E}(|X_1|) \leq 1 + \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(|X_n| \geq n).$$

2. En déduire que si X_1 n'est pas intégrable alors la suite $(n^{-1}S_n)_{n\geq 1}$ diverge p.s.

Exercice 12.3. 1. Soient X et Y deux v.a.i.i.d de loi μ. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.

2. Soit $(X_n, n \geq 0)$ une suite de variables réelles positives et indépendantes, de même loi. Montrer que p.s. $\lim_{n\to\infty} \sum X_i = +\infty$ sauf dans un cas que l'on déterminera.

3. Soit $(X_n, n \geq 0)$ une suite de v.a. réelles indépendantes, de fonction de répartition F. Montrer que presque sûrement,
$$\max(X_1, ..., X_n) \to l \text{ où } l = \sup\{t \in \mathbb{R}, F(t) < 1\}.$$

Exercice 12.4 (Lois exponentielles). Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de v.a. i. i.d. de loi exponentielle de paramètre 1.

1. Montrer que $\limsup_{n\to\infty} X_n/\ln(n) = 1$ p.s.

2. On pose $Z_n = \max(X_1, ..., X_n)/\ln(n)$, montrer que $\liminf_{n\to\infty} Z_n \geq 1$ p.s.

3. Montre que pour une suite $(n_k)_{k\geq 0}$ bien choisie, $\limsup_{k\to\infty} Z_{n_k} \leq 1$ p.s. En déduire que $\lim_{n\to\infty} Z_n = 1$ p.s.

12.2 Exercices d'indépendance.

Exercice 12.5. On définit sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ des variables aléatoires $U_1, \ldots, U_n$ indépendantes et de loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, p\}$.

1. Trouver la loi de $M_n = \max_{1\leq k\leq n} U_k$.

2. Montrer que

$$\frac{\mathbb{E}[M_n]}{p} \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} \frac{n}{n+1}.$$

Exercice 12.6 (Formule de compensation)**.** Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de loi μ et N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendante de la suite $(X_n)_{n\geq 1}$.

1. On suppose que μ est la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$ c'est-à-dire que

$$\mu = p\delta_1 + (1-p)\delta_0,$$

et que N suit la loi de Poisson de paramètre λ c'est-à-dire que

$$\mathbb{P}(N=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

On pose

$$P = \sum_{i=1}^{N} X_i \quad \text{et} \quad F = N - P = \sum_{i=1}^{N}(1-X_i),$$

avec $P = F = 0$ sur $\{N=0\}$. Les variables aléatoires P et F représentent respectivement le nombre de piles et de faces dans un jeu de pile ou face de paramètre p à N lancers.

(a) Déterminer la loi du couple (P,N).

(b) En déduire les lois de P et F et montrer que P et F sont indépendantes.

2. On ne fait plus d'hypothèse sur les lois. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable. Montrer que

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N} f(X_i)\right) = \mathbb{E}(N)\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mu(dx),$$

avec $\sum_{i=1}^{N} f(X_i) = 0$ sur $\{N=0\}$.

Exercice 12.7 (Processus de Poisson)**.** Soit $(X_n, n\geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, de même loi exponentielle de paramètre 1. On pose $T_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$,

$$T_n = X_1 + \ldots + X_n.$$

Pour tout $t \geq 0$, on pose

$$N_t = \max\{n \geq 0 : T_n \leq t\}.$$

1. Soit $n \geq 1$. Calculer la loi du n-uplet $(T_1, \ldots, T_n)$.

2. En déduire la loi de N_t pour tout $t > 0$.

3. Pour $n \geq 1$ et $t > 0$, on définit sur Ω une nouvelle mesure de probabilité $\mathbb{Q}^{n,t}$ par la formule

$$\mathbb{Q}^{n,t}(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap \{N_t = n\})}{\mathbb{P}(N_t = n)},\ A \in \mathcal{A}.$$

Calculer la loi du n-uplet $(T_1, \ldots, T_n)$ sous la mesure de probabilité $\mathbb{Q}^{n,t}$.

Exercice 12.8. On se place sur l'espace $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$. Le but de l'exercice est de montrer qu'il n'existe pas sur cet espace une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\mathbb{P}(n\mathbb{N}^*) = \frac{1}{n},$$

où $n\mathbb{N}^* = \{nk : k \in \mathbb{N}^*\}$. Supposons qu'une telle mesure de probabilité $\mathbb{P}$ existe. On note $(p_k)_{k\geq 1}$ la suite des nombres premiers énumérés dans l'ordre croissant.

1. Montrer que $(p_k\mathbb{N}^*)_{k\geq 1}$ est une suite d'événements indépendants.
2. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(\limsup(p_k\mathbb{N}^*))$.
3. Décrire l'ensemble $\limsup(p_k\mathbb{N}^*)$ et conclure.

12.3 Physionomie

Exercice 12.9. Qui sont ces charmants messieurs ? Attention cette semaine il y a un intrus !