11 Variables aléatoires

Les corrections sont partielles et indicatives. N'hésitez pas à utiliser le mail ou passer me voir dans le bureau V2 si vous avez des problèmes. Toutes les remarques (et fautes trouvées) sont les bienvenues pour l'amélioration du TD.

Exercice 11.1. Soient X, Y et Z des variables aléatoires réelles définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. On suppose que $X = Y$ p.s. Montrer que X et Y ont la même loi. Montrer que la réciproque est fausse.
2. On suppose que X et Y ont la même loi.
   (a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne. Montrer que les variables aléatoires $f(X)$ et $f(Y)$ ont la même loi.
   (b) Montrer que les variables aléatoires XZ et YZ n'ont pas nécessairement la même loi.

Correction :

1. Si $X = Y$ p.s. alors $\mathbb{E}(f(X)) = \mathbb{E}(f(Y))$ pour toute fonction borélienne $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, ce qui montre que X et Y ont la même loi. La réciproque est fausse. Considérons une variable aléatoire X de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ (c'est-à-dire de densité $\sqrt{2\pi}^{-1} e^{-x^2/2}$ par rapport à la mesure de Lebesgue). Posons $Y = -X$. Alors Y est une variable aléatoire X de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. En effet soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction borélienne. Alors
$$\mathbb{E}(g(Y)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(-x) e^{-x^2/2}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-x^2/2}\, dx.$$
Donc X et Y ont la même loi mais ne sont pas égales p.s.

2. (a) Pour toute fonction borélienne $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, la fonction $g \circ f$ est borélienne. Comme X et Y ont la même loi, on a
$$\mathbb{E}(g \circ f(X)) = \mathbb{E}(g \circ f(Y)),$$
ce qui montre que $f(X)$ et $f(Y)$ ont la même loi.

(2) (b) On reprend les variables X et Y de la question 1. Soit $Z = X$. Alors $XZ = X^2$ et $YZ = -X^2$. La loi de X^2 est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}_+$ (différente de la mesure de Dirac δ_0) et la loi de $-X^2$ est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}_-$ donc XZ et YZ n'ont pas la même loi.

Exercice 11.2. Soit $X_1, ..., X_n, ...$ des v.a. telles que $\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{E}\left[|X_i|\right] < +\infty$. Montrer que $X_1 + ... + X_n$ converge presque sûrement.

Correction : Déjà fait !

Exercice 11.3 (Simulation de variables aléatoires.)**.** Soient X une variable aléatoire réelle définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et F sa fonction de répartition définie par $F(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

1. Si F est continue et strictement croissante, et si U est une variable uniforme sur $[0, 1]$, quelle est la loi de la variable aléatoire $F^{-1}(U)$?
2. Dans le cas général on définit F^{-1}, l'inverse continu à droite de F par,
$$F^{-1}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} \, : \, F(x) > u\}.$$
Quelle est la loi de la variable aléatoire $F^{-1}(U)$?

Correction :

1. Soit $t \in \mathbb{R}$. On a $\{F^{-1}(U) \leq t\} = \{U \leq F(t)\}$. Donc
$$\mathbb{P}(F^{-1}(U) \leq t) = \mathbb{P}(U \leq F(t)) = F(t).$$
Or la fonction de répartition d'une variable aléatoire caractérise sa loi. Ainsi $F^{-1}(U)$ a la même loi que X.
2. Soit $t \in \mathbb{R}$. On a $\{F^{-1}(U) \leq t\} = \bigcap_{n \geq 1} \{U < F(t + 1/n)\}$. Donc
$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(F^{-1}(U) \leq t) \\ = \ &\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \geq 1} \left\{U < F\left(t + \frac{1}{n}\right)\right\}\right) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left(U < F\left(t + \frac{1}{n}\right)\right) = \lim_{n \to \infty} F\left(t + \frac{1}{n}\right) = F(t),\end{aligned}$$
la dernière égalité étant une conséquence de la continuité à droite de F.

Exercice 11.4 (Problème des moments.)**.** On considère la mesure signée de densité
$$f(x) = \sin(2\pi \ln(x)) \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-\ln(x)^2}{2}\right), x > 0$$
par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$. Calculer ses moments. Étonnant non ?

Correction : Soit $n \geq 0$ alors la fonction $x \mapsto x^n \sin(2\pi \ln(x)) \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-\ln(x)^2}{2}\right)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, et le changement de variable $u = \ln(x)$ aboutit à
$$I = \int_0^\infty \sin(2\pi \ln(x)) \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-\ln(x)^2}{2}\right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{-u^2}{2} + nu\right) \sin(2\pi u) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} du.$$
En remarquant que $-u^2/2 + nu = -1/2(u - n/2)^2 + n^2/2$, le changement de variable $v = u - n/2$ donne
$$I = Cste. \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2\pi v) \exp\left(\frac{-v^2}{2}\right) dv = 0.$$
Ainsi pour $\alpha \in [-1; 1]$ les moments des lois $K(2 + \alpha \sin(2\pi \ln(x))) \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-\ln(x)^2}{2}\right)$ avec
$$K^{-1} = \int_0^\infty 2 \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-\ln(x)^2}{2}\right) dx$$
sont égaux sans que ces lois ne soient égales.

Exercice 11.5 (Queues de variables aléatoires)**.** Soit X une variable aléatoire réelle. On définit la *queue* de X

$$\phi_X(x) = \mathbb{P}(|X| > x).$$

1. Si X est intégrable, montrer que
$$\lim_{x\to\infty} x\phi(x) = 0.$$
2. Si X est dans $\mathbb{L}^p$ avec $p \geq 1$, montrer que
$$\lim_{x\to\infty} x^p\phi(x) = 0.$$
3. Donner un équivalent à la queue d'une variable gaussienne standard.

Correction : On a,

$$\mathbb{E}(|X|) = \int_0^\infty \mathbb{P}(|X| \geq x)\, dx.$$

- Donc la fonction $x \mapsto \mathbb{P}(|X| \geq x)$ est intégrable. Elle est de plus décroissante ce qui implique le résultat.

Exercice 11.6 (Variables exponentielles.)**.** 1. On dit qu'une variable aléatoire réelle positive vérifie la propriété d'absence de mémoire si pour tous $s, t > 0$,

$$\mathbb{P}(X > t + s) = \mathbb{P}(X > t)\mathbb{P}(X > s).$$

Montrer qu'une variable aléatoire réelle positive X vérifie la propriété d'absence de mémoire si et seulement si X est exponentielle.

2. Soit X une variable aléatoire exponentielle. Calculer la loi de la variable aléatoire $\lfloor X \rfloor$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de X.

Correction :

1. Si X est exponentielle de paramètre λ alors $\mathbb{P}(X > t) = \int_t^\infty \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda t}$, et la propriété d'absence de mémoire est vérifiée. Si X vérifie la propriété d'absence de mémoire alors la fonction $G : t \mapsto \log(\mathbb{P}(X > t))$ est additive. De plus, $G = \log(1 - F_X)$ est continue à droite, donc G est linéaire. Et $G \leq 0$. Donc il existe $\lambda \geq 0$ tel que $G(t) = -\lambda t$ pour tout $t > 0$, et donc X est exponentielle de paramètre λ.
2. On pose $N = \lfloor X \rfloor$. On a
$$\mathbb{P}(N = k) = \mathbb{P}(X \in [k, k+1[) = \int_k^{k+1} \lambda e^{-\lambda x} dx = (e^{-\lambda k} - e^{-\lambda(k+1)}) = (1 - e^{-\lambda})e^{-\lambda k},$$
ce qui signifie que N suit la loi géométrique de paramètre $e^{-\lambda}$.

Exercice 11.7. Soit F la fonction de répartition d'une mesure de probablitié μ telle que $F(x) \in \{0, 1\}$ pour tout $x \in D$, où D est un ensemble dense de $\mathbb{R}$. Montrer que μ est une mesure de Dirac.

Correction : Par continuité à droite de F on a $F(x) \in \{0, 1\}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On pose

$$a = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) = 1\}.$$

Comme $F(x) \to 1$ quand $x \to +\infty$ on a $a < +\infty$. De même $a > -\infty$. Par continuité à droite de F, on a $F(x) = \mathbb{1}_{[a,+\infty[}$, et donc F est la fonction de répartition de δ_a.

Exercice 11.8.

1. Calculer les fonctions génératrices des lois suivantes :
   (a) Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$.
   (b) Binômiale de paramètres (n, p), avec $n \in \mathbb{N}, p \in [0, 1]$.
   (c) Géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.
   (d) Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
2. Calculer les fonctions caractéristiques des lois suivantes:
   (a) Exponentielle de paramètre $\theta > 0$.
   (b) Uniforme sur $[0, 1]$.

Correction :

1. Soit $s \in [0, 1]$. On a
   (a) $G(s) = 1 - p + ps$,
   (b) $G(s) = (1 - p + ps)^n$,
   (c) $G(s) = \dfrac{1 - p}{1 - sp}$,
   (d) $G(s) = \exp(-\lambda(1 - s))$.
2. Soit $t \in \mathbb{R}$. On a
   (a) $\Phi(t) = \dfrac{\theta}{\theta - it}$,
   (b) $\Phi(t) = \dfrac{\exp(it) - 1}{it}$.

Exercice 11.9. Sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, on considère la variable aléatoire $X : \omega \in \mathbb{R} \mapsto \omega^2$. Déterminer la tribu $\sigma(X)$ engendrée par X.

Correction : Soit $\mathcal{S} = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : B = -B\}$ la tribu des boréliens symétriques. Pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$, $X^{-1}(A) = \{\omega \in \mathbb{R} : \omega^2 \in A\}$ est un borélien symétrique. Donc, $\sigma(X) \subset \mathcal{S}$. Réciproquement, si $S \in \mathcal{S}$ alors $S = (S \cap \mathbb{R}_+) \cup -(S \cap \mathbb{R}_+)$. Donc $\mathcal{S}$ est engendrée par les élements de la forme $[a, b] \cup [-b, -a]$ avec $0 \leq a \leq b$. Comme ces ensembles sont dans $\sigma(X)$, on a $\mathcal{S} \subset \sigma(X)$ puis $\sigma(X) = \mathcal{S}$.

Exercice 11.10 (Le Singe écrivain)**.** À chaque temps $1, 2, 3, \ldots$ un singe tape une lettre au hasard (indépendantes les unes des autres) sur une machine à écrire qui ne possède que les 26 lettres de l'alphabet. Soit T la variable aléatoire correspondant au premier instant où le singe a écrit "ABRACADABRA".

1. Formaliser ce problème.
2. Montrer que $T < \infty$ p.s.
3. ($\star$) Calculer l'espérance de T.

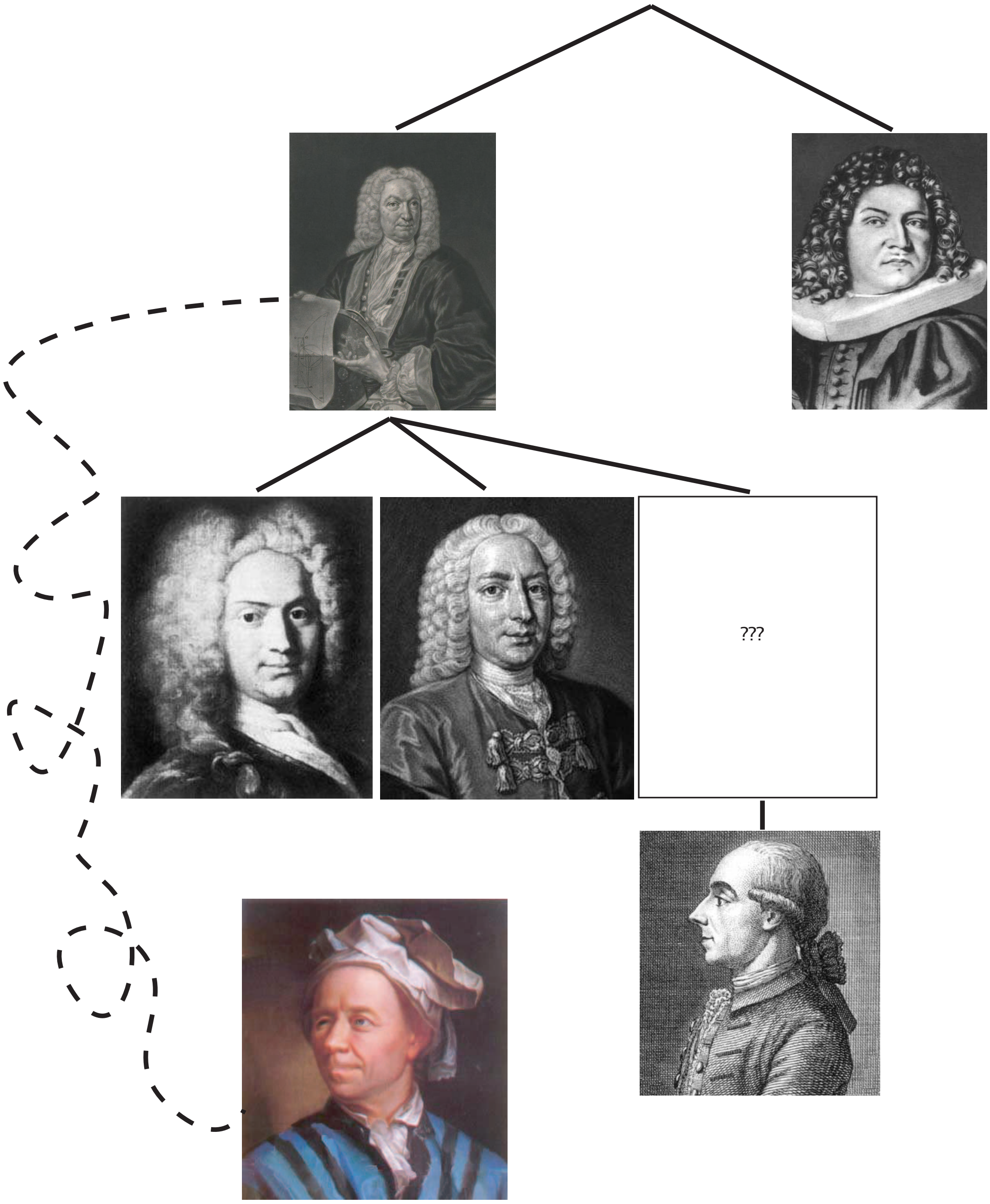
Correction : Non corrigé.

11.1 Physionomie

Exercice 11.11. 1. (⋆) Qui sont ces charmants messieurs ?

2. (⋆⋆) Qui est l'inventeur de la loi qui porte son nom ?

3. (⋆ ⋆ ⋆) Qui est l'inventeur des nombres qui portent son nom ?



Correction : De gauche à droite de Haut en Bas : Jean, Jacques, Nicolas, Daniel, Jean II, Léonard et Jean III. Un seul n'est pas un Bernoulli ! C'est Jacques (en haut à droite) qui a inventé la loi et les nombres de Bernoulli !