13 Convergences.

Citation de Laplace dans l'introduction de "Théorie des probabilités" :
Les questions les plus importantes de la vie ne sont en effet, pour la plupart, que des problèmes de probabilité.
Je vous présente mes meilleurs voeux pour *2010*.

Les corrections sont partielles et indicatives. N'hésitez pas à utiliser le mail ou passer me voir dans le bureau V2 si vous avez des problèmes. Toutes les remarques (et fautes trouvées) sont les bienvenues pour l'amélioration du TD.

Exercice 13.1 (Image continue)**.** Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles et X une variable aléatoire réelle définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que $X_n \to X$ en loi. Montrer que $f(X_n) \to f(X)$ en loi pour toute fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Exercice 13.2 (Deux petites questions en passant)**.** Répondez et justifiez votre réponse.

1. Soit $(\mu_n)_{n\geq 0}$ une suite de mesures de probabilité et μ une mesure positive. Alors il y a convergence étroite des μ_n vers μ si et seulement si, pour toute fonction f continue à support compact, on a la convergence
$$\int f d\mu_n \longrightarrow \int f d\mu.$$
2. Si la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en loi vers X, alors $\mathbb{E}[X_n] \longrightarrow \mathbb{E}[X]$.

Correction : Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. Alors $g \circ f$ est continue et bornée et donc $\mathbb{E}(g(f(X_n))) \to \mathbb{E}(g(f(X)))$, ce qui signifie que $f(X_n) \to f(X)$ en loi.

Exercice 13.3 (Lemme de Slutsky)**.** Soient $(X_n)_{n\geq 1}$, $(Y_n)_{n\geq 1}$ deux suites de variables aléatoires réelles, et X, Y deux variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, telles que $X_n \to X$ en loi et $Y_n \to Y$ en loi.

1. On suppose que les variables X_n et Y_n sont indépendantes pour tout $n \geq 1$ et que les variables X et Y sont indépendantes. Montrer que $(X_n, Y_n) \to (X, Y)$ en loi.
2. Est-il toujours vrai que $(X_n, Y_n) \to (X, Y)$ en loi ?
3. **Lemme de Slutsky** On suppose que Y est constante p.s. Montrer que $(X_n, Y_n) \to (X, Y)$ en loi.

Correction :

1. D'après le théorème de Lévy, il suffit de montrer que $\Phi_{(X_n,Y_n)}(t, t') \to \Phi_{(X,Y)}(t, t')$ pour tout $(t, t') \in \mathbb{R}^2$. Et l'on a par indépendance,
$$\Phi_{(X_n,Y_n)}(t, t') = \Phi_{X_n}(t)\Phi_{Y_n}(t') \to \Phi_X(t)\Phi_Y(t') = \Phi_{(X,Y)}(t, t').$$

2. Il n'est pas vrai en général que $(X_n, Y_n) \to (X, Y)$ en loi. En effet, considérons les variables aléatoires $X_n = Z = Y_n$ pour tout $n \geq 1$, avec Z gaussienne centrée. La variable Z étant symétrique, on a $X_n \to -Z$ en loi. Si $(X_n, Y_n) \to (-Z, Z)$ en loi, alors $X_n + Y_n \to -Z + Z$ en loi (car la fonction $(x, y) \mapsto x + y$ est continue), c'est à dire $2Z = 0$ en loi, ce qui n'est pas.

3. Il suffit de montrer que $\mathbb{E}(F(X_n, Y_n)) \to \mathbb{E}(F(X, Y))$ pour une fonction F continue à support compact. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $Y = a$ p.s. On a alors $Y_n \to a$ en probabilité. Et

$$\begin{aligned} & |\mathbb{E}(F(X_n, Y_n)) - \mathbb{E}(F(X, a))| \\ \leq \quad & |\mathbb{E}(F(X_n, Y_n)) - \mathbb{E}(F(X_n, a))| + |\mathbb{E}(F(X_n, a)) - \mathbb{E}(F(X, a))|. \end{aligned}$$

La fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto F(x, a)$ est continue et bornée donc $|\mathbb{E}(F(X_n, a)) - \mathbb{E}(F(X, a))| \to 0$. De plus, la fonction F est uniformément continue. Pour $\varepsilon > 0$, on peut trouver δ tel que $|F(x, y) - F(x', y')| \leq \varepsilon$ pour $|x - x'| + |y - y'| \leq \delta$. Alors, en notant M un majorant de F, on a

$$\begin{aligned} & |\mathbb{E}(F(X_n, Y_n)) - \mathbb{E}(F(X_n, a))| \\ \leq \quad & \mathbb{E}(|F(X_n, Y_n) - F(X_n, a)|) \\ \leq \quad & \mathbb{E}(|F(X_n, Y_n) - F(X_n, a)| \mathbb{1}_{\{|X_n - a| \geq \delta\}}) + \mathbb{E}(|F(X_n, Y_n) - F(X_n, a)| \mathbb{1}_{\{|X_n - a| < \delta\}}) \\ \leq \quad & 2M\mathbb{P}(|X_n - a| \geq \delta) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi, $\limsup |\mathbb{E}(F(X_n, Y_n)) - \mathbb{E}(F(X_n, a))| \leq \varepsilon$ et ceci étant vrai pour tout ε, on en déduit que $|\mathbb{E}(F(X_n, Y_n)) - \mathbb{E}(F(X_n, a))| \to 0$, puis le résultat.

Exercice 13.4 (Un théorème de Skorokhod). Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles qui convergent en loi vers une variable aléatoire X_0. On note $(F_n)_{n \geq 0}$ les fonctions de répartition associées aux $(X_n)_{n \geq 0}$. On rappelle que l'on note

$$F_i^{-1}(t) = \inf\{x \in \mathbb{R}, F(x) > t\} \text{ l'inverse continu à droite de } F.$$

D'après l'exercice 11.2, si U est une variable aléatoire définie sur un espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ de loi uniforme sur $[0, 1]$ alors la variable aléatoire $\tilde{X}_i := F_i^{-1}(U)$ est égale en loi à X_i.
Montre que la suite de variables aléatoires $(\tilde{X}_i)_{i \geq 1}$ converge presque sûrement vers $\tilde{X}_0$.
Ainsi, quitte à changer les variables aléatoires et l'espace probabilisé sous-jacent (ce qui est un gros changement !), une convergence en loi peut être transformée en une convergence presque sûre.

Correction : L'ensemble des valeurs y où F_0 effectue un palier est dénombrable

$$\{y \in [0, 1], \mathrm{Card}(F_0^{-1}(\{y\})) > 1\} =: \{p_1, ..., p_n, ...\}.$$

Soit $t \notin \{p_1, ..., p_n, ...\}$, $x = F_0^{-1}(t)$ et soit $\varepsilon > 0$. Puisque t n'est pas un palier de F_0, on peut trouver x_1 et x_2 deux points de continuité de F_0 tels que $x - \varepsilon \leq x_1 \leq x \leq x_2 \leq x + \varepsilon$ et $F_0(x_1) < t < F_0(x_2)$ (on rappelle que l'ensemble des points de discontinuité de F_0 est dénombrable). La convergence en loi des X_n vers X_0 est équivalente à la convergence des $F_n(x)$ vers $F_0(x)$ en tout point x de continuité pour F_0. Ainsi, $F_n(x_1) \longrightarrow F_0(x_1)$ et $F_n(x_2) \longrightarrow F_0(x_2)$. Ceci prouve qu'à partir d'un certain rang $F_n^{-1}(t) \in [x - \varepsilon, x + \varepsilon]$. On a donc quantifié

$$t \notin \{p_1, ..., p_n, ...\} \Rightarrow F_n^{-1}(t) \longrightarrow F_0^{-1}(t),$$

ce qui prouve le théorème de Skorokhod.

Exercice 13.5. Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ indépendantes et de même loi μ. On pose $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

1. On suppose que μ est la loi uniforme sur $[0,1]$. Montrer que la suite $(n(1 - M_n))_{n\geq 1}$ converge en loi quand $n \to \infty$ et expliciter la loi limite.

2. On suppose que μ est la loi de Cauchy standard c'est-à-dire que $\mu(dx) = (\pi(1+x^2))^{-1}dx$. Montrer que la suite $(nM_n^{-1})_{n\geq 1}$ converge en loi et expliciter la loi limite. Rappel : $\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})$ quand $x \to +\infty$.

Correction :

1. Pour tout $n \geq 1$, la variable aléatoire $n(1 - M_n)$ est à valeurs dans $[0, n]$. On a donc, pour tout $t < 0$, $\mathbb{P}(n(1 - M_n) \leq t) = 0$. Soit $t \geq 0$ fixé. Pour tout $n \geq t$, on a

$$\mathbb{P}(n(1 - M_n) \leq t) = \mathbb{P}\left(M_n \geq 1 - \frac{t}{n}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(M_n < 1 - \frac{t}{n}\right) = 1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n.$$

   Donc $\mathbb{P}(n(1 - M_n) \leq t) \to (1 - e^{-t})\mathbb{1}_{\{t\geq 0\}}$, et la fonction $t \mapsto (1 - e^{-t})\mathbb{1}_{\{t\geq 0\}}$ est la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre 1. Ainsi, la suite $(n(1 - M_n))_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire exponentielle de paramètre 1.

2. Soit $t \leq 0$. On a

$$\mathbb{P}\left(\frac{n}{M_n} \leq t\right) \leq \mathbb{P}\left(\frac{n}{M_n} \leq 0\right) = \mathbb{P}(M_n \leq 0) = \frac{1}{2^n},$$

   donc $\mathbb{P}\left(nM_n^{-1} \leq t\right) \to 0$ quand $n \to \infty$. Soit maintenant $t > 0$. On a

$$\mathbb{P}(nM_n^{-1} \leq t) = \mathbb{P}(nM_n^{-1} \leq t, M_n > 0) + \mathbb{P}(nM_n^{-1} \leq t, M_n \leq 0).$$

   D'après ce qui a été fait précédemment, $\mathbb{P}(nM_n^{-1} \leq t, M_n \leq 0) \to 0$. Et

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\frac{n}{M_n} \leq t, M_n > 0\right) &= \mathbb{P}\left(M_n \geq \frac{n}{t}\right) \\
&= 1 - \left(\int_{-\infty}^{\frac{t}{n}} \frac{dx}{\pi(1+x^2)}\right)^n \\
&= 1 - \frac{1}{\pi^n}\left(\frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{n}{t}\right)\right)^n \\
&\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 - \exp\left(-\frac{t}{\pi}\right),
\end{aligned}$$

   car $\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})$ quand $x \to \infty$. Ainsi, la suite $(nM_n^{-1})_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire exponentielle de paramètre $\frac{1}{\pi}$.

Exercice 13.6 (Problème du collectionneur)**.** Soit $(X_k, k \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées sur $\{1, 2, \ldots, n\}$. Soit

$$T_n = \inf\{m \geq 1 : \{X_1, \ldots, X_m\} = \{1, 2, \ldots, n\}\}$$

le premier temps où toutes les valeurs ont été observées.

1. Soit $\tau_k^n = \inf\{m \geq 1 : |\{X_1, \dots, X_m\}| = k\}$. Montrer que les variables $(\tau_k^n - \tau_{k-1}^n)_{2 \leq k \leq n}$ sont indépendantes, et déterminer leurs lois respectives.

2. En déduire que $T_n/(n \log n) \to 1$ en probabilité.

Correction :

1. On a $\tau_1^n = 1$. Soit $(t_2, \dots, t_n) \in (\mathbb{N}^*)^{n-1}$. On veut calculer $\mathbb{P}(\tau_2^n - \tau_1^n = t_2, \dots, \tau_n^n - \tau_{n-1}^n = t_n)$. En posant $t_1 = 1$ on a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\tau_2^n - \tau_1^n = t_2, \dots, \tau_n^n - \tau_{n-1}^n = t_n) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \mathbb{P}\Bigg(\bigcap_{k=1}^{n-1} \Big\{ X_{t_1 + \dots + t_k} = \sigma(k), X_{t_1+\dots+t_k+1} \in \{\sigma(1), \dots, \sigma(k)\}, \dots, \\
&\qquad\qquad X_{t_1+\dots+t_k+t_{k+1}-1} \in \{\sigma(1), \dots, \sigma(k)\} \Big\} \cap \{X_{t_1+\dots+t_n} = \sigma(n)\} \Bigg) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \frac{1}{n^n} \prod_{k=2}^n \left(\frac{k-1}{n} \right)^{t_k - 1} \\
&= \frac{n!}{n^n} \prod_{k=2}^n \left(\frac{k-1}{n} \right)^{t_k - 1} \\
&= \prod_{k=2}^n \left(\frac{n+1-k}{n} \right) \left(\frac{k-1}{n} \right)^{t_k - 1}
\end{aligned}$$

Donc les variables aléatoires $(\tau_k^n - \tau_{k-1}^n)_{2 \leq k \leq n}$ sont indépendantes, et ont respectivement pour loi

$$\sum_{i \geq 1} \left(\frac{n+1-k}{n} \right) \left(\frac{k-1}{n} \right)^{i-1} \delta_i.$$

Cette loi est la loi de $G_k + 1$ où G_k suit la loi géométrique de paramètre $(k-1)/n$.

2. On a $T_n = \tau_1 + \sum_{k=2}^n (\tau_k - \tau_{k-1})$ et donc

$$\mathbb{E}(T_n) = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{n}{n+1-k} = 1 + nH_{n-1},$$

où H_n est la série harmonique et

$$\mathrm{Var}(T_n) = \sum_{k=2}^n \mathrm{Var}(\tau_k - \tau_{k-1}) = \sum_{k=2}^n \frac{(k-1)/n}{((n+1-k)/n)^2} \leq Cn^2.$$

Donc pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(|T_n - \mathbb{E}(T_n)| \geq \varepsilon n \log(n) \right) \leq \frac{\mathrm{Var}(T_n)}{\varepsilon^2 n^2 \log(n)^2} \leq \frac{C}{\varepsilon^2 \log(n)^2}.$$

Donc $(T_n - \mathbb{E}(T_n))/(n \log(n)) \to 0$ en probabilité. Or $\mathbb{E}(T_n) \sim n \log(n)$ quand $n \to \infty$. Donc pour tout $\varepsilon > 0$ on a $\{|T_n - n\log(n)| \geq 2\varepsilon n \log(n)\} \subset \{|T_n - \mathbb{E}(T_n)| \geq \varepsilon n \log(n)\}$ pour n assez grand. On obtient ainsi le résultat.

Exercice 13.7. 1. Soit m une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Pour tout $n \geq 1$, on définit une mesure de probabilité m_n sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ par :

$$m_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} m([k/n, (k+1)/n[)\delta_{k/n}.$$

Montrer que $(m_n, n \geq 1)$ converge étroitement vers m.

2. En déduire que si $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires, chaque X_n étant de loi géométrique de paramètre $e^{-1/n}$, alors la suite $(X_n/n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire exponentielle de paramètre 1.

Correction :

1. Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ de loi m. Alors on voit que pour tout $n \geq 1$, la variable aléatoire $Y_n = \lfloor nX \rfloor / n$ ($\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x) suit la loi m_n. Et $Y_n \to X$ p.s. Donc $Y_n \to X$ en loi, ce qui signifie que $m_n \to m$ étroitement.

2. On pose $m(dx) = e^{-x}\mathbb{1}_{\{x>0\}}\, dx$. Alors on vérifie que pour tout $n \geq 1$, m_n est la loi de la variable aléatoire X_n/n. En effet,

$$\mathbb{P}(X_n = k) = e^{-k/n} - e^{-(k+1)/n} = \int_{k/n}^{(k+1)/n} e^{-x}\, dx = m_n(\{k/n\}).$$

Exercice 13.8. Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires constantes, respectivement égales p.s. à $x_n \in \mathbb{R}$, et X une variable aléatoire réelle. Montrer que $X_n \to X$ en loi si et seulement si il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que X est de loi δ_x et $x_n \to x$ quand $n \to \infty$.

Correction : Si $x_n \to x$ et si X est de loi δ_x alors pour toute fonction continue $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on a $\mathbb{E}(g(X_n)) = g(x_n) \to g(x) = \mathbb{E}(g(X))$, ce qui signifie que $X_n \to X$ en loi. Si $X_n \to X$ en loi alors $F_{X_n}(t) \to F_X(t)$ pour tout $t \in D$ où D est l'ensemble des points de continuité de F (D est dense car le complémentaire d'un ensemble dénombrable). Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $F_{X_n}(t) \in \{0, 1\}$ et donc $F_X(t) \in \{0, 1\}$ pour tout $t \in D$. D'après le rappel, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que X est de loi δ_x. Soit O un ouvert contenant x. Alors

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \in O) \geq \mathbb{P}(X \in O) = 1.$$

Ainsi $\liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \in O) = 1$ ce qui signifie que $x_n \in O$ à partir d'un certain rang. On a donc bien $x_n \to x$ quand $n \to \infty$.

Exercice 13.9. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On suppose que Ω est dénombrable et que la tribu $\mathcal{F}$ est $\mathcal{P}(\Omega)$. Montrer que les convergences "presque-sûr" et "en probabilité" sont équivalentes sur cet espace.

Correction : On énumère $\Omega = \{\omega_i\}_{i\geq 1}$. Soit X et (X_n) des variables aléatoires (à valeur dans un espace métrique(E, d)) définient sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ telles que

$$X_n \xrightarrow{(P)} X.$$

Pour montrer que X_n convergent p.s. vers X. Il suffit de montrer que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+$

$$\mathbb{P}\{\omega, \limsup d(X_n(\omega), X(\omega)) \geq \varepsilon\} = 0.$$

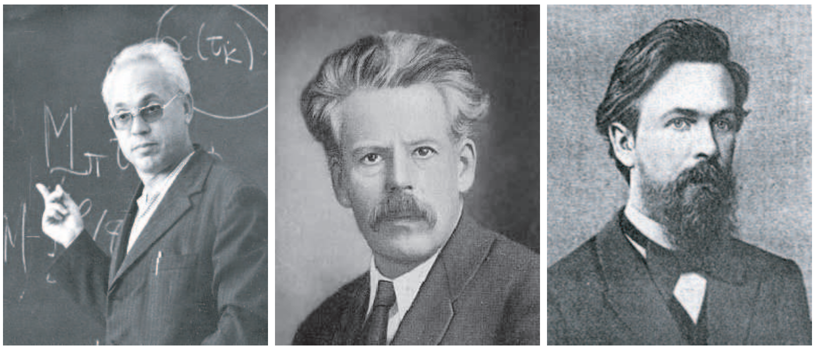
Soit $\omega_i \in \Omega$ tel que $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) > 0$. D'après la convergence en probabilité des X_n

$$\mathbb{P}\{\omega, d(X_n(\omega), X(\omega)) \geq \varepsilon\} \longrightarrow 0.$$

Ainsi, à partir d'un certain rang, $\omega_i \notin \{\omega, d(X_n(\omega), X(\omega)) \geq \varepsilon\}$. On en déduit que pour tout ω_i de probabilité strictement positive $\limsup d(X_n(\omega_i), X(\omega_i)) \leq \varepsilon$. La dénombrabilité de Ω permet de conclure.

13.1 Des images

Exercice 13.10. Qui sont ces charmants messieurs ?



Correction : De gauche à droite, Skorokhod, Slutsky et Markov.

Exercice 13.11 (Remue-ménages (resp. méninges))**.** Trouve les propositions ou les théorèmes associés à chacune de ces flèches (à compléter) :

- Théorème 2.2.1 (Poly)
- Proposition 10.1.2 (deux fois) (Poly)
- Proposition 4.2.3 (Poly)
- Proposition 10.3.1 (Poly)
- Exercice 4.8 (TD 4)
- Exercice 13.4
- Remarque après la proposition 10.3.1 (Poly)