3 Intégration de fonctions mesurables

Les corrections sont partielles et indicatives. N'hésitez pas à utiliser le mail ou passer me voir dans le bureau V2 si vous avez des problèmes. Toutes les remarques (et fautes trouvées) sont les bienvenues pour l'amélioration du TD.

Exercice 3.1 (Lebesgue parle)**.** "Je dois payer une certaine somme ; je fouille dans mes poches et j'en sors des pièces et des billets de différentes valeurs. Je les verse à mon créancier dans l'ordre où elles se présentent jusqu'à atteindre le total de ma dette. C'est l'intégrale de *Riemann*. Mais je peux opérer autrement. Ayant sorti tout mon argent, je réunis les billets de même valeur, les pièces semblables, et j'effectue le paiement en donnant ensemble les signes monétaires de même valeur. C'est mon intégrale." *Lebesgue 1901*. Commenter.

Correction : Il n'y a rien à corriger !

Exercice 3.2. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On suppose que $\mu(E) < \infty$ et que f est une fonction complexe intégrable et telle qu'il existe $S \subset \mathbb{C}$ un fermé tel que pour tout $E \in \mathcal{A}$ de mesure strictement positive on ait

$$A_E(f) = \frac{1}{\mu(E)} \int_E f d\mu \in S.$$

Montrer que $f(x) \in S$ pour μ-presque tout x.

Correction : L'ensemble S^c complémentaire de S est une réunion dénombrable de disques fermés, il suffit de donc de prouver que si Δ est un disque fermé de centre α et de rayon r inclu dans le complémentaire de S, on a $\mu(f^{-1}(\Delta)) = 0$. Dans le cas contraire en posant $E = f^{-1}(\Delta)$ on a

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E f d\mu - \alpha \leq \frac{1}{\mu(E)} \int_E |f - \alpha| \leq r.$$

Ce qui est impossible par hypothèse.

Exercice 3.3 (Uniforme continuité de l'intégrale)**.** Soit $f : (E, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction intégrable. Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall A \in \mathcal{A},\ \ \mu(A) < \delta \Rightarrow \int_A |f| \, d\mu < \varepsilon.$$

En déduire que si $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est intégrable pour la mesure de Lebesgue, alors la fonction $F : u \to \int_{[0,u]} f d\lambda$ est uniformément continue.

Correction : Nous exposons ici la correction la plus rapide (rappelons que nous avons présenté deux autres démonstrations, l'une en revenant aux fonctions étagées, l'autre utilisant le lemme de Borel-Cantelli). La fonction f étant intégrable, elle est finie μ-p.p et donc $\mathbb{1}_{\{|f|>n\}} \to 0$ μ-p.p. quand $n \to \infty$. Ainsi, $|f|\mathbb{1}_{\{|f|>n\}} \to 0$ μ-p.p. quand $n \to \infty$ et d'après le théorème de convergence dominée,

$$\int_E |f| \mathbb{1}_{\{|f|>n\}} \, d\mu \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe donc $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$\int_E |f| \mathbb{1}_{\{|f|>n_\varepsilon\}} \, d\mu \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Posons $\delta_\varepsilon = \varepsilon/(2n_\varepsilon)$. Alors, pour $A \in \mathcal{A}$ de mesure $\mu(A) < \delta_\varepsilon$,

$$\int_A |f| d\mu = \int_{A\cap\{|f|>n_\varepsilon\}} |f| d\mu + \int_{A\cap\{|f|\leq n_\varepsilon\}} |f| d\mu \leq \int_E |f| \mathbb{1}_{\{|f|>n_\varepsilon\}} d\mu + n_\varepsilon \mu(A) < \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$. On choisit $\delta > 0$ tel que

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \lambda(A) < \delta \Rightarrow \int_A |f| d\mu < \varepsilon.$$

En particulier, si $0 \leq y - x < \delta$ alors

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_{[x,y]} f d\lambda \right| \leq \int_{[x,y]} |f| d\lambda < \varepsilon.$$

Exercice 3.4 (Un exercice de prépa)**.** Soit $f : (E, \mathcal{A}) \to (\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ une fonction intégrable. Montrer que si $|\int_E f \, d\mu| = \int_E |f| \, d\mu$ alors il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ de module $|\alpha| = 1$ tel que $|f| = \alpha f$ μ-p.p.

Correction. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ de module 1 tel que

$$\left| \int_E f \, d\mu \right| = \alpha \int_E f \, d\mu.$$

Ainsi, $\alpha \int_E f \, d\mu \in \mathbb{R}$ donc

$$\int_E |f| \, d\mu = \left| \int_E f \, d\mu \right| = \alpha \int_E f \, d\mu = \Re\left(\alpha \int_E f \, d\mu \right) = \int_E \Re(\alpha f) \, d\mu.$$

On a donc $\int_E (|f| - \Re(\alpha f)) \, d\mu = 0$. La fonction $|f| - \Re(\alpha f)$ étant positive, on en déduit que $|f| = \Re(\alpha f)$ μ-p.p. Ainsi, $\Im(\alpha f) = 0$ μ-p.p. ce qui implique le résultat.

Exercice 3.5 (Borel-Cantelli)**.** Soient $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction intégrable pour la mesure de Lebesgue et $\alpha > 0$. Montrer que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} n^{-\alpha} f(nx) = 0.$$

Indication : on pourra considérer, pour $\eta > 0$, les ensembles

$$A_{\eta,n} = \{x \in \mathbb{R} : n^{-\alpha}|f(nx)| > \eta\},\ n \geq 1.$$

Correction. Pour $\eta > 0$ et $n \geq 1$, on a

$$A_{\eta,n} = \frac{1}{n} \left\{ y \in \mathbb{R} : n^{-\alpha}|f(y)| > \eta \right\}.$$

D'après l'inégalité de Markov, la mesure de $A_{n,\eta}$ est majorée par

$$\lambda(A_{\eta,n}) = \frac{1}{n}\lambda\left(\{y \in \mathbb{R} : |f(y)| > \eta n^{\alpha}\}\right) \leq \frac{1}{n}\frac{1}{\eta n^{\alpha}}\int_{\mathbb{R}} |f| d\lambda = \frac{1}{n^{\alpha+1}}\frac{1}{\eta}\int_{\mathbb{R}} |f| d\lambda.$$

Ainsi, la série de terme général $\lambda(A_{n,\eta})$ est sommable. D'après le lemme de Borel-Cantelli,

$$\lambda\left(\limsup_{n} A_{\eta,n}\right) = 0.$$

On a donc montré que, pour tout $\eta > 0$, pour λ-presque tout $x \in \mathbb{R}$, $\limsup_{n\to\infty} n^{-\alpha}f(nx) \leq \eta$. Ainsi, pour λ-presque tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\limsup_{n\to\infty} n^{-\alpha}f(nx) \leq 1/p$ ce qui signifie que pour λ-presque tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} n^{-\alpha}f(nx) = 0$.

Exercice 3.6 (Borel-Cantelli bis)**.** Soit $T : (E, \mathcal{A}, \mu) \longrightarrow (E, \mathcal{A}, \mu)$ une application mesurable qui préserve la mesure $i.e.$

$$(\forall A \in \mathcal{A})(\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)).$$

Montrer que si $(A_n)_{n\geq 0}$ est une suite d'ensembles mesurables tels que $\sum \mu(A_n) < \infty$ alors pour presque tout $x \in E$ il existe un rang $N(x)$ tel que pour tout $n \geq N(x)$ $T^n(x)$ n'appartient pas à A_n.

Correction. On considère les ensembles $B_n := \{x, T^n(x) \in A_n\} = T^{-n}(A_n)$. Puisque T préserve la mesure, $\mu(B_n) = \mu(A_n)$ et donc $\sum \mu(B_n) < \infty$. On peut donc appliquer le lemme de Borel-Cantelli et déduire que pour μ-presque tout x, x appartient à un nombre fini de B_n.

Exercice 3.7. Soit $f : (E, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable.

1. Montrer que

$$\int_E |f|\, d\mu < \infty \Leftrightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^n \mu(2^n \leq |f| < 2^{n+1}) < \infty.$$

2. Montrer que si $\mu(E) < \infty$, on a aussi

$$\int_E |f|\, d\mu < \infty \Leftrightarrow \sum_{n\geq 1} \mu(|f| \geq n) < \infty.$$

Que peut-on dire si $\mu(E) = \infty$?

Correction.

1. On a

$$\int_E |f|\, d\mu = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_E |f| \mathbb{1}_{\{2^n \leq |f| < 2^{n+1}\}} d\mu.$$

Et

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^n \mu(\{2^n \leq |f| < 2^{n+1}\}) \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_E |f| \mathbb{1}_{\{2^n \leq |f| < 2^{n+1}\}} d\mu \leq 2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^n \mu(\{2^n \leq |f| < 2^{n+1}\}).$$

On obtient l'équivalence demandée.

2. Si $\mu(E) < \infty$, on a

$$\begin{aligned}
\int_E |f|\,\mu &= \sum_{n\geq 0}\int_E |f|\mathbb{1}_{\{n\leq |f|<n+1\}}d\mu \\
&\leq \sum_{n\geq 0}(n+1)\mu(\{n\leq |f|<n+1\}) \\
&= \sum_{n\geq 0}(n+1)(\mu(\{n\leq |f|\})-\mu(\{n+1\leq |f|\}) \\
&= \mu(E)+\sum_{n\geq 1}\mu(n\leq |f|).
\end{aligned}$$

De même,

$$\int_E |f|\,d\mu \geq \sum_{n\geq 1}\mu(n\leq |f|).$$

On obtient l'équivalence demandée. Dans le cas où $\mu(E)=\infty$, on peut avoir $\sum_{n\geq 1}\mu(n\leq |f|)<\infty$ avec f non intégrable. Considérer par exemple $f=\mathbb{1}_{\mathbb{R}}$ sur $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$.

Théorème de Convergence

Exercice 3.8 (Contre-Exemple)**.** 1. Dans le lemme de Fatou, montrer que si l'on remplace $\liminf$ par $\limsup$, $f_n \geq 0$ par $f_n \leq 0$ et $\geq$ par $\leq$, le théorème reste vrai. Montrer en revanche, à l'aide de contre-exemples, qu'on ne peut se permettre qu'un ou deux changements.

2. Donner un exemple de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ pour lesquelles l'inégalité est stricte dans le lemme de Fatou.

3. Dans le théorème de convergence dominée, vérifier, en donnant des exemples et contre-exemples, que si l'on oublie une hypothèse la conclusion peut rester vraie, ou pas !

4. Reprendre la question précédente avec le théorème de convergence monotone.

5. Soit (f_n) une suite de fonctions positives convergeant μ-pp vers f. Supposons que $\int f_n \longrightarrow c<\infty$. Montrer que $\int f d\mu$ est définie est appartient à $[0,c]$ mais ne vaut pas nécéssairement c.

6. Construire une suite de fonctions continues f_n sur $[0,1]$, avec $0\leq f_n\leq 1$, et telle que

$$\lim \int_0^1 f_n(x)dx = 0,$$

sans toutefois que la suite $(f_n(x))$ ne converge pour un x quelconque de $[0,1]$.

Correction. Il faut choisir entre la bosse glissante, le puits infini ou le stroboscope infernal.

3.1 Applications

Exercice 3.9 (La puissance de la théorie de la mesure)**.** Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions continues sur $[0,1]$, avec $0 \leq f_n \leq 1$ pour tout n, qui converge simplement vers 0. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 0,$$

1. En utilisant un théorème de convergence du cours.
2. En seulement l'existence de la mesure de Lebesgue et la définition de l'intégrale.
3. ($\star$) Et sans utiliser de théorie de la mesure ? (Chocolat en prime).

Correction :

1. C'est une simple application du théorème de convergence dominée.
2. Considérons l'ensemble $A_\varepsilon^n := \{x, f_m(x) \leq \varepsilon, \forall m \geq n\}$. D'après la convergence μ-pp de f on en déduit $\lambda(\bigcup_{n\geq 0} A_\varepsilon^n) = 1$ et comme les A_ε^n sont croissants

   $$\lim_{n\to\infty} \lambda(A_\varepsilon^n) = 1.$$

   On choisit donc n_0 assez grand tel que pour tout $n \geq n_0$, $\lambda(A_\varepsilon^n) \geq 1 - \varepsilon$ et l'on obtient

   $$\int f_n d\lambda = \int_{A_\varepsilon^n} f_n d\lambda + \int_{A_\varepsilon^{n\,c}} f_n d\lambda \leq \varepsilon.(1-\varepsilon) + 1.\varepsilon.$$

Exercice 3.10 (Deuxième couche)**.** On définit sur un espace mesuré $(E, \mathcal{A}, \mu)$ une suite de fonctions mesurables $(f_n)_{n\geq 0}$ et une fonction mesurable f telle que $f_n \to f$ μ-p.p. quand $n \to \infty$. On suppose que

$$\sup_{n\geq 0} \int_E |f_n|\, d\mu < \infty.$$

Montrer que f est intégrable.

Correction. D'après le lemme de Fatou,

$$\int_E |f|\, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E |f_n|\, d\mu \leq \sup_{n\geq 0} \int_E |f_n|\, d\mu < \infty.$$

Exercice 3.11 (Borel-Cantelli encore et toujours)**.** Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite de parties mesurables telles que $\sum \mu(A_n) < \infty$. En considérant la suite de fonctions

$$f_n := \sum_{k=0}^{n} \mathbf{1}_{A_k},$$

démontrer le lemme de Borel Cantelli $i.e.$

$$\mu\left(\bigcap_{n\geq 0} \bigcup_{m\geq n} A_m\right) = 0.$$

Correction : La suite de fonctions mesurables positives $(f_n)_{n\geq 0}$ est croissante, on a d'après le théorème de convergence monotone, si l'on note f la limite simple des f_n

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \mu(A_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k) < \infty.$$

La fonction f est donc intégrable et l'on en déduit que $\mu(\{x, f(x) = \infty\}) = 0$. On conclut en remarquant que

$$\bigcap_{n\geq 0} \bigcup_{m\geq n} A_m = \{x, f(x) = \infty\}.$$

Exercice 3.12 (Borel-Cantelli ++). Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite quelconque de réels et $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels strictement positifs tels que $\sum \sqrt{\alpha_n} < +\infty$.

1. Remontrer rapidement à l'aide de Borel-Cantelli que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\sum \frac{\alpha_n}{|x - a_n|} < +\infty.$$

2. Maintenant que vous êtes fort, montrer que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$

$$\sum \sqrt{\frac{\alpha_n}{|x - a_n|}} < +\infty.$$

Correction. Il suffit de corriger le second point. Pour cela posons $f_n(x) = \frac{\sqrt{\alpha_n}}{\sqrt{|x-a_n|}}$ et $f = \sum f_n$. Pour tout $k \geq 0$ on a par convergence monotone

$$\int_{[-k,k]} f d\lambda = \sum_{n\geq 0} \int_{[-k,k]} f_n d\lambda \leq \sum_{n\geq 0} \sqrt{\alpha_n} C_k,$$

avec $d\lambda$ la mesure de Lebesgue et C_k une constante ne dépendant que de k telle que pour tout $a \in \mathbb{R}$ on ait

$$\int_{[-k,k]} \frac{1}{\sqrt{|x-a|}} d\lambda \leq C_k.$$

Ainsi, par hypothèse sur les $(\alpha_n)_{n\geq 0}$, la fonction f est intégrable donc finie presque partout, ce qui implique le résultat escompté.

Exercice 3.13. Soit $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ une fonction positive, monotone et intégrable. Quelle est la limite de la suite

$$\left(\int_{]0,1[} f\left(x^n\right) \, dx \right)_{n\geq 1} \quad ?$$

Correction. La fonction f étant monotone, elle admet une limite à droite en 0 que nous noterons α ($\alpha \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$).

Premier cas : la fonction f est décroissante et $\alpha < \infty$. Alors la suite de fonctions positives $(f_n)_{n\geq 1}$ définies par

$$f_n(x) = f(x^n), \ x \in]0,1[,$$

est croissante et converge λ-p.p. vers α. Donc d'après le théorème de convergence monotone,

$$\int_{]0,1[} f(x^n)\, dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{]0,1[} \alpha\, d\lambda = \alpha.$$

Deuxième cas : la fonction f est décroissante et $\alpha = \infty$. Alors $(f_n)_{n\geq 1} \uparrow +\infty$ λ-p.p. donc d'après le théorème de convergence monotone,

$$\int_{]0,1[} f(x^n)\, dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Troisième cas : la fonction f est croissante (on a $\alpha < \infty$ dans ce cas). Alors la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et converge λ-p.p. vers α. De plus $f_1 = f$ est intégrable donc

$$\int_{]0,1[} f(x^n)\, dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha.$$

3.2 Physionomie

Exercice 3.14. Qui sont ces charmants messieurs ?

Correction : Mrs Convergence Dominée, Fatou et convergence monotone.