8 Transformation de Fourier

8.1 Encore un peu de convolution

Exercice 8.1 (Régularisation)**.** Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ avec $K \subset \Omega$. Montrer qu'il existe f une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à valeurs dans $[0,1]$ telle que

$$f = 1 \text{ sur } K, f = 0 \text{ sur } \Omega^c.$$

Exercice 8.2 (Super Hölder)**.**

1. Soient $p, q, r \in [1, \infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$. Soient $f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R})$ et $g \in \mathbb{L}^q(\mathbb{R})$. Montrer que $f * g$ est définie presque partout et que

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Indication :

$$|f(x-y)g(y)| = (|f(x-y)|^p |g(y)|^q)^{\frac{1}{r}} (|f(x-y)^p|)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} (|g(y)|^q)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}$$

2. Soit $f \in \mathbb{L}^1$ et $g \in \mathbb{L}^p$, $p \geq 1$. Montrer que pour tout $|a| < \|f\|_1^{-1}$ l'équation

$$h - af * h = g,$$

possède une unique solution dans $\mathbb{L}^p$.

8.2 Transformation de Fourier

Exercice 8.3 (Premières propriétés)**.** Si $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ on note sa transformée de Fourier

$$\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ixt} dt.$$

1. Montrer que $\hat{f} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.

2. Soient $f, g \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$. Montrer que $\widehat{f * g} = \hat{f}.\hat{g}$.

3. En déduire que $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ n'a pas d'élément neutre pour la convolution (deuxième démonstration de l'année).

Exercice 8.4 (Inversion de Fourier)**.** Soit $H(t) = \dfrac{1}{2\pi} \exp\left(\dfrac{-x^2}{2}\right)$. On rappelle que $\hat{H}(t) = \sqrt{2\pi} H(x)$ (Voir exercice 4.3).

0. Vous souvenez-vous de la démonstration ?

On note $h_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} H(\lambda t) e^{itx} dt$.

1. Calculer h_λ et vérifier que h_λ quand $\lambda \to 0$ est une approximation de la mesure de Dirac.

2. Soit $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$. Montrer que

$$(f * h_\lambda)(x) = \int_{\mathbb{R}} H(\lambda t) \hat{f}(t) e^{ixt} dt.$$

3. Soit $g \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})$ continue au point $x \in \mathbb{R}$. Montrer que
$$\lim_{\lambda \to 0} (g * h_\lambda)(x) = g(x).$$

4. Soit $p \in [1, \infty[$, et $f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R})$. Montrer que
$$\lim_{\lambda \to 0} \|f * h_\lambda - f\|_p = 0.$$

5. Soit $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$, telle que $\hat{f} \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$. Montrer que
$$\text{si } g(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) e^{ixt} dt \text{ alors } 2\pi f(x) = g(x) \mu\text{-p.p.}$$

6. Donner un exemple de fonction $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} \notin \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$.

7. Soit $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f}(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction f est nulle presque partout. C'est-à-dire que l'application $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}) \mapsto \hat{f} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ est injective.

8. ($\star$) L'application $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}) \mapsto \hat{f} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ est-elle surjective ?

Exercice 8.5 (Pavage)**.** On se donne un rectangle $R = [a, b] \times [c, d]$ tel qu'il existe un pavage de R en petits rectangles
$$R = \bigsqcup_{i \geq 0} \underbrace{[a_i, b_i] \times [c_i, d_i]}_{R_i},$$
tels que pour chaque i, au moins l'une des deux longueurs $|b_i - a_i|$ ou $|d_i - c_i|$ soit entière. Montrer alors que l'une des deux longueurs $|b - a|$ ou $|d - c|$ de R est entière.

8.3 Physionomie

Exercice 8.6. Qui sont ces charmants messieurs ?