4 Calculs, intégrales à Paramètres

Les corrections sont partielles et indicatives. N'hésitez pas à utiliser le mail ou passer me voir dans le bureau V2 si vous avez des problèmes. Toutes les remarques (et fautes trouvées) sont les bienvenues pour l'amélioration du TD.

Exercice 4.1 (Bête de somme).

1. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions $(E,\mathcal{A}) \to (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ intégrables. Montrer que

$$\sum_{n\geq 0}\int_E |f_n|\,d\mu < \infty \ \Rightarrow\ \sum_{n\geq 0}\int_E f_n\,d\mu = \int_E \left(\sum_{n\geq 0} f_n\right)\,d\mu.$$

2. Calculer les intégrales

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\,dx,\quad \int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{e^x-1}\,dx.$$

Correction.

1. D'après le théorème de convergence monotone, la fonction $\sum_{n\geq 0}|f_n|$ est intégrable. Cela implique que la fonction $\sum_{n\geq 0} f_n$ existe et est intégrable. De plus, pour tout $N\in\mathbb{N}$,

$$\left|\sum_{n=0}^N f_n\right| \leq \sum_{n\geq 0}|f_n| \ \text{ et }\ \sum_{n=0}^N f_n \xrightarrow[N\to\infty]{\text{p.p.}} \sum_{n\geq 0} f_n.$$

D'après le théorème de convergence dominée, on a donc

$$\int_E\left(\sum_{n=0}^N f_n\right)\,d\mu \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \int_E\left(\sum_{n\geq 0} f_n\right)\,d\mu.$$

Par ailleurs, pour tout $N\geq 0$,

$$\int_E\left(\sum_{n=0}^N f_n\right)\,d\mu = \sum_{n=0}^N\int_E f_n\,d\mu.$$

Et $\int_E f_n d\mu$ est le terme général d'une série absolument convergente par hypothèse. En passant à la limite quand $N\to+\infty$ dans l'égalité précédente, on obtient le résultat.

2. Pour tout $x\in]0,1[$, on a

$$\frac{\ln(x)}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n\ln(x).$$

Posons pour tout $n\geq 0$, $f_n : x\in]0,1[\mapsto x^n\ln(x)$. Alors, par une intégration par parties, on obtient,

$$\int_0^1 |f_n(x)|\,dx = -\int_0^1 x^n\ln(x)\,dx = \int_0^1 \frac{x^n}{n+1}\,dx = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Donc $\sum_{n\geq 0}\int_0^1 |f_n(x)|dx < +\infty$. On peut donc appliquer la question 1. et l'on trouve,

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x}\,dx = \int_0^1 \left(\sum_{n\geq 0} x^n \ln(x)\right)\,dx = \sum_{n\geq 0}\int_0^1 x^n\ln(x)\,dx = -\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(n+1)^2} = -\frac{\pi^2}{6}.$$

Pour tout $x>0$, on a

$$\frac{\sin(ax)}{e^x-1} = e^{-x}\frac{\sin(ax)}{1-e^{-x}} = \sum_{n\geq 0} e^{-(n+1)x}\sin(ax).$$

Posons pour tout $n\geq 0$, $f_n : x\in]0,+\infty[\mapsto e^{-(n+1)x}\sin(ax)$. Alors, pour tout $x>0$,

$$\sum_{n\geq 0}|f_n(x)| \leq \sum_{n\geq 0} axe^{-(n+1)x} = \frac{ax}{e^x-1}.$$

On en déduit que la fonction $\sum_{n\geq 0}|f_n|$ est intégrable puis, d'après le théorème de convergence dominée, que la série de terme général $\int_0^\infty |f_n(x)|\,dx$ converge. Ainsi, d'après la question 1.,

$$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{e^x-1}\,dx = \sum_{n\geq 0}\int_0^\infty f_n(x)\,dx.$$

On a,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f_n(x)\,dx = \int_0^\infty \left(e^{-(n+1)x}\frac{e^{iax}-e^{-iax}}{2i}\right)dx &= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{(n+1)x-iax} - \frac{1}{(n+1)x+iax}\right)\\ &= \frac{a}{(n+1)^2+a^2}.\end{aligned}$$

Donc,

$$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{e^x-1}\,dx = \sum_{n\geq 1}\frac{a}{n^2+a^2}.$$

□

Exercice 4.2 (Fonction Γ)**.** Pour tout $t>0$, on pose

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}\,dx.$$

1. Montrer que l'on définit ainsi une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. En utilisant la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ définies par

$$f_n : x\in]0,+\infty[\mapsto \mathbb{1}_{]0,n[}(x)\left(1-\frac{x}{n}\right)^n x^{t-1},$$

montrer la formule d'Euler : pour tout $t>0$,

$$\Gamma(t) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^t n!}{t(t+1)\dots(t+n)}.$$

Correction.

1. Pour tout $t > 0$, la fonction $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto g(t,x) = x^{t-1}e^{-x}$ est intégrable donc Γ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, pour tout $k \geq 1$ et pour tout $x > 0$, g est k-fois dérivable par rapport à t et
$$\frac{\partial^k g(x,t)}{\partial t^k} = (\ln(x))^k x^{t-1}e^{-x}.$$
Pour tous $A > a > 0$, $t \in [a, A]$ et $x > 0$, on a
$$\left|\frac{\partial^k g(x,t)}{\partial t^k}\right| \leq \left|(\ln(x))^k x^{A-1}e^{-x}\right| \mathbb{1}_{\{x\geq 1\}} + \left|(\ln(x))^k x^{a-1}e^{-x}\right| \mathbb{1}_{\{x<1\}},$$
et la fonction $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto |(\ln(x))^k x^{A-1}e^{-x}|\mathbb{1}_{\{x\geq 1\}} + |(\ln(x))^k x^{a-1}e^{-x}|\mathbb{1}_{\{x<1\}} \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}_+^*, \lambda)$. D'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale, Γ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur tout ensemble de la forme $[a, A]$ et ceci pour tout $k \geq 1$. On obtient donc le résultat.

2. On fixe $t > 0$. On voit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge p.p. vers $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x^{t-1}e^{-x}$ et de plus pour tout $x > 0$, $|f_n(x)| \leq x^{t-1}e^{-x}$. Donc, d'après le théorème de convergence dominée, on a
$$\Gamma(t) = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{t-1}\,dx.$$
Or, en posant $u = x/n$, on a
$$\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{t-1}\,dx = n^t \int_0^1 (1-u)^n u^{t-1}\,dt = n^t I_n(t).$$
On montre par une intégration par parties que $I_n(t) = (nI_{n-1}(t+1))/t$ pour tout $n \geq 1$. On en déduit que
$$I_n(t) = \frac{n!}{t(t+1)\ldots(t+n-1)} I_0(t+n) = \frac{n!}{t(t+1)\ldots(t+n-1)(t+n)}.$$

$\square$

Exercice 4.3. En utilisant le théorème de dérivation sous le signe intégrale et l'égalité
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 1,$$
calculer la transformée de Fourier de la fonction
$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$
Rappel : La transformée de Fourier de f est donnée par
$$\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x)\,dx$$

Correction. La transformée de Fourier de f est donnée par

$$\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx.$$

Or

$$\frac{\partial e^{itx} f(x)}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} ixe^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{et} \quad |ixe^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}}| \leq xe^{-\frac{x^2}{2}} \in \mathcal{L}^1.$$

On peut donc dériver sous le signe intégrale puis intégrer par parties pour obtenir

$$\hat{f}'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} ixe^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} te^{-\frac{x^2}{2}} e^{itx}\, dx = -t\hat{f}(t).$$

La fonction $\hat{f}$ est donc solution de l'équation différentielle $\hat{f}' = -t\hat{f}$ avec la condition initiale $\hat{f}(0) = 1$, donc $\hat{f}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ pour tout $t \geq 0$. □

Exercice 4.4. Soit $f : ([0, +\infty[, \mathcal{B}([0, +\infty[) \to ([0, +\infty[, \mathcal{B}([0, +\infty[))$ une fonction mesurable.

1. Montrer que l'on définit une fonction continue $F : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par la formule
$$F(x) = \int_0^\infty \frac{\arctan(xf(t))}{1 + t^2}\, dt\,, \quad x \geq 0.$$
2. Calculer la limite de $F(x)$ quand $x \to \infty$.
3. Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$.
4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que F soit dérivable en 0.

Correction.

1. On pose $g(x, t) = \arctan(xf(t))/(1 + t^2)$ pour $x \geq 0$ et $t \geq 0$. Alors pour tout $t \geq 0$ la fonction $x \mapsto g(x, t)$ est continue. De plus pour tout $x \geq 0$ la fonction $t \mapsto g(x, t)$ est intégrable et $|g(x, t)| \leq \pi/(2(1+t^2))$. Donc d'après le théorème de continuité sous le signe intégrale, la fonction F est continue sur $[0, +\infty[$.

2. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels positifs convergeant vers $+\infty$. Alors $g(x_n, t) \to \pi/(2(1 + t^2))\mathbb{1}_{\{f(t)\neq 0\}}$ pour tout $t \geq 0$. La domination utilisée à la question précédente permet d'utiliser le théorème de convergence dominée et d'obtenir que
$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \int_0^\infty \frac{\pi}{2(1 + t^2)}\, \mathbb{1}_{\{f(t)\neq 0\}}\, dt.$$
Ainsi
$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \int_0^\infty \frac{\pi}{2(1 + t^2)}\, \mathbb{1}_{\{f(t)\neq 0\}}\, dt.$$

3. Pour tout $t \geq 0$ la fonction $x \mapsto g(x,t)$ est dérivable de dérivée

$$\frac{\partial g(x,t)}{\partial x} = \frac{f(t)}{(1+t^2)(1+x^2(f(t))^2)}.$$

Soit $a > 0$. Pour tout $x \geq a$ on a

$$\left|\frac{f(t)}{(1+t^2)(1+x^2(f(t))^2)}\right| \leq \frac{1}{a(1+t^2)}.$$

Donc d'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale, la fonction F est dérivable sur $[a,+\infty[$ et ceci pour tout $a > 0$, elle est donc dérivable sur $]0,+\infty[$.

4. On va montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ si et seulement si la fonction $t \mapsto f(t)/(1+t^2)$ est intégrable. Supposons que la fonction $t \mapsto f(t)/(1+t^2)$ est intégrable. Alors pour tout $x \geq 0$ on a

$$\left|\frac{f(t)}{(1+t^2)(1+x^2(f(t))^2)}\right| \leq \frac{f(t)}{(1+t^2)}.$$

Donc d'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale, la fonction F est dérivable sur $[0,+\infty[$. Supposons maintenant que la fonction $t \mapsto f(t)/(1+t^2)$ n'est pas intégrable. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels positifs convergeant vers 0. Alors pour tout $t \geq 0$,

$$\frac{\arctan(x_n f(t))}{x_n(1+t^2)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{f(t)}{(1+t^2)}.$$

Donc d'après le lemme de fatou,

$$\liminf_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{\arctan(x_n f(t))}{x_n(1+t^2)}\, dt = \infty.$$

Ainsi $F(x_n)/x_n \to \infty$ quand $n \to \infty$. □

Exercice 4.5. Justifier l'existence et calculer $\displaystyle\int_0^{\to\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.
Indication : Multiplier par e^{-xt} pour $x \geq 0$ et étudier la fonction de x obtenue.

Correction : On rappelle la notation

$$\int_0^{\to\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \lim_{T\to\infty} \int_0^T \frac{\sin(t)}{t} dt.$$

En effet, la fonction $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ n'est pas intégrable. Posons pour $x > 0$, $F(x) = \int_0^\infty e^{-xt}\frac{\sin(t)}{t}dt$. La fonction $F(x)$ est bien définie sur $]0,\infty[$ et une application du théorème de dérivation sous l'intégrale montre qu'elle est même $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,\infty[$ et $F'(x) = \int_0^\infty e^{-xt}\sin(t)dt = \frac{-1}{1+x^2}$. La fonction $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est bornée par $M > 0$, ainsi pour tout $x \geq 1$ on a

$$\left|e^{-xt}\frac{\sin(t)}{t}\right| \leq M\exp(-t),$$

et une application du théorème de convergence dominée donne $\lim_{x\to\infty} F(x) = 0$. Puisque $F'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$ on en déduit que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} F(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Il nous faut maintenant montrer que $F(.)$ est continue en 0 (avec $F(0) = \int_0^{\to\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$) et l'on pourra ainsi déduire que $\int_0^{\to\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$. Soit $T > 0$ (très grand), le théorème de convergence dominée montre que

$$\lim_{x\to 0} \int_0^T e^{-xt} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^T \frac{\sin(t)}{t} dt.$$

De plus, des intégrations par parties (on intègre le $\sin$) donnent

$$\left| \int_T^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt \right| \leq \frac{2}{T}$$
$$\left| \int_T^\infty e^{-xt} \frac{\sin(t)}{t} dt \right| \leq \frac{4}{T},$$

ce qui permet bien de dire que la fonction $F(.)$ est continue en 0.

4.1 Nouveaux Théorèmes de convergence

Rappel de la propriété d'uniforme continuité de l'intégrale : *Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Alors on a*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall A \in \mathcal{A},\ \ \mu(A) < \delta \Rightarrow \int_A |f|\, d\mu < \varepsilon.$$

Rappel de l'énoncé du lemme de Borel-Cantelli : *Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et une suite $(A_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum_{n\geq 0} \mu(A_n) < \infty$. Alors on a*

$$\mu\left(\bigcap_{n\geq 0} \bigcup_{k\geq n} A_k \right) = 0.$$

Exercice 4.6 (Problème : convergence en mesure)**.** Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(E) < \infty$. Soient $(f_n)_{n\geq 1}$ et f des fonctions mesurables de $(E, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On dit que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge en mesure vers f si pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mu\left(\{|f - f_n| > \varepsilon\}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

1. Montrer que si $\int_E |f_n - f| d\mu \to 0$, alors $f_n \to f$ en mesure. Remarquer que la réciproque est fausse.

2. Montrer que si $f_n \to f$ μ-p.p., alors $f_n \to f$ en mesure. Remarquer que la réciproque est fausse.

3. En utilisant le lemme de Borel-Cantelli, montrer que si $f_n \to f$ en mesure, alors on peut extraire une sous-suite de $(f_n)_{n\geq 1}$ qui converge μ-p.p. vers f.

4. Un théorème de convergence dominée un peu plus fort. On suppose que $f_n \to f$ en mesure et qu'il existe une fonction $g : E \to \mathbb{R}$ intégrable telle que $|f_n| \leq g$ μ-p.p. pour tout $n \geq 1$.

   (a) Montrer que $|f| \leq g$ μ-p.p.

   (b) En déduire à l'aide de la propriété d'uniforme continuité de l'intégrale que

   $$\int_E |f_n - f| d\mu \to 0.$$

5. L'espace $\mathbb{L}^0(E, \mu)$. On note $\mathbb{L}^0(E, \mu)$ l'ensemble des fonctions mesurables quotienté par la relation d'égalité μ-p.p.

   (a) Montrer que l'on définit une distance sur $\mathbb{L}^0(E, \mu)$ par

   $$\delta(f, g) = \inf\{\varepsilon \geq 0 : \mu(\{|f - g| > \varepsilon\}) \leq \varepsilon\},$$

   et que celle-ci métrise la convergence en mesure.

   (b) En utilisant le lemme de Borel-Cantelli, montrer que $(\mathbb{L}^0(E, \mu), \delta)$ est complet.

   (c) Montrer qu'en général, il n'existe pas de distance sur $\mathbb{L}^0(E, \mu)$ qui métrise la convergence μ-p.p.

Correction.

1. On suppose que $\int_E |f_n - f| \, d\mu \to 0$. Soit $\varepsilon > 0$. D'après l'inégalité de Markov,

   $$\mu(|f_n - f| > \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_E |f_n - f| \, d\mu,$$

   ce qui implique que $\mu(|f_n - f| > \varepsilon) \to 0$. Réciproquement, considérons la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ définie sur $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]))$ par

   $$f_n = n\mathbb{1}_{[0,1/n]}.$$

   Alors $(f_n)_{n\geq 1}$ converge en mesure vers 0. En effet pour tout $n \geq 1$, $\lambda(f_n > 0) = 1/n$. En revanche, pour tout $n \geq 1$, $\int_{[0,1]} f_n(x) \, dx = 1$.

2. On suppose que $f_n \to f$ μ-p.p. Soit $\varepsilon > 0$. Alors,

   $$\mu\left(\bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{m\geq n} \{|f_m - f| > \varepsilon\}\right) = 0.$$

   Or, la suite $(\cup_{m\geq n}\{|f_m - f| > \varepsilon\})_{n\geq 0}$ est décroissante pour l'inclusion et μ est une mesure finie, donc on a,

   $$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{m\geq n} \{|f_m - f| > \varepsilon\}\right) = 0.$$

En particulier, $\lim_{n\to\infty} \mu(\{|f_n - f| > \varepsilon\}) = 0$. Réciproquement, considérons la suite de fonctions $(f_{n,k})_{n\geq 1, 1\leq k\leq n}$ définie sur $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$ par

$$f_{n,k} = \mathbb{1}_{[(k-1)/n, k/n]}.$$

Alors $(f_{n,k})_{n\geq 1, 1\leq k\leq n}$ converge en mesure vers 0. En effet pour tout $n \geq 1$ et tout $1 \leq k \leq n$, $\lambda(f_{n,k} > 0) = 1/n$. En revanche $\limsup f_{n,k} = \mathbb{1}_{[0,1]}$, donc la convergence n'a pas lieu μ-p.p.

3. On peut construire une suite strictement croissante d'entiers $(n_k)_{k\geq 1}$ telle que pour tout $k \geq 1$,
$$\mu\left(|f_{n_k} - f| > \frac{1}{k}\right) \leq 2^{-k}.$$
Alors, d'après le lemme de Borel-Cantelli, pour μ-presque tout x, il existe $k_0(x)$ tel que pour tout $k \geq k_0(x)$, $|f_{n_k}(x) - f(x)| \leq 1/k$. Cela implique que $f_{n_k} \to f$ μ-p.p. quand $k \to \infty$.

4. Première méthode : par l'absurde. On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ et une suite extraite $(f_{n_k})_{k\geq 0}$ telle que pour tout $k \geq 0$,
$$\int_E |f_{n_k} - f| \, d\mu \geq \varepsilon. \tag{1}$$
Or $f_{n_k} \to f$ en mesure quand $k \to \infty$ donc d'après la question 3., on peut extraire une sous-suite $(f_{n_{k_j}})_{j\geq 0}$ de (f_{n_k}) telle que $f_{n_{k_j}} \to f$ μ-p.p. Or $|f_{n_{k_j}}| \leq g$ pour tout $j \geq 0$. Donc d'après le théorème de convergence dominée,
$$\int_E \left|f_{n_{k_j}} - f\right| \, d\mu \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$
Cela contredit l'inégalité (1). Deuxième méthode. Comme suggéré dans l'énoncé.
   (a) Vérifions tout d'abord que $|f| \leq g$ μ-p.p. Pour tout $\varepsilon > 0$, on a
   $$\mu(|f| > g + \varepsilon) \leq \mu(|f| > |f_n| + \varepsilon) \leq \mu(|f - f_n| > \varepsilon).$$
   Donc, $\mu(|f| > g+\varepsilon) = 0$. Ainsi, μ-p.p., pour tout $n \geq 1$, $|f| \leq g + 1/n$ et donc $|f| \leq g$.
   (b) Soit $\varepsilon > 0$. On a
   $$\begin{aligned} \int_E |f_n - f| \, d\mu &= \int_{\{|f_n - f|\leq\varepsilon\}} |f_n - f| \, d\mu + \int_{\{|f_n - f|>\varepsilon\}} |f_n - f| \, d\mu \\ &\leq \varepsilon\mu(E) + 2\int_{\{|f_n - f|>\varepsilon\}} |g| \, d\mu \end{aligned}$$
   La fonction g étant intégrable, on a d'après la propriété d'uniforme continuité de l'intégrale,
   $$2\int_{\{|f_n - f|>\varepsilon\}} |g| \, d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$
   Ainsi, $\limsup_{n\to\infty} \int_E |f_n - f| \, d\mu \leq \varepsilon\mu(E)$ pour tout $\varepsilon > 0$. Donc $\int_E |f_n - f| \, d\mu \to 0$.

(5)(a) Montrons que δ est une distance sur $\mathbb{L}^0(E,\mu)$. Soient $f,g \in \mathbb{L}^0(E,\mu)$. Il est évident que $\delta(f,f) = 0$ et $\delta(f,g) = \delta(g,f)$. Supposons $\delta(f,g) = 0$. Alors pour tout $n \geq 1$, $\mu(|f-g| > 1/n) \leq 1/n$ et la suite $(\{|f-g| > 1/n\})_{n\geq 1}$ est croissante pour l'inclusion donc on a

$$\mu(f \neq g) = \mu\left(\bigcup_{n\geq 1}\{|f-g| > 1/n\}\right) = \lim_{n\to\infty}\mu(|f-g| > 1/n) = 0,$$

i.e. $f = g$ μ-p.p. Soient maintenant $f,g,h \in \mathbb{L}^0(E,\mu)$. Posons $a = \delta(f,g)$ et $b = \delta(g,h)$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\begin{aligned}\mu(|f-h| > a+b+2\varepsilon) &\leq \mu(|f-g|+|g-h| > a+b+2\varepsilon)\\ &\leq \mu(|f-g| > a+\varepsilon) + \mu(|g-h| > b+\varepsilon)\\ &\leq a+b+2\varepsilon.\end{aligned}$$

Cela implique $\delta(f,h) \leq \delta(f,g)+\delta(g,h)$. Vérifions que δ métrise la convergence en mesure. Soient $f \in \mathbb{L}^0(E,\mu)$ et $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathbb{L}^0(E,\mu)$. On suppose tout d'abord que $f_n \to f$ en mesure. Soit $\varepsilon > 0$. Alors, $\mu(|f_n - f| > \varepsilon) \to 0$. Donc, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(|f_n - f| > \varepsilon) \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$. Ainsi, $\delta(f_n, f) \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$ ce qui montre que $\delta(f_n, f) \to 0$. Supposons maintenant que $\delta(f_n, f) \to 0$. Soit $\eta > 0$ fixé. Pour tout $\varepsilon \in]0,\eta]$, il existe n_0 tel que $\mu(|f_n - f| > \varepsilon) \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$. Ainsi, pour tout $n \geq n_0$,

$$\mu(|f_n - f| > \eta) \leq \mu(|f_n - f| > \varepsilon) \leq \varepsilon,$$

ce qui montre que $f_n \to f$ en mesure.

(5)(b) On peut construire une suite extraite $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ telle que $\mu(|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| > 2^{-k}) \leq 2^{-k}$ pour tout $k \geq 1$. Notons

$$A_k = \left\{|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| > 2^{-k}\right\}.$$

Alors $\sum_{k\geq 1}\mu(A_k) < \infty$. Donc, d'après le lemme de Borel-Cantelli, $\mu(\limsup_k A_k) = 0$. Ainsi, la série

$$\sum_{k\geq 1}|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|$$

converge pour μ-presque tout x. Donc la suite $(f_{n_k}(x))_{k\geq 1}$ converge pour μ-presque tout x. On note f sa limite μ-p.p. (on pose $f = 0$ sur l'ensemble de mesure nulle où f n'est pas définie, noter que f est bien définie μ-p.p.). Alors d'après la question 1., $f_{n_k} \to f$ en mesure. Ainsi $\delta(f_{n_k}, f) \to 0$ et donc $\delta(f_n, f) \to 0$.

(5)(c) Supposons qu'il existe une distance d sur $\mathbb{L}^0(E,\mu)$ qui métrise la convergence μ-p.p. D'après la question 1., on peut construire une suite de fonctions mesurables $(f_n)_{n\geq 0}$ sur $(E,\mathcal{A},\mu)$ qui converge en mesure vers 0 mais pas μ-p.p. Ainsi, il existe $\varepsilon > 0$ et une suite extraite $(f_{n_k})_{k\geq 0}$ telle que $d(f_{n_k}, 0) \geq \varepsilon$ pour tout $k \geq 0$. Or $f_{n_k} \to 0$ en mesure. Donc, d'après la question 2., on peut construire une suite extraite $(f_{n_{k_j}})_{j\geq 0}$ qui converge μ-p.p. vers 0. Cela contredit l'inégalité $d(f_{n_{k_j}}, 0) \geq \varepsilon$ pour tout $j \geq 0$. $\square$

Exercice 4.7 (Théorème de Convergence Dominée Ultime)**.** Soit $(E,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré avec $\mu(E) < \infty$. Un ensemble $\mathcal{F}$ de fonctions intégrables est dit uniformément intégrable si

(i) $\sup\{\int |f|, f \in \mathcal{F}\} < \infty\}$

(ii) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \eta > 0)(\forall A \in \mathcal{A})(\mu(A) < \eta \Rightarrow (\forall f \in \mathcal{F}, \int_A |f| < \varepsilon))$.

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions intégrables, montrer l'équivalence des deux propositions suivantes

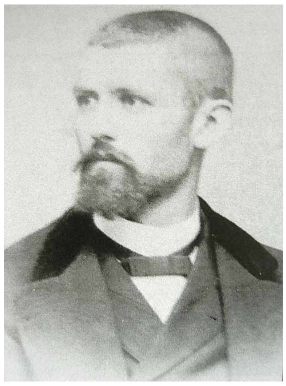
$$\int |f_n - f| d\mu \longrightarrow 0 \tag{2}$$

$$f_n \longrightarrow f \text{ en mesure et } \{f_n, n \geq 0\} \text{ est uniformément intégrable.} \tag{3}$$

Correction : Non corrigé

4.2 Physionomie

Exercice 4.8. Qui sont ces charmants messieurs ?



Correction : Euler, Gauss, borel.