1 Tribus, mesures

Exercice 1.1 (lim inf et lim sup de suites d'ensembles mesurables). 1. On considère un ensemble E, et $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite de sous-ensembles de E. Si $A \subseteq E$, on note $\mathbb{1}_A$ sa fonction caractéristique.

(a) Que représentent les ensembles suivants,

$$\bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} A_k \ , \quad \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k \ ?$$

Le premier est noté $\liminf_{n\to\infty} A_n$, le second $\limsup_{n\to\infty} A_n$. Relier les fonctions caractéristiques $\mathbb{1}_{\liminf_{n\to\infty} A_n}$, $\mathbb{1}_{\limsup_{n\to\infty} A_n}$ aux fonctions $\mathbb{1}_{A_n}$, $n \geq 1$.

On suppose dans les questions (b) et (c) que $(E, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré (μ est une mesure positive) et que $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$.

(b) Montrer que

$$\mu\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(A_n) \ ,$$

et que si $\mu(\cup_{n\geq 1} A_n) < \infty$, alors

$$\mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) \geq \limsup_{n\to\infty} \mu(A_n) \ .$$

(c) Lemme de Borel-Cantelli. On suppose que $\sum_{n\geq 1} \mu(A_n) < \infty$. Montrer que

$$\mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 0.$$

2. Deux applications du lemme de Borel-Cantelli.

(a) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que pour presque-tout $x \in [0, 1]$ (pour la mesure de Lebesgue), il n'existe qu'un nombre fini de rationnels p/q avec p et q premiers entre eux tels que

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}},$$

$i.e.$ presque tout x est "mal approchable par des rationnels à l'ordre $2 + \varepsilon$".

(b) Soient $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels et $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels strictement positifs. Montrer que si $\sum_{n\geq 1} \sqrt{\alpha_n} < +\infty$, alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ (pour la mesure de Lebesgue),

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\alpha_n}{|x - a_n|} < +\infty.$$

Exercice 1.2 (Opérations sur les tribus).

- Citer le théorème sur l'intersection de tribus.
- Soit $\mathcal{F}$ une tribu de Ω et B un élément de $\mathcal{F}$. Montrer que l'ensemble $\mathcal{F}_B := \{A \cap B, A \in \mathcal{F}\}$ est une tribu de B.

- Soit $(X \times Y, \mathcal{F})$ un espace-produit mesuré et $\pi : X \times Y \longrightarrow X$ la projection canonique. L'ensemble $\mathcal{F}_X := \{\pi(F), F \in \mathcal{F}\}$ est-il une tribu ?
- On considère sur $\mathbb{N}$, pour chaque $n \geq 0$, la tribu $\mathcal{F}_n = \sigma(\{0\}, \{1\}, \ldots, \{n\})$. Montrer que la suite de tribus $(\mathcal{F}_n, n \geq 0)$ est croissante mais que $\bigcup_{n\geq 0} \mathcal{F}_n$ n'est pas une tribu.

Exercice 1.3 ("Cardinal" d'une tribu)**.** Le but de l'exercice est de montrer qu'il n'existe pas de tribu $\mathcal{A}$ infinie dénombrable. Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable. On définit, pour tout $x \in E$, l'atome de la tribu $\mathcal{A}$ engendré par x par,

$$\dot{x} = \bigcap_{\{A \in \mathcal{A} \,:\, x \in A\}} A.$$

1. Montrer que les atomes de $\mathcal{A}$ forment une partition de E.
2. Montrer que si $\mathcal{A}$ est au plus dénombrable alors $\mathcal{A}$ contient ses atomes et que chaque élément de $\mathcal{A}$ s'écrit comme une réunion au plus dénombrable d'atomes.
3. Conclure.
4. Donner une nouvelle démonstration de la dernière question de l'exercice 1.2

Exercice 1.4 (Mesure atomique)**.** Soit $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré. Un ensemble $A \in \mathcal{F}$ est un atome pour μ si $0 < \mu(A) < \infty$ et pour tout $B \subset A$ mesurable, $\mu(C) = 0$ ou $\mu(C) = \mu(A)$.

1. Donner un exemple de mesure possédant des atomes.
2. (Pour plus tard) Montrer que la mesure de Lebesgue n'a pas d'atomes.
3. $(\star)$ Soit $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré avec $\mu(X) = 1$ et tel que μ n'ait pas d'atomes. Montrer que l'image de μ est $[0, 1]$.

   Une mesure μ est appelée purement atomique s'il existe une collection $\mathcal{C}$ d'atomes de μ telle que si $A \in \mathcal{F}$,

   $$\mu(A) = \sum_{C \in \mathcal{C}} \mu(A \cap C).$$

4. Montrer qu'une mesure sur un ensemble dénombrable est purement atomique.
5. Nous allons maintenant montrer que toute mesure finie se décompose en une mesure atomique et une mesure non-atomique. Soit $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré avec $\mu(X) < \infty$.
   (a) Si A et B sont deux atomes de μ on pose $A \simeq B$ si $\mu(A \cap B) = \mu(A)$. Montrer que $\simeq$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{A} := \{$ les atomes de $\mu\}$.
   (b) Montrer que si A et B sont deux atomes dans des classes d'équivalences différentes alors $\mu(A \cap B) = 0$.
   (c) $(\star)$ Soit $(C_i)_{i \in I}$ une collection d'atomes contenant exactement un représentant dans chaque classe d'équivalence pour $\simeq$, et posons pour $A \in \mathcal{F}$

   $$\nu(A) = \sum_{i \in I} \mu(A \cap C_i).$$

   Montrer que ν ainsi définie est une mesure purement atomique et que $\mu = \nu + \rho$ avec ρ sans atomes.

Exercice 1.5 (Un problème d'additivité).
On note $l^\infty = \{\mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, ||\mathbf{a}||_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n < \infty\}$, l'ensemble des suites réelles bornées.

1. Montrer que $(l^\infty, ||.||_\infty)$ est un espace vectoriel normé complet.

   On admet (théorème de Hahn-Banach) qu'il existe une forme linéaire $F : l^\infty \longrightarrow \mathbb{R}$ continue qui satisfait les deux propriétés suivantes : Soit $\mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty$

   - $F(\mathbf{a}) \leq ||\mathbf{a}||_\infty$,
   - Si $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ existe alors $F(\mathbf{a}) = \alpha$.

2. Soit $A \subset \mathbb{N}$ et $\mathbf{1}_A \in l^\infty$ définie par $\begin{cases} \mathbf{1}_A(n) = 1, \text{ si } n \in A, \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$. Si $\mathrm{P}(A) = F(\mathbf{1}_A)$, montrer que

   - $\mathrm{P}(\varnothing) = 0, \mathrm{P}(\mathbb{N}) = 1$,
   - $\mathrm{P}(A^c) = 1 - \mathrm{P}(A)$,
   - $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$ si $A \cap B = \varnothing$.

3. Montrer que P n'est pas une mesure.

Exercice 1.6 (Mesure sur $\mathbb{Z}$). Existe-t-il une mesure de masse finie sur $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$ invariante par translation ?

Exercice 1.7 (Support). Soit μ une mesure borélienne sur $\mathbb{R}^n$ (ou plus généralement sur un espace métrique séparable localement compact). On pose

$$S := \{x \in \mathbb{R}^n, \mu(\mathrm{B}(x,r)) > 0, \text{ pour tout } r > 0\}.$$

Montrer que S est fermé, que $\mu(\mathbb{R}^n \backslash S) = 0$, et que $\mu(S\backslash F) = \mu(\mathbb{R}^n \backslash F) > 0$ pour tout fermé F strictement contenu dans S. (On appelle S le support de la mesure μ.)