2 Fonctions mesurables

Les corrections sont partielles et indicatives. N'hésitez pas à utiliser le mail ou passer me voir dans le bureau V2 si vous avez des problèmes. Toutes les remarques (et fautes trouvées) sont les bienvenues pour l'amélioration du TD.

Exercice 2.1 (Pré-chauffage)**.** Soit $f\ :]0,1[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que f' est mesurable pour la tribu des boréliens de $\mathbb{R}$.

Correction : La fonction f est dérivable, elle est en particulier continue donc mesurable pour la tribu des boréliens. Sa dérivée f' s'exprime comme une limite simple de fonctions mesurables

$$f'(.) = \frac{f(.+n^{-1}) - f(.)}{n},$$

elle est donc mesurable.

Exercice 2.2. Soit $(E,\mathcal{A})$ un espace mesurable et $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions $E \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ mesurables. Montrer que l'ensemble des x où $(f_n(x))_{n\geq 1}$ admet une limite finie est mesurable. (Pensez au critère de Cauchy)

Correction : À l'aide du critère de Cauchy, l'ensemble considéré est

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{l\geq 1} \bigcap_{n,m\geq l} \left\{x \in E, |f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{1}{k}\right\},$$

qui s'obtient par un nombre dénombrable d'opérations élémentaires sur des ensembles mesurables.

Exercice 2.3 (Théorème d'Egoroff)**.** Soit $(E,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(E) < \infty$. On considère une suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions réelles mesurables sur E et f une fonction réelle mesurable sur E telles que $f_n \to f$ μ-p.p. quand $n \to \infty$.

1. Montrer que pour tout $k \geq 1$ et pour tout $\eta > 0$ il existe $n \geq 1$ tel que
$$\mu\left(\bigcup_{j\geq n} \left\{x \in E : |f_j(x) - f(x)| > \frac{1}{k}\right\}\right) \leq \eta.$$
2. En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathcal{A}$ de mesure $\mu(A) \leq \varepsilon$ tel que $f_n \to f$ uniformément sur $E \setminus A$.
3. Donner un contre-exemple à ce résultat si l'on suppose que $\mu(E) = \infty$.

Correction :

`http://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_d'Egoroff`

Exercice 2.4. Soient $(E,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré avec μ non nulle et $f : (E,\mathcal{A}) \to (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble $A \in \mathcal{A}$ de mesure $\mu(A) > 0$ tel que pour tous $x, y \in A$,

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Correction : Pour tout $r \in \mathbb{R}$, on note $A_r = f^{-1}(]r-\varepsilon/2, r+\varepsilon/2[)$. La fonction f étant mesurable, chaque ensemble A_r est mesurable. De plus,

$$\bigcup_{r\in\mathbb{Q}} A_r = f^{-1}(\mathbb{R}) = E.$$

Supposons que $\mu(A_r) = 0$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$. Alors

$$\mu(E) = \sum_{r\in\mathbb{Q}} \mu(A_r) = 0.$$

Or $\mu(E) > 0$. Donc il existe $r_0 \in \mathbb{Q}$ tel que $\mu(A_{r_0}) > 0$. De plus $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ pour tous $x, y \in A_{r_0}$.

Exercice 2.5. Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on note $N(y) \in \bar{\mathbb{R}}$ le nombre de solutions de l'équation $f(x) = y$. Montrer que N est une fonction mesurable.

Correction : L'équation $f(x) = y$ possède une solution dans $[k2^{-n}, (k+1)2^{-n}[$ si

$$y \in f([k2^{-n}, (k+1)2^{-n}[).$$

Puisque f est continue, le théorème des valeurs intermédiaires implique que $f([k2^{-n}, (k+1)2^{-n}[)$ est un intervalle et est donc mesurable. Ainsi la suite de fonctions

$$N_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} \mathbf{1}_{y\in f([k2^{-n},(k+1)2^{-n}[)} + \mathbf{1}_{y=f(1)},$$

est mesurable est tend en croissant vers N qui est donc mesurable.

Exercice 2.6 (Tribu réciproque)**.** Soit $f : (E, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une application mesurable.

1. Montrer que $\mathcal{A}_f = \{f^{-1}(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ est une tribu. On l'appelle tribu engendrée par f.
2. Montrer que c'est la plus petite tribu sur E qui rende f mesurable.
3. Montrer que toute fonction $g : E \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable pour $\mathcal{A}_f$, s'écrit $g = h \circ f$ avec $h : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable. (commencer par le cas où g est étagée)
4. Exemple Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ définie par $f(x) = x^2$.
   (a) Montrer que la tribu image-réciproque par f est $\mathcal{A}_f := \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), A = -A\}$.
   (b) Déterminer l'ensemble des fonctions mesurables de $(\mathbb{R}, \mathcal{A}_f)$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Correction : Nous ne corrigeons que la question 3. Soit $g : (E, \mathcal{A}_f) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable et étagée,

$$g = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{1}_{A_i},$$

avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$ et $A_i = g^{-1}(\lambda_i)$. Comme A_i appartient à la tribu réciproque de f, il existe $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que $A_i = f^{-1}(B_i)$. Et donc

$$g = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{1}_{B_i}}_{\text{mesurable } (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))\longrightarrow(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))} \circ f.$$

Traitons maintenant le cas général : g s'écrit comme limite simple de fonctions étagées $g = \lim e_n$. Donc si l'on écrit $e_n = h_n \circ f$ on obtient $g = \lim h_n \circ f$ avec $h_n : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable. Si l'on pose

$$h(x) = \begin{cases} \lim h_n(x) \text{ quand la limite existe,} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

On vérifie que h est mesurable et que $g = h \circ f$.

Exercice 2.7. Soit $C = C([0,1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, muni de la topologie de la convergence uniforme. On note $\mathcal{C}_1$ la tribu borélienne de C et $\mathcal{C}_2$ la plus petite tribu de C rendant les applications de "projection" $f \mapsto f(x)$ mesurables pour tout x. Deviner la question, et y répondre !

Correction : L'ensemble C est muni de la topologie de la convergence uniforme. Ainsi, pour tout $x \in [0,1]$, l'application $f \in C \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$ est continue et donc mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{C}_1$. On en déduit l'inclusion $\mathcal{C}_2 \subset \mathcal{C}_1$. Montrons réciproquement que $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2$. Soit une fonction $f_0 \in C$ fixée. Pour tout $x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$, l'application $f \in C \mapsto |f(x) - f_0(x)|$ est mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{C}_2$. Donc l'application $f \in C \mapsto \sup_{x\in\mathbb{Q}} |f(x) - f_0(x)|$ est mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{C}_2$ car c'est un sup dénombrable de fonctions mesurables. Or $\|f - f_0\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{Q}} |f(x) - f_0(x)|$. Ainsi la fonction $f \in C \mapsto \|f - f_0\|_\infty$ est mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{C}_2$ ce qui implique que toutes les boules ouvertes de C sont mesurables par rapport à $\mathcal{C}_2$. L'espace C étant séparable, tous les ouverts de C sont donc mesurables par rapport à $\mathcal{C}_2$.

Publicité : Systèmes dynamiques

`http://fr.wikipedia.org/wiki/Système_dynamique_mesuré`

Exercice 2.8 (Théorème de récurrence de Poincaré)**.** Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On suppose que $\mu(E) < \infty$. Soit $f : X \longrightarrow X$ une application mesurable préservant μ i.e. pour tout élément $A \in \mathcal{A}$ on a

$$\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A).$$

Soit A un ensemble mesurable, montrer que pour μ-presque tout point x de A, il existe une infinité de $n \geq 1$ tels que $f^n(x)$ soit dans A.

Correction :

`http://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_de_récurrence_de_Poincaré`

2.1 Physionomie

Exercice 2.9. Qui sont ces charmants messieurs ?

Correction : Egoroff, Poincaré, Cauchy.