9 Mesures signées

Les corrections sont partielles et indicatives. N'hésitez pas à utiliser le mail ou passer me voir dans le bureau V2 si vous avez des problèmes. Toutes les remarques (et fautes trouvées) sont les bienvenues pour l'amélioration du TD.

Exercice 9.1 (Fonctions à variation bornée.)**.** Soit une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

1. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (i) f s'écrit comme une différence de deux fonctions croissantes continues à droite.
   (ii) Il existe une mesure signée μ sur $[a, b]$ telle que $f(x) = \mu([a, x])$ pour tout $x \in [a, b]$.
   (iii) f est continue à droite et à variation bornée c'est-à-dire que f vérifie la condition suivante
   $$\sup_{n\geq 2, a\leq a_1<\ldots<a_n\leq b} \sum_{i=1}^{n-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| < \infty.$$
2. Donner un exemple de fonction continue $[0, 1] \longmapsto \mathbb{R}$ qui ne soit pas à variation bornée.

Correction :

(i)$\Rightarrow$(ii) : On suppose que $f = g - h + f(a)$ avec g et h croissantes, continues à droite et $g(a) = h(a) = 0$. Soit ν_g (resp. ν_h) la mesure de Stieljes associée à g (resp. h). Posons

$$\mu = \nu_g - \nu_h + f(a)\delta_a.$$

Alors μ est une mesure signée sur $[a, b]$ telle que $f(x) = \mu([a, x])$ pour tout $x \in [a, b]$.

(ii)$\Rightarrow$(iii) : Il est évident que f est continue à droite. Soient $n \geq 2$ et $a_1, \ldots, a_n$ vérifiant $a \leq a_1 < \ldots < a_n \leq b$. Alors

$$\sum_{i=1}^{n-1} |f(a_i) - f(a_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n-1} |\mu(]a_{i-1}, a_i])| \leq \sum_{i=1}^{n-1} |\mu|(]a_{i-1}, a_i]) \leq |\mu|([a, b]).$$

Donc f est à variation bornée.

(iii)$\Rightarrow$(i) : Pour tout $x \in [a, b]$, posons

$$V(x) = \sup_{n\geq 2, a\leq a_1<\ldots<a_n\leq x} \sum_{i=1}^{n-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)|.$$

Alors V est croissante. On peut donc définir pour tout $x \in [a, b]$,

$$g(x) = \lim_{y\downarrow x} V(y).$$

Ainsi, g est croissante et continue à droite. Posons $h = g - f$. Alors h est continue à droite. Montrons que h est croissante. Soient $a \leq x < y \leq b$ et $\varepsilon > 0$. Pour tous $n \geq 2$ et $a \leq a_1 < \ldots < a_n \leq x$, on a

$$\begin{aligned}
& V(y+\varepsilon) - f(y+\varepsilon) \\
\geq\ & |f(y+\varepsilon) - f(x)| + \sum_{i=1}^{n-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| + |f(x) - f(a_n)| - f(y+\varepsilon) \\
\geq\ & \sum_{i=1}^{n-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| + |f(x) - f(a_n)| - f(x) \\
\geq\ & V(x) - f(x).
\end{aligned}$$

Donc, $h(y+\varepsilon) \geq h(x)$ puis en faisant tendre ε vers 0 on obtient $h(y) \geq h(x)$.
2. La fonction $f : x \in]0,1] \mapsto x\cos(1/x)$, prolongée par continuité en 0 n'est pas à variation bornée : considérer la subdivision

$$0 < \frac{1}{n\pi} < ... < \frac{1}{3\pi} < \frac{1}{2\pi} < \frac{1}{\pi} < 1.$$

Exercice 9.2 (L'espace $\mathcal{M}(\mathbb{R})$.)**.** Montrer que $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ l'espace des des mesures boréliennes signées sur $\mathbb{R}$ (ou sur tout espace métrique localement compact) est un espace de Banach pour la norme

$$\mu \mapsto |\mu|.$$

Correction : Non corrigé.

Exercice 9.3. ($\star$) Soit (g_n) une suite de fonctions continues positives sur $I = [0,1]$. On note λ la mesure de Lebesgue sur I et μ une mesure positive de Borel sur I telle que

(i) $\lim_n g_n(x) = 0$ λ-p.p.

(ii) $\int_I g_n d\lambda = 1$ pour tout $n \geq 1$.

(iii) $\lim_n \int_I f g_n d\lambda = \int_I f d\mu$ pour tout $f \in \mathcal{C}(I)$.

Peut-on en déduire que μ est étrangère à λ ?

Correction : Non ! Considérer la fonction g_n qui interpole linéairement les points

$$(0,0); (2n^2, \frac{1}{n^3}); (0, \frac{2}{n^3}); (0, \frac{1}{n}); (2n^2, \frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}); (0, \frac{1}{n}+\frac{2}{n^3})...(0, 1-\frac{1}{n}); (2n^2, 1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}); (0, 1-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^3}); (0,1).$$

Alors cette suite de fonctions vérifient les hypothèses avec $\mu = \lambda$.

9.1 Dualité $\mathbb{L}^p$-$\mathbb{L}^q$ (Qu'est-ce à dire ?)

Rappel : *Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace σ-fini, $p \in [1, +\infty[$ et q l'exposant conjugué de p. Alors $\mathbb{L}^q(\mu)$ s'identifie au dual topologique de $\mathbb{L}^p(\mu)$ c'est-à-dire que si Φ est une forme linéaire continue sur $\mathbb{L}^p(\mu)$, il existe une unique fonction $g \in \mathbb{L}^q(\mu)$ telle que pour toute $f \in \mathbb{L}^p(\mu)$,*

$$\Phi(f) = \int_E f g \, d\mu.$$

Exercice 9.4 (Convergence faible). Soit $p \in]1, \infty[$ et q son exposant conjugué, $\Omega \subset \mathbb{R}$ un ouvert de $\mathbb{R}$ et μ la mesure de Lebesgue. Soit (f_n) une suite bornée de $\mathbb{L}^p(\Omega)$ (*i.e.* $(\|f_n\|_p)$ est bornée).

1. Montrer que $\mathbb{L}^q(\Omega)$ est séparable (c'est à dire qu'il contient une partie dénombrable dense).
2. Soit D une partie dénombrable dense de $\mathbb{L}^q(\Omega)$. Montrer qu'il existe une sous-suite $(f_{\varphi(n)})$ telle que pour tout $h \in D$,
$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_{\varphi(n)} h d\mu \text{ existe dans } \mathbb{R}.$$
3. Montrer que pour tout $g \in \mathbb{L}^q(\Omega)$,
$$\phi(g) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_{\varphi(n)} g d\mu \text{ existe dans } \mathbb{R}.$$
4. En déduire qu'il existe $f \in \mathbb{L}^p(\Omega)$ telle que l'on ait *convergence faible* dans $\mathbb{L}^p(\Omega)$ de la suite $(f_{\varphi(n)})$ vers f *i.e.*
$$\forall g \in \mathbb{L}^q(\Omega), \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_{\varphi(n)} g d\mu = \int_\Omega f g d\mu.$$
5. Le résultat précédent substite-t-il pour $p = 1$?

Correction : Non corrigé (fait en TD).

Exercice 9.5. Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini, $p \in [1, +\infty[$ et q l'exposant conjugué de p. Soit $\psi : E \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que pour toute $f \in \mathbb{L}^p(\mu)$ alors $f\psi \in \mathbb{L}^1(\mu)$. Le but de l'exercice est de montrer que $\psi \in \mathbb{L}^q(\mu)$. Pour cela on introduit la forme linéaire sur $\mathbb{L}^p(\mu)$ suivante :
$$\Phi_\psi(f) = \int_E f\psi \, d\mu, \ \ f \in \mathbb{L}^p(\mu).$$

1. On suppose dans cette question que $\Phi_\psi(f) = 0$ pour toute $f \in \mathbb{L}^p(\mu)$. Montrer que $\psi = 0$ μ-p.p.
2. On note $(E_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante de $\mathcal{A}$ telle que $\cup_{n\geq 1} E_n = E$ et $\mu(E_n) < \infty$ pour tout $n \geq 1$. On pose, pour tout $n \geq 1$, $A_n = E_n \cap \{|\psi| \leq n\}$ et
$$\Phi_n : f \in \mathbb{L}^p(\mu) \mapsto \int_E f\psi \mathbb{1}_{A_n} \, d\mu.$$
Montrer que la suite $(\Phi_n)_{n\geq 1}$ est une suite de formes linéaires continues convergeant simplement vers Φ_ψ. En déduire, en utilisant le théorème de Banach-Steinhaus, que Φ_ψ est continue. Et conclure

Remarque : le cas $p = \infty$ est évident. En effet $\mathbb{1}_E \in \mathbb{L}^\infty(\mu)$ donc $\psi\mathbb{1}_E = \psi \in \mathbb{L}^1(\mu)$.

Correction.

1. On note $f_n = \operatorname{sgn}(\psi)\mathbb{1}_{E_n}$. Alors $f_n \in \mathbb{L}^p(\mu)$ et donc

$$\int_E f_n \psi \, d\mu = \int_{E_n} |\psi| \, d\mu = 0.$$

Cela implique que $\psi = 0$ μ-p.p. sur E_n. Or $E = \bigcup_{n\geq 0} E_n$. Ainsi $\psi = 0$ μ-p.p.

2. Il est évident que Φ_n est une forme linéaire. De plus $\psi\mathbb{1}_{A_n} \in \mathbb{L}^q(\mu)$ donc Φ_n est continue (de norme $\|\Phi_n\| \leq \|\psi\mathbb{1}_{A_n}\|_q$). Soit maintenant $f \in \mathbb{L}^p(\mu)$. La suite $(A_n)_{n\geq 1}$ est croissante et $E = \bigcup_{n\geq 0} A_n$ donc $f\psi\mathbb{1}_{A_n} \to f\psi$ μ-p.p. quand $n \to \infty$. De plus $|f\psi\mathbb{1}_{A_n}| \leq |f\psi|$ et $f\psi \in \mathbb{L}^1(\mu)$ donc le théorème de convergence dominée implique que

$$\int_E f\psi\mathbb{1}_{A_n} \, d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_E f\psi \, d\mu,$$

c'est-à-dire que $\Phi_n(f) \to \Phi_\psi(f)$. On a donc montré que $\Phi_n \to \Phi_\psi$ simplement. Cela implique en particulier que pour toute $f \in \mathbb{L}^p(\mu)$,

$$\sup_{n\geq 0} |\Phi_n(f)| < \infty.$$

D'après le théorème de Banach-Steinhaus, on a

$$M := \sup_{n\geq 0} \|\Phi_n\| < \infty.$$

Cela entraîne que pour toute $f \in \mathbb{L}^p(\mu)$,

$$\sup_{n\geq 0} |\Phi_n(f)| \leq M\|f\|_p,$$

puis par passage à la limite,

$$|\Phi_\psi(f)| \leq M\|f\|_p.$$

Ainsi Φ_ψ est continue (de norme $\|\Phi_\psi\| \leq M$).

3. D'après le théorème de dualité (rappelé avant l'énoncé de l'exercice), il existe une fonction $\varphi \in \mathbb{L}^q(\mu)$ telle que pour toute $f \in \mathbb{L}^p(\mu)$,

$$\Phi_\psi(f) = \int_E f\varphi \, d\mu.$$

On en déduit que la fonction $\varphi - \psi$ vérifie les hypothèses de la question 1. Ainsi $\varphi = \psi$ μ-p.p. et donc $\psi \in \mathbb{L}^q(\mu)$. $\square$

Exercice 9.6. Soient $E = \{a, b\}$ et μ la mesure définie sur $\mathcal{P}(E)$ par $\mu(\{a\}) = 1$ et $\mu(\{b\}) = \mu(E) = +\infty$. Caractériser $\mathbb{L}^\infty(\mu)$ et le dual topologique de $\mathbb{L}^1(\mu)$. Conclure.

Correction. On a $\mathbb{L}^\infty = \{f : E \to \mathbb{R}\}$ et $\mathbb{L}^1 = \{f : E \to \mathbb{R} \mid f(b) = 0\}$. Donc le dual topologique de $\mathbb{L}^1$ est $(\mathbb{L}^1)' = \{f \in \mathbb{L}^1 \mapsto \alpha f(a) : \alpha \in \mathbb{R}\}$. On voit ici que l'application $g \in \mathbb{L}^\infty \mapsto \Phi_g \in (\mathbb{L}^1)'$ (où $\Phi_g : f \in \mathbb{L}^1 \mapsto \int_E fg \, d\mu$) est surjective mais pas injective. La mesure μ n'est pas σ-finie et le théorème de dualité (avec $p = 1$ et $q = +\infty$) ne s'applique pas dans ce cas. $\square$

9.2 Physionomie

Exercice 9.7. Qui sont ces charmants messieurs ?

Correction : De droite à gauche, Hans Hahn, Stefan Banach, Hugo Steinhaus.