1 Sommabilité

Exercice 1.1. Un ensemble X est dit dénombrable s'il existe une injection $i : X \longrightarrow \mathbb{N}$. Vérifier les points suivants :

1. Les ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}^2$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.
2. Une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.
3. L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est infini non dénombrable.
4. L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est infini non dénombrable (deuxième démonstration).
5. ($\star$) (Théorème de Cantor) Si X est ensemble infini (ou pas) alors il n'existe pas de surjection $s : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ (Penser au paradoxe du menteur).

1.1 Cas positif

Soit I un ensemble (pas nécéssairement dénombrable, pensez à $\mathbb{R}$ ou $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$...) d'indices et $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs indexés par I. On dit que la famille $(u_i)_{i\in I}$ est *sommable* si il existe un réel $M \in [0, +\infty[$ tel que pour toute partie *finie* $F \subset I$ on ait

$$\sum_{i\in F} u_i \leq M.$$

Dans ce cas, on appelle somme des $(u_i)_{i\in I}$ la quantité : $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i := \sup\left\{\sum_{i\in F} u_i, F \subset I \text{ finie}\right\}$.
Pour toute la suite, on jettera un coup d'oeil à

`http://fr.wikipedia.org/wiki/Famille_sommable`

Exercice 1.2. (a) Si $I = \mathbb{N}$ montrer que $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement la série $\sum_{i=0}^{\infty} u_i$ converge et que la somme des $(u_i)_{i\in I}$ est la somme de la série.

(b) ($\star$) Pour quels $\alpha \in \mathbb{R}$ la famille $\displaystyle\left(\frac{1}{p^2+q^2}\right)^{\alpha}$, $(p,q) \in \mathbb{Z}^2 \backslash (0,0)$, est-elle sommable ?

(c) ($\star$) Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable de réels positifs. Montrer que l'ensemble $I_>$ des $i \in I$ tels que $u_i > 0$ est au plus dénombrable.

Exercice 1.3 (commutativité)**.** Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable de réels positifs et σ une permutation de I. Montrer que la famille $(u_{\sigma(i)})_{i\in I}$ est sommable de même somme que $(u_i)_{i\in I}$.

Exercice 1.4 (associativité)**.** Soit $I = \bigcup_{j\in J} I_j$ une partition de I en ensembles indexés par J. On suppose que la famille de réels positifs $(u_i)_{i\in I}$ est sommable.

(a) Montrer que pour tout $j \in J$, famille $(u_i)_{i\in I_j}$ est sommable de somme $s_j := \sum_{i\in I_j} u_i$.

(b) La famille $(s_j)_{j\in J}$ est sommable.

(c) [Fubini-Tonelli] On a les égalités : $\sum_{i\in I} u_i = \sum_{j\in J} s_j = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right)$.

Exercice 1.5 (Convergence dominée)**.** Soit $(u_{i,n})_{(i,n)\in\mathbb{N}^2}$ une double-suite de réels positifs. On suppose

- pour tout $i \in \mathbb{N}$, $u_{i,n} \longrightarrow u_i$ quand $n \to +\infty$.
- il existe $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{i,n}| \leq v_i$ et $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sommable. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i\in\mathbb{N}} u_{i,n} = \sum_{i\in\mathbb{N}} u_i.$$

1.2 Cas vectoriel

Soit $(E, \|\|)$ un espace vectoriel muni d'une norme. Une famille $(v_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est *sommable* s'il existe $A \in E$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble fini $J_0 \subset I$ tel que pour tout ensemble fini J contenant $J_0 \subset J$ on ait

$$\left\|\sum_{i\in J} v_i - A\right\| \leq \varepsilon.$$

Le vecteur A est alors unique (exercice !) et est appelé somme des $(v_i)_{i\in I}$ et noté $\sum_{i\in I} v_i$. Une famille $(v_i)_{i\in I}$ est *absolument sommable* si la famille $(\|v_i\|)_{i\in I}$ est sommable.

Exercice 1.6. (a) Montrer que les deux définitions de sommabilité coincident dans le cas des familles de réels positifs.

(b) Montrer que si $(E, \|\|)$ est complet, toute famille absolument sommable de E est sommable.

Exercice 1.7. ($\star$) Montrer que toute famille sommable dans un espace vectoriel de dimension finie est en fait absolument sommable. Trouver un contre-exemple à ce fait en dimension infinie.

Exercice 1.8 ($\liminf$ et $\limsup$)**.**

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels. On définit les deux nombres suivants dans $\overline{\mathbb{R}}$:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geq n} a_k\right) \text{ et } \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\geq n} a_k\right).$$

1. Vérifier que ces deux définitions ont bien un sens.
2. Vérifier les assertions suivantes :
   - $\limsup_{n\to\infty} a_n < \alpha \Rightarrow \exists n \geq 0, \forall k \geq n, a_k < \alpha$.
   - $\exists n \geq 0, \forall k \geq n, a_k < \alpha \Rightarrow \limsup_{n\to\infty} a_n \leq \alpha$.

- $\limsup_{n\to\infty} a_n > \alpha \Rightarrow \forall n \geq 0, \exists k \geq n, a_k > \alpha$.
- $\forall n \geq 0, \exists k \geq n, a_k > \alpha \Rightarrow \limsup_{n\to\infty} a_n \geq \alpha$.

Écrire des assertions similaires faisant intervenir $\liminf_{n\to\infty} a_n$.

3. Vérifier que $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l \in \overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = l$.