# 10 Changement de Variables, loi de Variables aléatoires

*Les corrections sont partielles et indicatives. N'hésitez pas à utiliser le mail ou passer me voir dans le bureau V2 si vous avez des problèmes. Toutes les remarques (et fautes trouvées) sont les bienvenues pour l'amélioration du TD.*

**Exercice 10.1** (Formule des compléments.)**.** On note $\Gamma$ la fonction définie pour $x > 0$ par

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt.$$

1. Calculer la mesure image de la mesure
$$x^{a-1} y^{b-1} e^{-(x+y)} \mathbb{1}_{\{x,y \geq 0\}}\, dx\, dy,$$
par l'application $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2 \mapsto (x + y, x/(x + y))$.

2. En déduire la formule des compléments :
$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\, dt.$$

**Exercice 10.2** (Paradoxe de Bertrand)**.** On s'intéresse à la loi d'une corde tirée "au hasard" sur un cercle de rayon 1. Formaliser et calculer cette loi dans les trois cas suivants :

1. On choisit les deux extrémités de la corde au hasard sur le cercle.
2. On choisit le centre de la corde au hasard sur le disque unité.
3. On choisit au hasard la direction du rayon orthogonal à la corde, puis le centre de la corde uniformément sur ce rayon.

**Exercice 10.3.** Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on se donne $(X_1, \ldots, X_n)$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ de loi

$$\mathbb{1}_{[0,1]^n}(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n.$$

1. Construire, à l'aide des évènements $A_\sigma = \{X_{\sigma_1} < \ldots < X_{\sigma_n}\}$ pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, $n$ variables aléatoires $Y_1, \ldots, Y_n$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telles que
$$Y_1(\omega) \leq \ldots \leq Y_n(\omega) \text{ et } \{Y_1(\omega), \ldots, Y_n(\omega)\} = \{X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)\}$$
pour presque tout $\omega \in \Omega$.

2. Déterminer les lois des variables aléatoires $(Y_1, \ldots, Y_n)$ et $(Y_1/Y_2, \ldots, Y_{n-1}/Y_n)$.

**Exercice 10.4.** Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on se donne $(X, Y)$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

1. On suppose que la loi de $(X, Y)$ est
$$\lambda\mu e^{-\lambda x - \mu y}\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^2}(x, y)\, dx\, dy.$$
Déterminer la loi de la variable aléatoire $U = \min(X, Y)$.

2. On suppose que la loi de $(X, Y)$ est
$$\frac{1}{4\pi} e^{-x/2} \mathbb{1}_{\{x\geq 0\}} \mathbb{1}_{[0,2\pi]}(y)\, dx\, dy.$$
Déterminer la loi de la variable aléatoire $(\sqrt{X}\cos(Y), \sqrt{X}\sin(Y))$.

3. On suppose que la loi de $(X, Y)$ est
$$\frac{1}{2\pi}\, e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\, dx\, dy.$$
Calculer la loi de la variable aléatoire réelle $\frac{X}{Y}$.

**Exercice 10.5.** Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on se donne une variable aléatoire $N$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ de loi $(\sqrt{2\pi})^{-1} e^{-x^2/2}\, dx$. Calculer la loi de la variable aléatoire $1/N^2$.

**Exercice 10.6.** On considère une source lumineuse ponctuelle située au point $(-1, 0)$ dans le plan. Soit $\theta$ une variable aléatoire définie sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, uniforme sur $]-\pi/2, \pi/2[$. On suppose que la source émet un rayon lumineux en direction de l'axe des ordonnées en faisant un angle $\theta$ avec l'axe des abscisses. Déterminer la loi de l'ordonnée du point d'impact du rayon avec l'axe des ordonnées.

**Exercice 10.7.** Soit $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ une matrice symétrique définie positive. Calculer l'intégrale
$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\langle Ax|x\rangle} \lambda_d(\, dx),$$
où $\langle\cdot|\cdot\rangle$ désigne le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^d$ et $\lambda_d$ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.

*Rappel :* $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}\, dx = \sqrt{2\pi}$.

**Exercice 10.8** (Théorème de Sard)**.** Soit $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$ où $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On note $S := \{x \in \Omega, \mathrm{Jac}_f(x) = 0\}$. Montrer que $f(S)$ est un borélien de $\mathbb{R}^d$ de mesure de Lebesgue nulle.

## 10.1 Probabilités discrètes

**Exercice 10.9** (Problème des chapeaux.)**.**

1. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités et $A_1, \ldots, A_n$ des événements. Montrer la formule de Poincaré (ou "d'inclusion-exclusion") :
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1\leq j_1<\ldots<j_k\leq n} \mathbb{P}(A_{j_1} \cap \ldots \cap A_{j_k}).$$

2. On considère un groupe de $n$ personnes, chacun possédant un chapeau. On met tous les chapeaux dans un vestiaire sombre, si bien que les personnes en partant viennent l'une après l'autre prendre au hasard un chapeau (la $i$-ième personne prend l'un des $n - i + 1$ chapeaux présents avec la même probabilité).

(a) Quelle est la probabilité pour qu'une personne au moins retrouve son chapeau ? Calculer la limite de cette probabilité quand $n \to \infty$.

(b) Reformuler ce problème en termes de groupe symétrique et retrouver le résultat précédent.

**Exercice 10.10** (Pouvoir paranormal moyen.)**.** On considère l'expérience de divination suivante. On dispose d'un jeu de $52$ cartes distinctes, d'un manipulateur et d'un devin. Le devin ne peut à aucun moment voir le jeu ou le manipulateur, et doit deviner quelle est la carte se trouvant sur le dessus du paquet. Il annonce donc une carte au hasard, et le manipulateur retourne silencieusement les cartes les unes après les autres jusqu'à tomber sur la carte annoncée par le devin. Après quoi ce dernier doit deviner la carte qui suit. Il annonce une carte au hasard parmi les $51$ restantes, et le manipulateur continue de retourner les cartes à partir de l'endroit où il s'était arrêté. Ainsi de suite jusqu'à ce que tout le paquet soit retourné.

1. Donner un espace de probabilité correspondant à cette expérience.

2. Montrer que si $X$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ alors
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(X \geq k).$$

3. Combien de cartes en moyenne le devin trouvera-t-il ?

**Exercice 10.11** (Le fou)**.** Dans un avion les places sont numérotées de $1$ à $n$.

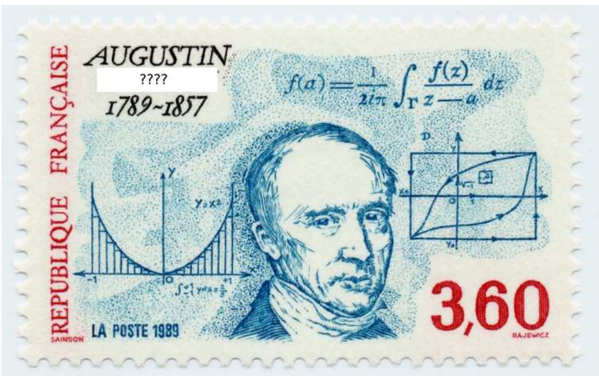
1. Le premier passager arrive et possède normalement la place numéro $1$. Hélas celui-ci est fou et choisit une place aléatoirement uniformément entre $1$ et $n$.

2. Le deuxième passager (raisonné, lui !) arrive, il possède normalement la place numéro $2$. Si celle-ci est occupée (par le fou) il devient lui-même cinglé et choisit une place aléatoirement uniformément dans les places restantes. Ainsi de suite...

Quelle est la probabilité pour que le dernière passager (le $n$-ième) s'asseye à sa place ?

## 10.2 Physionomie

**Exercice 10.12.** Qui sont ces charmants messieurs ?




Il est timbré !