6 Espaces $\mathbb{L}^p$

Exercice 6.1. (Identification de la limite)

1. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de $\mathbb{L}^p(E,\mathcal{A},\mu)\cap\mathbb{L}^q(E,\mathcal{A},\mu)$ avec $p,q\in[1,+\infty[$ et $p\neq q$. On suppose que $f_n\to 0$ dans $\mathbb{L}^p$ quand $n\to\infty$ et que $(f_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{L}^q$. Montrer que $f_n\to 0$ dans $\mathbb{L}^q$ quand $n\to\infty$.

2. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de $\mathbb{L}^p(E,\mathcal{A},\mu)$ qui converge dans $\mathbb{L}^p$ vers f et qui converge également μ-p.p. vers g. Montrer que $g\in\mathbb{L}^p$ et que $f=g$ μ-p.p.

Exercice 6.2 (Convexité)**.** Soit f une fonction mesurable sur $(E,\mathcal{A},\mu)$, avec $\|f\|_\infty>0$. Pour $0<p<+\infty$, on pose

$$\varphi(p):=\int_E |f|^p d\mu,\ \text{et } I:=\left\{p\in\mathbb{R}_+^*:\varphi(p)<\infty\right\}.$$

1. Montrer que I est un intervalle. Est-il fermé ? ouvert ?

2. Montrer que $\ln\circ\varphi$ est convexe sur I et que φ est continue sur I.

Exercice 6.3 (Réciproque au Théorème de convergence dominée)**.** Soit $(E,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré, et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite convergente de fonctions de $\mathbb{L}^1(\mu)$ *i.e.* il existe $f\in\mathbb{L}^1(\mu)$ avec $\|f_n-f\|_{\mathbb{L}^1}\longrightarrow 0$. Montrer qu'il existe une suite extraite $(f_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ qui converge μ-p.p. vers f et telle qu'il existe $h\in\mathbb{L}^1(\mu)$ avec

$$\sup_{n\geq 0}|f_{\varphi(n)}|\leq h,\ \mu\text{-p.p.}$$

Indication : Calquer la démonstration de la complétude des espaces $\mathbb{L}^p$.

Exercice 6.4 (Un semblant d'uniforme intégrabilité)**.** Soit $(E,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(E)<\infty$. On considère une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ bornée de $\mathbb{L}^p(E,\mathcal{A},\mu)$, $p\in[1,\infty[$ et une fonction mesurable f sur $(E,\mathcal{A},\mu)$ telles que $f_n\to f$ μ-p.p. quand $n\to\infty$.

1. Montrer que $f\in\mathbb{L}^p(E,\mathcal{A},\mu)$.

2. Montrer en utilisant le théorème d'Egoroff (à rappeler) que $f_n\to f$ dans $\mathbb{L}^r$ quand $n\to\infty$ pour tout $r\in[1,p[$.

3. Que se passe-t-il pour $p=\infty$???

Exercice 6.5 (Continuité de l'opérateur de translation)**.** Soient $h\in\mathbb{R}$ et $f:(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))\to(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable. On définit $\tau_h f$ par

$$\tau_h f(x)=f(x-h),\ \ x\in\mathbb{R}.$$

1. Vérifier que l'opérateur de translation τ_h est une isométrie de l'espace $\mathbb{L}^p(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ pour $p\in[1,+\infty]$.

2. On suppose $p < \infty$. Montrer que si $f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ alors,

$$\lim_{h \to 0} \|\tau_h f - f\|_p = 0,$$

$$\lim_{|h| \to +\infty} \|\tau_h f - f\|_p = 2^{1/p} \|f\|_p.$$

Indication : on pourra traiter tout d'abord le cas où f est continue à support compact.

3. Que deviennent les résultats de la question (2) si $p = \infty$?

4. Déduire des questions prédentes que si $\lambda(A) > 0$, alors

$$\exists \varepsilon > 0, [-\varepsilon, \varepsilon] \subset A - A = \{x - y : x, y \in A\}, \text{(Deuxième démonstration de l'année).}$$

Exercice 6.6. 1. Soient $p \in [1, +\infty[$ et $f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \lambda)$. On pose $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$. Montrer que F est bien définie et que si q est l'exposant conjugué de p, alors

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sup_{x \in \mathbb{R}} |F(x+h) - F(x)|}{|h|^{1/q}} = 0.$$

2. En déduire que si g est une fonction sur $\mathbb{R}_+$ de classe $\mathcal{C}^1$ intégrable telle que $g' \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}_+)$ pour un $p \in [1, +\infty[$, alors $g(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 6.7 (CS)**.** Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : E \to]0, +\infty[$ une fonction mesurable telle que f et $1/f$ sont intégrables. Montrer que μ est finie.

Exercice 6.8. Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini et $p \in [1, \infty[$. Soit $g : E \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que, pour tout fonction $f \in \mathbb{L}^p$, on a $fg \in \mathbb{L}^p$. Montrer que $g \in \mathbb{L}^\infty$.

Exercice 6.9 (Pourquoi diable $\|\|_\infty$?)**.** Soit f mesurable sur un espace $(E, \mathcal{A}, \mu)$.

1. On suppose dans cette question que $\mu(E) < \infty$, montrer que

$$\lim_{p \to \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

2. On suppose dans cette question que $f \in \mathbb{L}^{p_0}(\mu)$ pour au moins un $p_0 \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer la même conclusion qu'en **1**.

3. ($\star$) On suppose ici que μ est une mesure de probabilité. La limite

$$\lim_{p \to 0} \|f\|_p,$$

existe-t-elle ? Si oui, à quoi est-elle égale ?

Exercice 6.10 (Séparabilité)**.** Montrer que pour tout $p \in [1, \infty[$ $\mathbb{L}^p((\mathbb{R}, \lambda))$ est séparable. Montrer qu'en revanche $\mathbb{L}^\infty((\mathbb{R}, \lambda))$ n'est pas séparable. Plus généralement quelle condition sur $(E, \mathcal{A}, \mu)$ faut-il imposer pour que $\mathbb{L}^\infty(\mu)$ ne soit pas séparable.

6.1 Théorème de Radon-Nikodym

Exercice 6.11 (Contre-Exemple à R-N)**.** Soit m la mesure de comptage sur $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ c'est-à-dire que $m(A) = \#A$ pour toute partie A de $\mathbb{R}$. On note m_0 la restriction de m à la tribu borélienne de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que la mesure de Lebesgue est absolument continue par rapport à m_0.
2. Montrer qu'il n'existe pas de fonction mesurable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ telle que $\lambda = f \cdot m_0$, où λ désigne la mesure de Lebesgue.
3. Conclure quelque chose d'intelligent et intelligible.

Exercice 6.12 (Quantification de l'absolue continuité)**.** Soient μ et ν deux mesures sur un espace mesurable $(E, \mathcal{A})$.

1. On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $A \in \mathcal{A}$,
$$\mu(A) \leq \eta \ \Rightarrow \ \nu(A) \leq \varepsilon.$$
Montrer que ν est absolument continue par rapport à μ.
2. Montrer que la réciproque est vraie dans le cas où la mesure ν est finie.

6.2 Physionomie

Exercice 6.13. Qui sont ces charmants messieurs ?