1 Tribus, mesures

Exercice 1.1 ($\liminf$ et $\limsup$ de suites d'ensembles mesurables). 1. On considère un ensemble E, et $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite de sous-ensembles de E. Si $A \subseteq E$, on note $\mathbb{1}_A$ sa fonction caractéristique.

(a) Que représentent les ensembles suivants,

$$\bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq n} A_k\ ,\quad \bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} A_k\ ?$$

Le premier est noté $\liminf_{n\to\infty} A_n$, le second $\limsup_{n\to\infty} A_n$. Relier les fonctions caractéristiques $\mathbb{1}_{\liminf_{n\to\infty} A_n}$, $\mathbb{1}_{\limsup_{n\to\infty} A_n}$ aux fonctions $\mathbb{1}_{A_n}$, $n \geq 1$.

(b) On pose pour $p \geq 1$,

$$A_{2p} = \left[-1, 2 + \frac{1}{2p}\right[\text{ et } A_{2p+1} = \left]-2 - \frac{1}{2p+1}, 1\right].$$

Que vaut $\limsup(A_n)$ et $\liminf(A_n)$?

On suppose dans les questions (b) et (c) que $(E, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré (μ est une mesure positive) et que $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$.

(c) Montrer que

$$\mu\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(A_n)\ ,$$

et que si $\mu(\cup_{n\geq 1} A_n) < \infty$, alors

$$\mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) \geq \limsup_{n\to\infty} \mu(A_n)\ .$$

(d) Lemme de Borel-Cantelli. On suppose que $\sum_{n\geq 1} \mu(A_n) < \infty$. Montrer que

$$\mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 0.$$

2. Deux applications du lemme de Borel-Cantelli.

(a) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que pour presque-tout $x \in [0, 1]$ (pour la mesure de Lebesgue), il n'existe qu'un nombre fini de rationnels p/q avec p et q premiers entre eux tels que

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}},$$

i.e. presque tout x est "mal approchable par des rationnels à l'ordre $2 + \varepsilon$".[1]

[1] On pose pour $q \in \mathbb{N}^*$, $A_q := \left\{x \in [0, 1], \exists p \in \mathbb{Z} \text{ avec } x \neq \frac{p}{q} \text{ et } \left|x - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2}\right\}$, que vaut $\limsup_{q\geq 1} A_q$ et $\liminf_{q\geq 1} A_q$?

(b) Soient $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels et $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels strictement positifs. Montrer que si $\sum_{n\geq 1}\sqrt{\alpha_n} < +\infty$, alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ (pour la mesure de Lebesgue),

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\alpha_n}{|x-a_n|} < +\infty.$$

Exercice 1.2 (Opérations sur les tribus)**.**

- Citer le théorème sur l'intersection de tribus.
- Soit $\mathcal{F}$ une tribu de Ω et B un élément de $\mathcal{F}$. Montrer que l'ensemble $\mathcal{F}_B := \{A\cap B, A \in \mathcal{F}\}$ est une tribu de B.
- Soit $(X \times Y, \mathcal{F})$ un espace-produit mesuré et $\pi : X \times Y \longrightarrow X$ la projection canonique. L'ensemble $\mathcal{F}_X := \{\pi(F), F \in \mathcal{F}\}$ est-il une tribu ?
- On considère sur $\mathbb{N}$, pour chaque $n \geq 0$, la tribu $\mathcal{F}_n = \sigma(\{0\}, \{1\}, \dots, \{n\})$. Montrer que la suite de tribus $(\mathcal{F}_n, n \geq 0)$ est croissante mais que $\bigcup_{n\geq 0} \mathcal{F}_n$ n'est pas une tribu.

Exercice 1.3 ("Cardinal" d'une tribu)**.** Le but de l'exercice est de montrer qu'il n'existe pas de tribu $\mathcal{A}$ infinie dénombrable. Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable. On définit, pour tout $x \in E$, l'atome de la tribu $\mathcal{A}$ engendré par x par,

$$\dot{x} = \bigcap_{\{A\in\mathcal{A}\,:\,x\in A\}} A.$$

1. Montrer que les atomes de $\mathcal{A}$ forment une partition de E.
2. Montrer que si $\mathcal{A}$ est au plus dénombrable alors $\mathcal{A}$ contient ses atomes et que chaque élément de $\mathcal{A}$ s'écrit comme une réunion au plus dénombrable d'atomes.
3. Conclure.
4. Donner une nouvelle démonstration de la dernière question de l'exercice 1.2

Exercice 1.4 (Mesure atomique)**.** Soit $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré. Un ensemble $A \in \mathcal{F}$ est un atome pour μ si $0 < \mu(A) < \infty$ et pour tout $B \subset A$ mesurable, $\mu(C) = 0$ ou $\mu(C) = \mu(A)$.

1. Donner un exemple de mesure possédant des atomes.
2. (Pour plus tard) Montrer que la mesure de Lebesgue n'a pas d'atomes.
3. ($\star$) Soit $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré avec $\mu(X) = 1$ et tel que μ n'ait pas d'atomes. Montrer que l'image de μ est $[0, 1]$.

   Une mesure μ est appelée purement atomique s'il existe une collection $\mathcal{C}$ d'atomes de μ telle que si $A \in \mathcal{F}$,

   $$\mu(A) = \sum_{C\in\mathcal{C}} \mu(A \cap C).$$

4. Montrer qu'une mesure sur un ensemble dénombrable est purement atomique.
5. Nous allons maintenant montrer que toute mesure finie se décompose en une mesure atomique et une mesure non-atomique. Soit $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré avec $\mu(X) < \infty$.

(a) Si A et B sont deux atomes de μ on pose $A \simeq B$ si $\mu(A \cap B) = \mu(A)$. Montrer que $\simeq$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{A} := \{$ les atomes de $\mu\}$.

(b) Montrer que si A et B sont deux atomes dans des classes d'équivalences différentes alors $\mu(A \cap B) = 0$.

(c) Soit $(C_i)_{i\in I}$ une collection d'atomes contenant exactement un représentant dans chaque classe d'équivalence pour $\simeq$, et posons pour $A \in \mathcal{F}$

$$\nu(A) = \sum_{i\in I} \mu(A \cap C_i).$$

Montrer que ν ainsi définie est une mesure purement atomique et que $\mu = \nu + \rho$ avec ρ sans atomes.

Exercice 1.5 (Un problème d'additivité).
On note $l^\infty = \{\mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, ||\mathbf{a}||_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n < \infty\}$, l'ensemble des suites réelles bornées.

1. Montrer que $(l^\infty, ||.||_\infty)$ est un espace vectoriel normé complet.

   On admet (théorème de Hahn-Banach) qu'il existe une forme linéaire $F : l^\infty \longrightarrow \mathbb{R}$ continue qui satisfait les deux propriétés suivantes : Soit $\mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty$

   - $F(\mathbf{a}) \leq ||\mathbf{a}||_\infty$,
   - Si $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ existe alors $F(\mathbf{a}) = \alpha$.

2. Soit $A \subset \mathbb{N}$ et $\mathbf{1}_A \in l^\infty$ définie par $\begin{cases} \mathbf{1}_A(n) = 1, \text{ si } n \in A, \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$. Si $\mathrm{P}(A) = F(\mathbf{1}_A)$, montrer que

   - $\mathrm{P}(\varnothing) = 0, \mathrm{P}(\mathbb{N}) = 1$,
   - $\mathrm{P}(A^c) = 1 - \mathrm{P}(A)$,
   - $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$ si $A \cap B = \varnothing$.

3. Montrer que P n'est pas une mesure.

Exercice 1.6 (Un autre problème d'additivité). On considère $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}^*) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie pour $P \subset \mathbb{N}^*$ par

$$\begin{cases} \mu(P) = \displaystyle\sum_{k\in P} \frac{1}{k^2}, \text{ si } P \text{ est finie,} \\ \mu(P) = +\infty, \text{ sinon.} \end{cases}$$

Montrer que μ est finiement additive sur les parties de $\mathbb{N}^*$ mais n'est pas une mesure.

Exercice 1.7 (Espace métrique associé à un espace mesuré). Soit $(E, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré. On suppose que $\mu(E) < +\infty$. Pour $A, B \in \mathcal{F}$ on pose

$$\mathrm{d}(A, B) := \mu(A \Delta B),$$

où Δ est l'opérateur de différence symétrique $A\Delta B = A\backslash B \cup B\backslash A$. On note $\sim$ la relation d'équivalence sur $\mathcal{F}$ définie par $A \sim B \iff \mathrm{d}(A, B) = 0$.

1. Montrer que r est une pseudo-distance.

2. Vérifier que $\sim$ est une relation d'équivalence est que d induit sur l'espace quotient $\mathcal{F}/\sim$ une structure d'espace métrique.

3. Montrer l'espace métrique ainsi définit est complet.

Exercice 1.8 (Mesure sur $\mathbb{Z}$)**.** Existe-t-il une mesure de masse finie sur $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$ invariante par translation ?

Exercice 1.9 (Support)**.** Soit μ une mesure borélienne sur $\mathbb{R}^n$ (ou plus généralement sur un espace métrique séparable localement compact). On pose

$$S := \{x \in \mathbb{R}^n, \mu(\mathrm{B}(x,r)) > 0, \text{ pour tout } r > 0\}.$$

Montrer que S est fermé, que $\mu(\mathbb{R}^n \backslash S) = 0$, et que $\mu(S \backslash F) = \mu(\mathbb{R}^n \backslash F) > 0$ pour tout fermé F strictement contenu dans S. (On appelle S le support de la mesure μ.)

Correction : Soit $x \notin S$, alors par définition il existe un $r_x > 0$ tel que $\mu(B(x, r_x)) = 0$, *a fortiori* pour tout z contenu dans la boule ouverte de centre x et de rayon r_x

$$B(z, r_x - |z - x|) \subset B(x, r_x) \text{ et donc } \mu(B(z, r_x - |z - x|)) = 0,$$

ce qui démontre que $B(x, r_x)$ est incluse dans S^c. L'ensemble F est donc fermé.
On sait que pour tout $x \notin S$, il existe $r_x > 0$ tel que $\mu(B(x, r_x)) = 0$. Si K est un compact inclu dans S^c il existe un recouvrement ouvert

$$K \subset \bigcup_{x \in K} B(x, r_x),$$

duquel on peut extraire un recouvrement fini (Borel-Lebesgue). De plus S^c peut être vu comme une réunion dénombrable de compacts, par exemple

$$S^c = \bigcup_{n,k} \left\{ x : d(x, F) \geq \frac{1}{k}, |x| \leq n \right\},$$

ainsi S^c est une union dénombrable de boules ouvertes $S^c = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B(x_i, r_{x_i})$ et

$$\mu(S^c) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(B(x_i, r_{x_i})) = \sum 0 = 0.$$

Si F est un fermé contenu dans S alors

$$\mathbb{R}^n \backslash F = \mathbb{R}^n \backslash S \sqcup S \backslash F,$$

et chacun de ces ensembles est mesurable, le résultat s'obtient en prenant la mesure de l'égalité.

1.1 Physionomie

Exercice 1.10. Qui sont ces charmants messieurs ?