2 Fonctions mesurables

Exercice 2.1. Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions $E \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ mesurables. Montrer que l'ensemble des x où $(f_n(x))_{n\geq 1}$ admet une limite finie est mesurable. (Pensez au critère de Cauchy)

Exercice 2.2 (Théorème d'Egoroff)**.** Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(E) < \infty$. On considère une suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions réelles mesurables sur E et f une fonction réelle mesurable sur E telles que $f_n \to f$ μ-p.p. quand $n \to \infty$.

1. Montrer que pour tout $k \geq 1$ et pour tout $\eta > 0$ il existe $n \geq 1$ tel que
$$\mu\left(\bigcup_{j\geq n}\left\{x \in E : |f_j(x) - f(x)| > \frac{1}{k}\right\}\right) \leq \eta.$$
2. En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathcal{A}$ de mesure $\mu(A) \leq \varepsilon$ tel que $f_n \to f$ uniformément sur $E \setminus A$.
3. Donner un contre-exemple à ce résultat si l'on suppose que $\mu(E) = \infty$.

Exercice 2.3. Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré avec μ non nulle et $f : (E, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble $A \in \mathcal{A}$ de mesure $\mu(A) > 0$ tel que pour tous $x, y \in A$,
$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Exercice 2.4 (Mesurabilité)**.** Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on note $N(y) \in \bar{\mathbb{R}}$ le nombre de solutions de l'équation $f(x) = y$. Montrer que N est une fonction mesurable.

Exercice 2.5 (Tribu réciproque)**.** Soit $f : (E, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une application mesurable.

1. Montrer que $\mathcal{A}_f = \{f^{-1}(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ est une tribu. On l'appelle tribu engendrée par f.
2. Montrer que c'est la plus petite tribu sur E qui rende f mesurable.
3. Montrer que toute fonction $g : E \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable pour $\mathcal{A}_f$, s'écrit $g = h \circ f$ avec $h : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable. (commencer par le cas où g est étagée)
4. Exemple Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ définie par $f(x) = x^2$.
   (a) Montrer que la tribu image-réciproque par f est $\mathcal{A}_f := \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), A = -A\}$.
   (b) Déterminer l'ensemble des fonctions mesurables de $(\mathbb{R}, \mathcal{A}_f)$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Exercice 2.6. Soit $C = C([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, muni de la topologie de la convergence uniforme. On note $\mathcal{C}_1$ la tribu borélienne de C et $\mathcal{C}_2$ la plus petite tribu de C rendant les applications de "projection" $f \mapsto f(x)$ mesurables pour tout x. Deviner la question, et y répondre !

Exercice 2.7 (Théorème de récurrence de Poincaré)**.** Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On suppose que $\mu(E) < \infty$. Soit $f : X \longrightarrow X$ une application mesurable préservant μ $i.e.$

$$\forall A \in \mathcal{A}, \mu(f^{-1}(A)) = \mu(A).$$

Soit A un ensemble mesurable, montrer que pour μ-presque tout point x de A, il existe une infinité de $n \geq 1$ tels que $f^n(x)$ soit dans A.