14 DTD : LGN, TCL

Lois des grands nombres

Exercice 14.1 (Sans calcul)**.** Déterminer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]^n} f\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right)dx_1\ldots dx_n$ pour f une fonction continue sur $[0,1]$,

2. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k(1-p)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$ pour f une fonction continue sur $[0,1]$ et $p\in[0,1]$,

3. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda n}\frac{(\lambda n)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right)$ pour f une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}_+$ et $\lambda>0$.

Exercice 14.2 (Théorème de Bernstein-Weierstrass)**.** Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$. Le n-ième polynôme de Bernstein de f est

$$B_n(x) : x\mapsto \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k x^k(1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

1. Soit $S_n(x) := \frac{\mathrm{Bin}(n,x)}{n}$ où $\mathrm{Bin}(n,x)$ est une v.a. de loi binomiale de paramètre n et x. Montrer que $B_n(x)=\mathbb{E}[f(S_n(x))]$.

2. En déduire le Théorème de Berstein-Weierstrass

$$\|B_n-f\|_\infty \longrightarrow 0.$$

Exercice 14.3 (Loi faible, non forte)**.** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi

$$\mathbb{P}_{X_n}=\frac{1}{2\ln(n+1)n}(\delta_n+\delta_{-n})+\left(1-\frac{1}{n\ln(n+1)}\right)\delta_0.$$

1. Montrer que $Y_n := \frac{X_1+\ldots+X_n}{n}$ converge en probabilité vers 0.

2. Montrer que presque sûrement, Y_n ne converge pas.

Exercice 14.4 (Une LGN avec un goût de TCL)**.** On rappelle que la loi de Cauchy à pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue $f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$, et pour fonction caractéristique

$$\phi(\xi)=\exp(-|\xi|).$$

1. Si X et Y sont deux variables de Cauchy indépendantes. Quelles est la loi de $\frac{X+Y}{2}$?

2. Si $X_1,...,X_n$ sont des vaiid de loi de Cauchy. Quelle est la loi de

$$\frac{X_1+...+X_n}{n}\ ?$$

   Qu'en pensez-vous ?

3. Pour les plus courageux : démontrer à l'aide de la densité de la loi de Cauchy, la forme de la fonction caractéristique.

14.1 Théorème Central Limite

Exercice 14.5. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi telle que $\mathbb{E}(X_1) = 0$ et $\mathbb{E}(X_1^2) = 1$. On pose $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ pour tout $n \geq 1$.

1. Montrer que pour tout $A > 0$, on a
$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq A\right) = 1,$$
et en déduire que
$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = +\infty\right) = 1.$$

2. Justifier que si $(S_{n_k})_{k\geq 1}$ est une suite extraite de $(S_n)_{n\geq 1}$, alors on a :
$$\mathbb{P}\left(\limsup_{k\to\infty} \frac{S_{n_k}}{\sqrt{n_k}} = +\infty\right) = 1.$$

3. En déduire que la suite $(n^{-1/2} S_n)_{n\geq 1}$ ne converge pas en probabilité.

Exercice 14.6 (Formule de Stirling)**.** Question préliminaire : Soit X une variable aléatoire réelle de carré intégrable définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Montrer que, pour tout $a > 0$, on a :
$$\mathbb{E}(|X - \inf(X, a)|) \leq \left(\mathbb{E}(X^2)\mathbb{P}(X \geq a)\right)^{1/2}.$$

Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, de même loi de Poisson de paramètre 1. On pose, pour tout entier $n \geq 1$,
$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \;\text{ et }\; Y_n = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}.$$

On note $x^- = \sup(-x, 0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Pour tout $n \geq 1$, vérifier que S_n suit la loi de Poisson de paramètre n, calculer $\mathbb{E}(Y_n^2)$ et en déduire que pour tout $a > 0$,
$$\mathbb{P}(Y_n^- \geq a) \leq \frac{1}{a^2}.$$

2. Soit Y une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. Montrer que la suite $(Y_n^-)_{n\geq 1}$ converge en loi vers Y^-.

3. Montrer à l'aide de la question préliminaire que
$$\mathbb{E}(Y_n^-) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(Y^-).$$

4. En déduire la formule de Stirling
$$n! \underset{n\to\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

Exercice 14.7 (Sans Calcul)**.** Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}.$$

Exercice 14.8. Soient X une variable aléatoire réelle de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ et ε une variable aléatoire réelle indépendante de X et de loi $\frac{1}{2}\delta_{-1}+\frac{1}{2}\delta_{1}$. On pose $Y=\varepsilon X$.

1. Montrer que Y est de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ et calculer $\mathrm{Cov}(X,Y)$.
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? Le vecteur (X,Y) est-il gaussien ?

Exercice 14.9. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ indépendantes et indentiquement distribuées. Étudier le comportement asymptotique de la suite

$$\left(\frac{X_1+\ldots+X_n-n\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$$

dans les cas suivants :

1. X_1 est de loi $\frac{1}{2}\delta_{(-1,-1)}+\frac{1}{2}\delta_{(1,1)}$,
2. X_1 est de loi $\frac{1}{2}\delta_{(-1,-1)}+\frac{1}{4}\delta_{(1,-1)}+\frac{1}{4}\delta_{(1,1)}$.

Exercice 14.10. Soient $(U_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de loi normale $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ et $\theta\in\mathbb{R}$. On définit la suite $(X_k)_{k\geq 1}$ par $X_1=U_1$ et $X_k=\theta U_{k-1}+U_k$. Montrer que pour tout $n\geq 1$, le vecteur $(X_1,\ldots,X_n)$ est un vecteur gaussien non dégénéré dont on précisera la densité, l'espérance et la matrice de covariance.

Exercice 14.11. Soit $(X_n, n\geq 0)$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ suivant respectivement une loi gaussienne $\mathcal{N}(m_n,\sigma_n^2)$ avec $m_n\in\mathbb{R}$ et $\sigma_n>0$. Montrer que cette suite converge en loi vers une variable réelle Y si et seulement si les deux suites $(m_n, n\geq 0)$ et $(\sigma_n, n\geq 0)$ convergent, et identifier la loi limite.

14.2 Physionomie

Exercice 14.12. Comment sont obtenues ces images ?
(Les deux premières sont dues à V. Beffara)