5 Mesure de Lebesgue

Les corrections sont partielles et indicatives. N'hésitez pas à utiliser le mail ou passer me voir dans le bureau V2 si vous avez des problèmes. Toutes les remarques (et fautes trouvées) sont les bienvenues pour l'amélioration du TD.

Dans ce qui suit $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la tribu des boréliens de $\mathbb{R}$, λ est la mesure de Borel-Lebesgue et $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ la tribu borélienne complétée pour λ (tribu de Lebesgue).

Exercice 5.1. Soit $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction intégrable pour la mesure de Lebesgue. On suppose que pour tous $a < b$,

$$\int_{]a,b[} f(x)\,\lambda(dx) = 0.$$

Montrer que $f = 0$ λ-p.p.

Correction : Soient f^+ et f^- respectivement les parties positive et négative de f, et les mesures positives $d\nu_+ = f^+ d\lambda$ et $d\nu_- = f^- d\lambda$. On a, pour tous $a < b$, $\nu_+(]a,b[) = \nu_-(]a,b[)$. Or ν_+ et ν_- sont des mesures boréliennes positives de masse finie, donc le théorème d'unicité des mesures implique $\nu_+ = \nu_-$. Ainsi,

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \int_A f\,d\lambda = 0.$$

En particulier,

$$\int_{\{f>0\}} f\,d\lambda = 0.$$

Or $f\mathbb{1}_{\{f>0\}}$ est une fonction positive donc $f\mathbb{1}_{\{f>0\}} = 0$ λ-p.p. De même, $f\mathbb{1}_{\{f<0\}} = 0$ λ-p.p. Donc $f = 0$ λ-p.p.

Exercice 5.2 (Fonction de répartition d'un ensemble)**.** Soit A un ensemble borélien de $\mathbb{R}$ de mesure finie. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \lambda(]-\infty, x] \cap A)$ est continue.

Correction : Elle est 1-Lipschitzienne ! Si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ alors

$$|f(x) - f(y)| \le \lambda([x,y] \cap A) \le |x-y|.$$

Exercice 5.3 (Dense... mais petit quand même)**.**

1. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe O_ε un ouvert dense de $\mathbb{R}$ de mesure (de Lebesgue) plus petite que ε.
2. En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe F_ε un fermé de $\mathbb{R}$ d'intérieur vide tel que pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,
$$\lambda(A \cap F_\varepsilon) \ge \lambda(A) - \varepsilon.$$

Correction :

1. Soit $\varepsilon > 0$. Notons $\mathbb{Q} = \{q_n, n \ge 1\}$ les rationnels et posons
$$O_\varepsilon = \bigcup_{n\ge1} \left]q_n - \varepsilon 2^{-n-1}, q_n + \varepsilon 2^{-n-1}\right[.$$

Alors O_ε est un ouvert dense de $\mathbb{R}$. De plus,

$$\lambda(O_\varepsilon) \leq \sum_{n\geq 1} \lambda\left(\left]q_n - \varepsilon 2^{-n-1}, q_n + \varepsilon 2^{-n-1}\right[\right) = \sum_{n\geq 1} 2^{-n}\varepsilon = \varepsilon.$$

2. Posons $F_\varepsilon = O_\varepsilon^c$. Alors F_ε est un fermé de $\mathbb{R}$ d'intérieur vide. De plus, pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a
$$\lambda(A) = \lambda(A\cap F_\varepsilon) + \lambda(A \cap O_\varepsilon) \leq \lambda(A\cap F_\varepsilon) + \lambda(O_\varepsilon) \leq \lambda(A\cap F_\varepsilon) + \varepsilon.$$

Exercice 5.4 (Ensembles de Cantor)**.** Soit $(d_n, n \geq 0)$ une suite d'éléments de $]0,1[$, et soit $K_0 = [0,1]$. On définit une suite $(K_n, n \geq 0)$ de la façon suivante : connaissant K_n, qui est une réunion d'intervalles fermés disjoints, on définit K_{n+1} en retirant dans chacun des intervalles de K_n un intervalle ouvert centré au centre de chaque intervalle, de longueur d_n fois celle de l'intervalle. On pose $K = \bigcap_{n\geq 0} K_n$.

1. Montrer que K est un compact non dénombrable d'intérieur vide dont tous les points sont d'accumulation.

2. Calculer la mesure de Lebesgue de K.

Correction :

1. Chaque ensemble K_n est fermé donc K est fermé. De plus, $K \subset [0,1]$ donc K est compact. Montrons que l'on peut construire une bijection $\varphi : K \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Si x est dans K, alors x est dans un des deux intervalles composant K_1. On pose $\varphi(x)_0 = 0$ si x est dans l'intervalle de gauche et $\varphi(x)_0 = 1$ si x est dans l'intervalle de droite. En répétant ce procédé, on construit une suite $\varphi(x) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. On vérifie facilement que φ est une bijection. Ainsi, K n'est pas dénombrable. Par construction de φ, pour tous $x, y \in K$ et $n \geq 0$, x et y sont dans le même intervalle composant K_{n+1} si et seulement si $\varphi(x)_k = \varphi(y)_k$ pour tout $k \leq n$. Supposons qu'il existe un intervalle I de $[0,1]$ inclus dans K et non réduit à un point. Soient $x, y \in I$ tels que $x \neq y$. Alors, pour tout $n \geq 0$, x et y sont dans le même intervalle composant K_n donc $\varphi(x) = \varphi(y)$ ce qui est absurde. Ainsi, K est d'intérieur vide. Enfin, soit $x \in K$. L'ensemble $\{y \in K : \varphi(y)_k = \varphi(x)_k \ \forall k \leq n\}$ est infini et est constitué de points de K tous à distance au plus $1/2^{n+1}$ de x. Donc x est un point d'accumulation.

2. On montre par récurrence que $\lambda(K_n) = (1-d_0)\dots(1-d_{n-1})$. Or $\lambda([0,1]) = 1$ donc $\lambda(K) = \lim_{n\to\infty} \lambda(K_n)$. On a donc:
$$\sum_{n\geq 0} d_n < \infty \quad \Rightarrow \quad \lambda(K) = \prod_{n\geq 0}(1-d_n),$$
$$\sum_{n\geq 0} d_n = \infty \quad \Rightarrow \quad \lambda(K) = 0.$$

Exercice 5.5 (La escalera del Diablo)**.** On définit une suite de fonctions continues $(f_n)_{n\geq 0})$ de $[0,1]$ dans $[0,1]$

- Pour $x \in [0,1]$, $f_0(x) = x$.

- La fonction f_1 est la fonction affine par morceaux qui vaut 0 en 0, 1 en 1 et $\frac{1}{2}$ sur $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$.
- On passe de même de f_n f_{n+1} en remplaçant f_n sur chaque intervalle $[u, v]$ où elle n'est pas constante, par la fonction affine par morceaux qui vaut $\frac{f_n(u)+f_n(v)}{2}$ sur $\left[\frac{2u+v}{3}, \frac{2v+u}{3}\right]$.

On note K_3 l'ensemble de Cantor obtenu en posant $d_n = \frac{1}{3}$ pour tout n dans l'exercice précédent.

1. Dessiner f_0, f_1, f_2, f_3 et f_4.
2. Montrer que la suite de fonction converge uniformément vers une fonction $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ continue croissante.
3. Montrer que si $]a, b[\subset K_3^c$ alors f est constante sur $]a, b[$.
4. En déduire que f est presque partout dérivable de dérivée nulle.
5. On note μ_f la mesure de Stieljes associée à f. Que dire de μ_f ? Quel est son support (Exercice du TD1) ?

Correction : On note $K_{n,3}$ les ensembles K_n obtenus dans l'exercice précédent avec $(d_i)_{i\geq 0} = \frac{1}{3}$.

1. Je vous laisse juger de vos talents artistiques.
2. On vérifie que $\|f_n - f_{n+1}\| \leq \frac{1}{2^n}$. Donc la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy pour la norme $\|\|_\infty$. Par complétude de $(\mathcal{C}([0, 1],\ \mathbb{R}), \|\|_\infty)$ il existe une fonction f continue telle que $f_n \longrightarrow f$ au sens de $\|\|_\infty$. La fonction f est croissante comme limite de fonctions croissantes.
3. Il est clair que si $]a, b[\subset K_{n,3}^c$ alors f est constante sur $]a, b[$. On en déduit le résultat.
4. La fonction f est constante sur chaque composante connexe de l'ouvert K^c donc f est dérivable de dérivée nulle sur K^c. Or $\lambda(K) = 0$. Ainsi f est dérivable de dérivée nulle λ-p.p.
5. De plus, la fonction f est continue et croissante, on peut donc considérer sa mesure de Stieljes *df*. Comme f est continue, *df* n'a pas d'atome. Et f est constante sur chaque composante connexe de l'ouvert K^c donc *df* est portée par K, *df* est donc singulière par rapport à λ.

Exercice 5.6. Trouver deux parties $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ telles que $\lambda(A) = \lambda(B) = 0$ et $A + B = \mathbb{R}$.

Correction : On pose

$$A_1 := \{x \in [0, 1[\text{ dont le développement dyadique a tous ses coefficients d'indice pair nuls}\},$$

$$B_1 := \{x \in [0, 1[\text{ dont le développement dyadique a tous ses coefficients d'indice impair nuls}\}.$$

Alors A_1 et B_1 sont boréliens et

$$\lambda(A_1) \leq \frac{1}{2^n} \text{ pour tout } n \geq 0.$$

Donc $\lambda(A_1) = 0$ et similairement $\lambda(B_1) = 0$ et de plus $[0,1[\subset A_1 + B_1$. Les ensembles $A = \sum_{k\in\ \mathbb{Z}} A_1 + k$ et $B = \sum_{k\in\mathbb{Z}} B_1 + k$ répondent à la question.

On peut se demander s'il existe un ensemble mesurable A de mesure positive, qui est "équitablement réparti" sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire

$$\exists r \in]0,1[, \forall J \textit{ intervalle ouvert}, \lambda(A \cap J) = r\lambda(J).$$

L'exercice suivant donne une réponse à cette question (et même plus !).

Exercice 5.7 (Régularité)**.** Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ de mesure strictement positive.

1. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un intervalle $J =]a,b[$ non trivial tel que

$$\lambda(A \cap J) \geq (1-\varepsilon)\lambda(J).$$

   Répondre à la question posée avant l'exercice.

2. En déduire qu'il existe ε tel que

$$[-\varepsilon,\varepsilon] \subset A - A := \{x - y, x \in A, y \in A\}.$$

Correction :

1. On peut supposer que $\lambda(A) < \infty$ et que $\varepsilon < 1$. Puisque la mesure de Lebesgue est régulière, on peut trouver un ouvert $O = \bigcup_{n\geq 0}]a_n, b_n[$ tel que $A \subset O$ et $\lambda(O) \leq \frac{\lambda(A)}{1-\varepsilon}$. Puisque $\lambda(A) \leq \sum_{n\geq 0} \lambda(A\cap]a_n, b_n[)$, il existe n_0 tel que

$$(1-\varepsilon)\lambda(]a_n, b_n[) \leq \lambda(A\cap]a_n, b_n[).$$

2. Soit J un intervalle ouvert tel que $\lambda(A\cap J) \geq \frac{3}{4}\lambda(J)$. Si $|x| < \frac{\lambda(J)}{2}$ alors les deux ensembles $(A \cap J)$ et $(A \cap J) + x$ ne sont pas disjoints car

$$\lambda(((A \cap J) \cup (A \cap J) + x) \cap (J \cup J + x)) \geq \frac{3}{2}\lambda(J) < \lambda(J \cup J + x).$$

   On peut donc écrire tout $|x| < \frac{\lambda(J)}{2}$ comme différence de deux termes de A. On voit ainsi que pour certains intervalles ouverts, l'ensemble A est très "dense". Ainsi, les seuls ensembles mesurables "équitablement répartis" sur $\mathbb{R}$ sont de densité nulle ou 1.

Exercice 5.8 (Régularité encore)**.** On se donne deux mesures positives boréliennes μ et ν sur $\mathbb{R}$, et on suppose que pour tout choix de $a < b \in \mathbb{R}$

$$\mu(]a,b[) \leq \nu(]a,b[) < \infty.$$

Montrer alors que $\mu(A) \leq \nu(A)$ pour tout borélien A.

Correction : L'hypothèse entraine facilement que pour tout ouvert $O \subset \mathbb{R}$ $\mu(O) \leq \nu(O)$. On conclut par régularité des mesures μ et ν qui sont des mesures de Radon sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5.9 (Régularité toujours-Théorème de Lusin)**.** Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction borélienne. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction continue $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\lambda(\{x, f(x) \neq g(x)\}) \leq \varepsilon.$$

Correction : Commençons par le cas où $f = \mathbf{1}_A$ avec A borélien de $[0,1]$. Par régularité de la mesure de Lebesgue, il existe un fermé F et un ouvert O tels que

$$F \subset A \subset O \text{ et } \lambda(O \backslash F) \leq \varepsilon.$$

Il existe alors une fonction continue à valeur dans $[0,1]$ qui vaut 1 sur F et 0 en dehors de O, en effet $\mathrm{d}(F, O^c) = \eta > 0$ par compacité et on vérifie que la fonction

$$f_{F,O} : x \mapsto \sup\left(\left(1 - \frac{\mathrm{d}(x,F)}{\eta}\right), 0\right),$$

vérifie bien les conditions requises. Donc la fonction $f_{F,O}$ est continue et

$$\lambda(\{x, f(x) \neq f_{F,O}(x)\}) \leq \lambda(O \backslash F) \leq \varepsilon.$$

Dans le cas général, on peut supposer que $0 \leq f \leq 1$ et on définit par récurrence

- $f_1 = \frac{1}{2}\mathbf{1}_{f \geq 1/2}$
- $f_2 = \frac{1}{4}\mathbf{1}_{(f-f_1) \geq 1/4}$
- $f_3 = \frac{1}{8}\mathbf{1}_{(f-f_1-f_2) \geq 1/8}$
- ...

Ainsi $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ et pour tout n, $2^n f_n$ est une fonction indicatrice d'un borélien de $[0,1]$. D'après les résultats précédents pour chaque $n \geq 1$, il existe une fonction $0 \leq h_n \leq 1$ continue telle que $\lambda(x, h_n(x) \neq 2^n f_n(x)) \leq \varepsilon 2^{-n}$. La fonction continue $h = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} h_n$ répond alors à la question.

Exercice 5.10 (Exemples et contre-exemples)**.** Répondre aux questions suivantes, si la réponse est positive donner une démonstration, si la réponse est négative donner un contre-exemple (c'est comme ça qu'on fait en maths !). On munit $\mathbb{R}$ de la mesure de Lebesgue :

1. Un ouvert de $\mathbb{R}$ de mesure finie est-il borné ?
2. Un borélien de mesure strictement positive est-il d'intérieur non vide ?
3. Un ouvert dense de $[0,1]$ a-t-il une mesure 1 ?
4. Deux compacts homéomorphes ont-ils même mesure ? L'un peut-il être de mesure nulle et l'autre de mesure positive ?
5. ($\star$) Existe-t-il un borélien A de $\mathbb{R}$ tel que pour tout intervalle ouvert borné non vide I, on ait les inégalités strictes $0 < \lambda(A \cap I) < \lambda(I)$?

Correction :

1. Non, par exemple $O = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]n - 1/2^n, n + 1/2^n[$.
2. Non, voir exercice **??**.
3. Non, voir exercice **??**.
4. Non (facile). Oui, les espaces de Cantor sont tous homéomorphes, et certains sont de mesure nulle, d'autres non.
5. Oui... Mais comparer avec l'exercice **??**

Pour les curieux

Exercice 5.11 (($\star$)(AC) Ensemble non mesurable)**.** Montrer que tout ensemble mesurable pour la mesure de Lebesgue de mesure strictement positive contient des ensembles non mesurables.

Correction : Soit A un lebesguien de mesure strictement positive, que l'on peut supposer borné,*i.e.* il existe $m > 0$ tel que $A \subset [-m, m]$. On définit une relation d'équivalence sur les couples de A

$$\forall (x, y) \in A^2, x \simeq y \iff \exists q \in \mathbb{Q}, x - y = q.$$

On choisit (axiome du choix) une partie de $P \subset A$ contenant exactement un représentant dans chaque classe d'équivalence pour $\simeq$. Supposons que la partie P est mesurable, alors les inclusions

$$A \subset \bigsqcup_{q\in[-m,m]} P + q \subset [-2m; 2m]$$

aboutissent à une contraction.

Exercice 5.12 (($\star$)(AC) Ensemble non mesurable bis)**.** On suppose que l'on a une partie $B \subset [0, 1]$ telle que pour tout fermé F non dénombrable de $[0, 1]$ alors $B \cap F \neq \varnothing$ et $B^c \cap F \neq \varnothing$.

1. Montrer qu'une telle partie B est non mesurable pour la mesure de Lebesgue.
2. Construisons une telle partie:
   (a) Montrer qu'un fermé de $[0, 1]$ qui n'est pas dénombrable est nécéssairement équipotent à $\mathbb{R}$. (C'est l'hypothèse du continu pour les fermés de $\mathbb{R}$).
   (b) Montrer que l'ensemble des fermés de $[0, 1]$ est équipotent à $\mathbb{R}$.
   (c) Construisez un ensemble B en utilisant une récurrence trans-finie.

Correction :

1. Soit B une partie vérifiant les hypothèses de l'exercice, on peut supposer quitte à prendre son complémentaire que $\lambda(B) > 0$. Par régularité de la mesure de Lebesgue il existe un fermé F inclus dans B de mesure strictement positive. Remarquez qu'un tel fermé est nécéssairement non dénombrable sinon il serait de mesure nulle, on obtient alors une contraction car $F \cap B^c = \varnothing$.

2. (a) C'est une conséquence du théorème de Cantor-Bendixon.

   `http://en.wikipedia.org/wiki/Perfect_set_property`

   (b) Un fermé est la donnée de son ouvert complémentaire. Il s'agit de voir qu'il n'y a qu'un nombre équipotent à $\mathbb{R}$ d'ouverts de $[0,1]$. Pour cela on montre que tout ouvert peut être écrit comme réunion dénombrable de boules centrées en des rationnels de $[0,1]$ avec des rayons rationnels.

   (c) On indexe les fermés non dénombrables de $[0,1]$ par les ordinaux plus petits que γ où γ est l'ordinal équipotent à $\mathbb{R}$. On construit alors B par induction trans-finie, de chaque fermé F_α, $\alpha \leq \gamma$ on choisit deux éléments différents et différents des précédents que l'on mettra l'un dans B l'autre dans son complémentaire.

Remarque 1 : La construction de la mesure de Lebesgue ou de toute autre mesure non atomique n'est pas à portée de main. Mais admirez la rapidité avec laquelle la théorie de l'intégration (englobant celle de *Riemann*) se développe une fois l'existence de la mesure de Lebesgue démontrée.

Remarque 2 : (Dualité quand tu nous tiens). Le théorème de Riesz stipule que toute forme linéaire Λ positive sur $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ est représentée par une mesure positive μ_Λ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *i.e.*

$$\forall f \in \mathcal{C}_c, \Lambda(f) = \int_{\mathbb{R}} f d\mu.$$

Si l'on prend $\Lambda(f) = \int_{\text{Riem}} f$, l'intégrale au sens de Riemann de f (qui est continue !) qu'est ce que μ_Λ ???

5.1 Physionomie

Exercice 5.13. Qui sont ces charmants messieurs ?



Correction : Lebesgue, Cantor, Radon.