## 4 Calculs, intégrales à Paramètres

**Exercice 4.1** (Bête de somme). 1. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions $(E, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ intégrables. Montrer que

$$\sum_{n\geq 0} \int_E |f_n|\, d\mu < \infty \;\Rightarrow\; \sum_{n\geq 0} \int_E f_n\, d\mu = \int_E \left( \sum_{n\geq 0} f_n \right) d\mu.$$

2. Calculer les intégrales

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\, dx, \quad \int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{e^x - 1}\, dx.$$

**Exercice 4.2** (Fonction $\Gamma$). Pour tout $t > 0$, on pose

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x}\, dx.$$

1. Montrer que l'on définit ainsi une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. En utilisant la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ définies par

$$f_n : x \in\, ]0, +\infty[\, \mapsto \mathbb{1}_{]0,n[}(x) \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{t-1},$$

montrer la formule d'Euler : pour tout $t > 0$,

$$\Gamma(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^t n!}{t(t+1)\dots(t+n)}.$$

**Exercice 4.3.** En utilisant le théorème de dérivation sous le signe intégrale et l'égalité

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = 1,$$

calculer la transformée de Fourier de la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.
Rappel : La transformée de Fourier de $f$ est donnée par

$$\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x)\, dx.$$

**Exercice 4.4.** Soit $f : ([0, +\infty[, \mathcal{B}([0, +\infty[) \to ([0, +\infty[, \mathcal{B}([0, +\infty[))$ une fonction mesurable.

1. Montrer que l'on définit une fonction continue $F : [0, +\infty[\, \to \mathbb{R}$ par la formule

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{\arctan(xf(t))}{1+t^2}\, dt\,, \quad x \geq 0.$$

2. Calculer la limite de $F(x)$ quand $x \to \infty$.
3. Montrer que $F$ est dérivable sur $]0, +\infty[$.
4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $f$ pour que $F$ soit dérivable en $0$.

**Exercice 4.5.** Justifier l'existence et calculer $\displaystyle\int_0^{\to\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.
**Indication :** Multiplier par $e^{-xt}$ pour $x \geq 0$ et étudier la fonction de $x$ obtenue.

## 4.1 Nouveaux Théorèmes de convergence

Rappel de la propriété d'uniforme continuité de l'intégrale : *Soient* $(E, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré et* $f : E \to \mathbb{R}$ *une fonction intégrable. Alors on a*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall A \in \mathcal{A},\ \ \mu(A) < \delta \Rightarrow \int_A |f|\, d\mu < \varepsilon.$$

Rappel de l'énoncé du lemme de Borel-Cantelli : *Soient* $(E, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré et une suite* $(A_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ *telle que* $\sum_{n\geq 0} \mu(A_n) < \infty$. *Alors on a*

$$\mu\left(\bigcap_{n\geq 0} \bigcup_{k\geq n} A_k\right) = 0.$$

**Exercice 4.6** (Convergence en mesure)**.** Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(E) < \infty$. Soient $(f_n)_{n\geq 1}$ et $f$ des fonctions mesurables de $(E, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On dit que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge en mesure vers $f$ si pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mu\left(\{|f - f_n| > \varepsilon\}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

1. Montrer que si $\int_E |f_n - f| d\mu \to 0$, alors $f_n \to f$ en mesure. Remarquer que la réciproque est fausse.

2. Montrer que si $f_n \to f$ $\mu$-p.p., alors $f_n \to f$ en mesure. Remarquer que la réciproque est fausse.

3. En utilisant le lemme de Borel-Cantelli, montrer que si $f_n \to f$ en mesure, alors on peut extraire une sous-suite de $(f_n)_{n\geq 1}$ qui converge $\mu$-p.p. vers $f$.

4. Un théorème de convergence dominée un peu plus fort. On suppose que $f_n \to f$ en mesure et qu'il existe une fonction $g : E \to \mathbb{R}$ intégrable telle que $|f_n| \leq g$ $\mu$-p.p. pour tout $n \geq 1$.

   (a) Montrer que $|f| \leq g$ $\mu$-p.p.

   (b) En déduire à l'aide de la propriété d'uniforme continuité de l'intégrale que

   $$\int_E |f_n - f| d\mu \to 0.$$

5. L'espace $\mathbb{L}^0(E, \mu)$. On note $\mathbb{L}^0(E, \mu)$ l'ensemble des fonctions mesurables quotienté par la relation d'égalité $\mu$-p.p.

   (a) Montrer que l'on définit une distance sur $\mathbb{L}^0(E, \mu)$ par

   $$\delta(f, g) = \inf\{\varepsilon \geq 0 : \mu(\{|f - g| > \varepsilon\}) \leq \varepsilon\},$$

   et que celle-ci métrise la convergence en mesure.

   (b) En utilisant le lemme de Borel-Cantelli, montrer que $(\mathbb{L}^0(E, \mu), \delta)$ est complet.

(c) Montrer qu'en général, il n'existe pas de distance sur $\mathbb{L}^0(E,\mu)$ qui métrise la convergence $\mu$-p.p.

**Exercice 4.7** (Réciproque au Théorème de convergence dominée)**.** Soit $(E,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré, et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite convergente de fonctions de $\mathbb{L}^1(\mu)$ $i.e.$ il existe $f\in\mathbb{L}^1(\mu)$ avec $\|f_n-f\|_{\mathbb{L}^1}\longrightarrow 0$. Montrer qu'il existe une suite extraite $(f_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ qui convergent $\mu$-pp vers $f$ et telle qu'il existe $h\in\mathbb{L}^1(\mu)$ avec $\mu$-pp

$$\sup_{n\geq 0}|f_{\varphi(n)}|\leq h.$$

**Exercice 4.8** (Théorème de Convergence Dominée Ultime)**.** Soit $(E,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré avec $\mu(E)<\infty$. Un ensemble $\mathcal{F}$ de fonctions intégrables est dit uniformément intégrable si

(i) $\sup\{\int|f|, f\in\mathcal{F}\}<\infty\}$

(ii) $(\forall\varepsilon>0)(\exists\eta>0)(\forall A\in\mathcal{A})(\mu(A)<\eta\Rightarrow(\forall f\in\mathcal{F},\int_A|f|<\varepsilon))$.

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions intégrables, montrer l'équivalence des deux propositions suivantes

$$\int|f_n-f|d\mu\longrightarrow 0 \tag{1}$$

$$f_n\longrightarrow f \text{ en mesure et } \{f_n, n\geq 0\} \text{ est uniformément intégrable.} \tag{2}$$