5 Mesure de Lebesgue

Dans ce qui suit $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la tribu des boréliens de $\mathbb{R}$, λ est la mesure de Borel-Lebesgue et $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ la tribu borélienne complétée pour λ (tribu de Lebesgue).

Exercice 5.1. Soit $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction intégrable pour la mesure de Lebesgue. On suppose que pour tous $a < b$,

$$\int_{]a,b[} f(x)\, \lambda(dx) = 0.$$

Montrer que $f = 0$ λ-p.p.

Exercice 5.2 (Fonction de répartition d'un ensemble)**.** Soit A un ensemble borélien de $\mathbb{R}$ de mesure finie. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \lambda(]-\infty, x] \cap A)$ est continue. La fonction de répartition d'un ensemble est-elle caractéristique de cet ensemble ?

Exercice 5.3 (Dense... mais petit quand même)**.**

1. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe O_ε un ouvert dense de $\mathbb{R}$ de mesure (de Lebesgue) plus petite que ε.
2. En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe F_ε un fermé de $\mathbb{R}$ d'intérieur vide tel que pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,
$$\lambda(A \cap F_\varepsilon) \geq \lambda(A) - \varepsilon.$$

Exercice 5.4 (Ensembles de Cantor)**.** Soit $(d_n, n \geq 0)$ une suite d'éléments de $]0, 1[$, et soit $K_0 = [0, 1]$. On définit une suite $(K_n, n \geq 0)$ de la façon suivante : connaissant K_n, qui est une réunion d'intervalles fermés disjoints, on définit K_{n+1} en retirant dans chacun des intervalles de K_n un intervalle ouvert centré au centre de chaque intervalle, de longueur d_n fois celle de l'intervalle. On pose $K = \bigcap_{n\geq 0} K_n$.

1. Montrer que K est un compact non dénombrable d'intérieur vide dont tous les points sont d'accumulation.
2. Calculer la mesure de Lebesgue de K.

Exercice 5.5 (La escalera del Diablo)**.** On définit une suite de fonctions continues $(f_n)_{n\geq 0})$ de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$

- Pour $x \in [0, 1]$, $f_0(x) = x$.
- La fonction f_1 est la fonction affine par morceaux qui vaut 0 en 0, 1 en 1 et $\frac{1}{2}$ sur $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$.
- On passe de même de f_n f_{n+1} en remplaçant f_n sur chaque intervalle $[u, v]$ où elle n'est pas constante, par la fonction affine par morceaux qui vaut $\frac{f_n(u)+f_n(v)}{2}$ sur $\left[\frac{2u+v}{3}, \frac{2v+u}{3}\right]$.

On note K_3 l'ensemble de Cantor obtenu en posant $d_n = \frac{1}{3}$ pour tout n dans l'exercice précédent.

1. Dessiner f_0, f_1, f_2, f_3 et f_4.
2. Montrer que la suite de fonction converge uniformément vers une fonction $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ continue croissante.

3. Montrer que si $]a,b[\subset K_3^c$ alors f est constante sur $]a,b[$.
4. En déduire que f est presque partout dérivable de dérivée nulle.
5. On note μ_f la mesure de Stieljes associée à f. Que dire de μ_f ? Quel est son support (Exercice du TD1) ?

Exercice 5.6. Trouver deux parties $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ telles que $\lambda(A) = \lambda(B) = 0$ et $A + B = \mathbb{R}$.

On peut se demander s'il existe un ensemble mesurable A de mesure positive, qui est "équitablement réparti" sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire

$$\exists r \in]0,1[, \forall J \textit{ intervalle ouvert}, \lambda(A \cap J) = r\lambda(J).$$

L'exercice suivant donne une réponse à cette question (et même plus !).

Exercice 5.7 (Régularité)**.** Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ de mesure strictement positive.

1. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un intervalle $J =]a,b[$ non trivial tel que
$$\lambda(A \cap J) \geq (1-\varepsilon)\lambda(J).$$
Répondre à la question posée avant l'exercice.
2. En déduire qu'il existe ε tel que
$$[-\varepsilon, \varepsilon] \subset A - A := \{x - y, x \in A, y \in A\}.$$

Exercice 5.8 (Régularité encore)**.** On se donne deux mesures positives boréliennes μ et ν sur $\mathbb{R}$, et on suppose que pour tout choix de $a < b \in \mathbb{R}$

$$\mu(]a,b[) \leq \nu(]a,b[) < \infty.$$

Montrer alors que $\mu(A) \leq \nu(A)$ pour tout borélien A.

Exercice 5.9 (Régularité toujours-Théorème de Lusin)**.** Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction borélienne. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction continue $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\lambda(\{x, f(x) \neq g(x)\}) \leq \varepsilon.$$

Exercice 5.10 (Exemples et contre-exemples)**.** Répondre aux questions suivantes, si la réponse est positive donner une démonstration, si la réponse est négative donner un contre-exemple (c'est comme ça qu'on fait en maths !). On munit $\mathbb{R}$ de la mesure de Lebesgue :

1. Un ouvert de $\mathbb{R}$ de mesure finie est-il borné ?
2. Un borélien de mesure strictement positive est-il d'intérieur non vide ?
3. Un ouvert dense de $[0, 1]$ a-t-il une mesure 1 ?
4. Deux compacts homéomorphes ont-ils même mesure ? L'un peut-il être de mesure nulle et l'autre de mesure positive ?
5. Existe-t-il un borélien A de $\mathbb{R}$ tel que pour tout intervalle ouvert borné non vide I, on ait les inégalités strictes $0 < \lambda(A \cap I) < \lambda(I)$?

Exercice 5.11 ((AC) Ensemble non mesurable)**.** Montrer que tout ensemble mesurable pour la mesure de Lebesgue de mesure strictement positive contient des ensembles non mesurables.

Remarque 1 : La construction de la mesure de Lebesgue ou de toute autre mesure non atomique n'est pas à portée de main. Mais admirez la rapidité avec laquelle la théorie de l'intégration (englobant celle de *Riemann*) se développe une fois l'existence de la mesure de Lebesgue démontrée.

Remarque 2 : (Dualité quand tu nous tiens). Le théorème de Riesz stipule que toute forme linéaire Λ positive sur $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ est représentée par une mesure positive μ_Λ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ $i.e.$

$$\forall f \in \mathcal{C}_c, \Lambda(f) = \int_{\mathbb{R}} f d\mu.$$

Si l'on prend $\Lambda(f) = \int_{\text{Riem}} f$, l'intégrale au sens de Riemann de f (qui est continue !) qu'est ce que μ_Λ ???