13 Convergences.

Citation de Laplace dans l'introduction de "Théorie des probabilités" :
Les questions les plus importantes de la vie ne sont en effet, pour la plupart, que des problèmes de probabilité.
Je vous présente mes meilleurs voeux pour *2010*.

Les corrections sont partielles et indicatives. N'hésitez pas à utiliser le mail ou passer me voir dans le bureau V2 si vous avez des problèmes. Toutes les remarques (et fautes trouvées) sont les bienvenues pour l'amélioration du TD.

Exercice 13.1 (Image continue)**.** Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles et X une variable aléatoire réelle définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que $X_n \to X$ en loi. Montrer que $f(X_n) \to f(X)$ en loi pour toute fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Exercice 13.2 (Deux petites questions en passant)**.** Répondez et justifiez votre réponse.

1. Soit $(\mu_n)_{n\geq 0}$ une suite de mesures de probabilité et μ une mesure positive. Alors il y a convergence étroite des μ_n vers μ si et seulement si, pour toute fonction f continue à support compact, on a la convergence
$$\int f d\mu_n \longrightarrow \int f d\mu.$$
2. Si la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en loi vers X, alors $\mathbb{E}[X_n] \longrightarrow \mathbb{E}[X]$.

Exercice 13.3 (Lemme de Slutsky)**.** Soient $(X_n)_{n\geq 1}$, $(Y_n)_{n\geq 1}$ deux suites de variables aléatoires réelles, et X, Y deux variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, telles que $X_n \to X$ en loi et $Y_n \to Y$ en loi.

1. On suppose que les variables X_n et Y_n sont indépendantes pour tout $n \geq 1$ et que les variables X et Y sont indépendantes. Montrer que $(X_n, Y_n) \to (X, Y)$ en loi.
2. Est-il toujours vrai que $(X_n, Y_n) \to (X, Y)$ en loi ?
3. **Lemme de Slutsky** On suppose que Y est constante p.s. Montrer que $(X_n, Y_n) \to (X, Y)$ en loi.

Exercice 13.4 (Un théorème de Skorokhod)**.** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles qui convergent en loi vers une variable aléatoire X_0. On note $(F_n)_{n\geq 0}$ les fonctions de répartition associées aux $(X_n)_{n\geq 0}$. On rappelle que l'on note

$$F_i^{-1}(t) = \inf\{x \in \mathbb{R}, F(x) > t\} \text{ l'inverse continu à droite de } F.$$

D'après l'exercice 11.2, si U est une variable aléatoire définie sur un espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ de loi uniforme sur $[0, 1]$ alors la variable aléatoire $\tilde{X}_i := F_i^{-1}(U)$ est égale en loi à X_i.
Montre que la suite de variables aléatoires $(\tilde{X}_i)_{i\geq 1}$ converge presque sûrement vers $\tilde{X}_0$.
Ainsi, quitte à changer les variables aléatoires et l'espace probabilisé sous-jacent (ce qui est un gros changement !), une convergence en loi peut être transformée en une convergence presque sûre.

Exercice 13.5. Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ indépendantes et de même loi μ. On pose $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

1. On suppose que μ est la loi uniforme sur $[0,1]$. Montrer que la suite $(n(1-M_n))_{n\geq 1}$ converge en loi quand $n \to \infty$ et expliciter la loi limite.

2. On suppose que μ est la loi de Cauchy standard c'est-à-dire que $\mu(dx) = (\pi(1+x^2))^{-1}dx$. Montrer que la suite $(nM_n^{-1})_{n\geq 1}$ converge en loi et expliciter la loi limite. Rappel : $\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 13.6 (Problème du collectionneur)**.** Soit $(X_k, k \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées sur $\{1, 2, \ldots, n\}$. Soit

$$T_n = \inf\{m \geq 1 : \{X_1, \ldots, X_m\} = \{1, 2, \ldots, n\}\}$$

le premier temps où toutes les valeurs ont été observées.

1. Soit $\tau_k^n = \inf\{m \geq 1 : |\{X_1, \ldots, X_m\}| = k\}$. Montrer que les variables $(\tau_k^n - \tau_{k-1}^n)_{2\leq k\leq n}$ sont indépendantes, et déterminer leurs lois respectives.

2. En déduire que $T_n/(n \log n) \to 1$ en probabilité.

Exercice 13.7.

1. Soit m une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Pour tout $n \geq 1$, on définit une mesure de probabilité m_n sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ par :

$$m_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} m([k/n, (k+1)/n[)\delta_{k/n}.$$

   Montrer que $(m_n, n \geq 1)$ converge étroitement vers m.

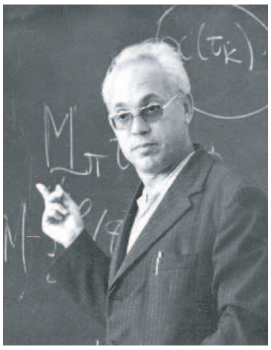
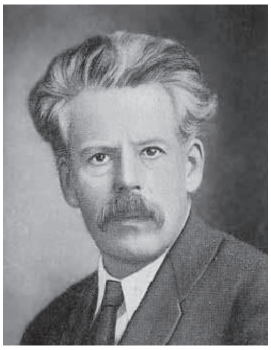
2. En déduire que si $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires, chaque X_n étant de loi géométrique de paramètre $e^{-1/n}$, alors la suite $(X_n/n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire exponentielle de paramètre 1.

Exercice 13.8. Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires constantes, respectivement égales p.s. à $x_n \in \mathbb{R}$, et X une variable aléatoire réelle. Montrer que $X_n \to X$ en loi si et seulement si il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que X est de loi δ_x et $x_n \to x$ quand $n \to \infty$.

Exercice 13.9. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On suppose que Ω est dénombrable et que la tribu $\mathcal{F}$ est $\mathcal{P}(\Omega)$. Montrer que les convergences "presque-sûr" et "en probabilité" sont équivalentes sur cet espace.

13.1 Des images

Exercice 13.10. Qui sont ces charmants messieurs ?


Exercice 13.11 (Remue-ménages (resp. méninges))**.** Trouve les propositions ou les théorèmes associés à chacune de ces flèches (à compléter) :

- Théorème 2.2.1 (Poly)
- Proposition 10.1.2 (deux fois) (Poly)
- Proposition 4.2.3 (Poly)
- Proposition 10.3.1 (Poly)
- Exercice 4.8 (TD 4)
- Exercice 13.4
- Remarque après la proposition 10.3.1 (Poly)