11 Variables aléatoires

Exercice 11.1. Soient X, Y et Z des variables aléatoires réelles définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. On suppose que $X = Y$ p.s. Montrer que X et Y ont la même loi. Montrer que la réciproque est fausse.

2. On suppose que X et Y ont la même loi.

   (a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne. Montrer que les variables aléatoires $f(X)$ et $f(Y)$ ont la même loi.

   (b) Montrer que les variables aléatoires XZ et YZ n'ont pas nécessairement la même loi.

Exercice 11.2 (Simulation de variables aléatoires.)**.** Soient X une variable aléatoire réelle définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et F sa fonction de répartition définie par $F(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

1. Si F est continue et strictement croissante, et si U est une variable uniforme sur $[0, 1]$, quelle est la loi de la variable aléatoire $F^{-1}(U)$?

2. Dans le cas général on définit F^{-1}, l'inverse continu à droite de F par,

$$F^{-1}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} \,:\, F(x) > u\}.$$

   Quelle est la loi de la variable aléatoire $F^{-1}(U)$?

Exercice 11.3 (Problème des moments.)**.** On considère la loi de densité

$$f(x) = \sin(2\pi \ln(x)) \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-\ln(x)^2}{2}\right), x > 0$$

par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$. Calculer les moments de cette loi. Étonnant non ?

Exercice 11.4 (Queues de variables aléatoires)**.** Soit X une variable aléatoire réelle. On définit la *queue* de X

$$\phi_X(x) = \mathbb{P}(|X| > x).$$

1. Si X est intégrable, montrer que
$$\lim_{x\to\infty} x\phi(x) = 0.$$

2. Si X est dans $\mathbb{L}^p$ avec $p \geq 1$, montrer que

$$\lim_{x\to\infty} x^p\phi(x) = 0.$$

3. Donner un équivalent à la queue d'une variable gaussienne standard.

Exercice 11.5 (Variables exponentielles.).

1. On dit qu'une variable aléatoire réelle positive vérifie la propriété d'absence de mémoire si pour tous $s, t > 0$,

   $$\mathbb{P}(X > t + s) = \mathbb{P}(X > t)\mathbb{P}(X > s).$$

   Montrer qu'une variable aléatoire réelle positive X vérifie la propriété d'absence de mémoire si et seulement si X est exponentielle.

2. Soit X une variable aléatoire exponentielle. Calculer la loi de la variable aléatoire $\lfloor X \rfloor$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de X.

Exercice 11.6. Soit F la fonction de répartition d'une mesure de probablitié μ telle que $F(x) \in \{0, 1\}$ pour tout $x \in D$, où D est un ensemble dense de $\mathbb{R}$. Montrer que μ est une mesure de Dirac.

Exercice 11.7.

1. Calculer les fonctions génératrices des lois suivantes :
   (a) Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$.
   (b) Binômiale de paramètres (n, p), avec $n \in \mathbb{N}, p \in [0, 1]$.
   (c) Géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.
   (d) Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
2. Calculer les fonctions caractéristiques des lois suivantes:
   (a) Exponentielle de paramètre $\theta > 0$.
   (b) Uniforme sur $[0, 1]$.

Exercice 11.8. Sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, on considère la variable aléatoire $X : \omega \in \mathbb{R} \mapsto \omega^2$. Déterminer la tribu $\sigma(X)$ engendrée par X.

Exercice 11.9 (Le Singe écrivain). À chaque temps $1, 2, 3, \ldots$ un singe tape une lettre au hasard (indépendantes les unes des autres) sur une machine à écrire qui ne possède que les 26 lettres de l'alphabet. Soit T la variable aléatoire correspondant au premier instant où le singe a écrit "ABRACADABRA".

1. Formaliser ce problème.
2. Montrer que $T < \infty$ p.s.
3. ($\star$) Calculer l'espérance de T.

11.1 Physionomie

Exercice 11.10. 1. ($\star$) Qui sont ces charmants messieurs ?

2. ($\star\star$) Qui est l'inventeur de la loi qui porte son nom ?

3. ($\star\star\star$) Qui est l'inventeur des nombres qui portent son nom ?