7 Mesure-produit, Convolution

7.1 Théorèmes de Fubini

Exercice 7.1 (Calculs...). 1. Soit f la fonction définie sur $[0,1]^2$ par

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathbf{1}_{(x,y)\neq(0,0)} \text{ et } 0 \text{ si } x=y=0.$$

Calculer alors

$$\int_0^1 dx \int_0^1 dy f(x,y) \text{ et } \int_0^1 dy \int_0^1 dx f(x,y).$$

Étonnant non ?

2. En considérant l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}\, dx\, dy, \text{ calculer } \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2-1}\, dx.$$

3. En remarquant que $x^{-1}\sin(x) = \int_0^1 \cos(xy)\, dy$, calculer pour tout $t>0$ l'intégrale suivante

$$\int_0^{+\infty} x^{-1}\sin(x)\, e^{-tx}\, dx.$$

Et donner une nouvelle preuve de l'exercice 4.5.

Correction :

1. En remarquant que $x^2-y^2 = x^2+y^2-2y^2$ au numérateur, une intégration par parties (on intègre $\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}$ et on dérive y) donne

$$\int_0^1 dy f(x,y) = \int_0^1 \frac{dy}{x^2+y^2} + \frac{1}{1+x^2} - \int_0^1 \frac{dy}{x^2+y^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Donc $\int_0^1 dx \int_0^1 dy f(x,y) = \frac{\pi}{4}$ et par symétrie $\int_0^1 dy \int_0^1 dx f(x,y) = \frac{\pi}{4}$. De ce fait le théorème de Fubini ne s'applique pas, car f n'est pas dans $\mathbb{L}^1([0,1]^2)$.

2. Notons $F(x,y) = \dfrac{1}{(1+y)(1+x^2y)}$ pour tout $x,y \geq 0$. On a, d'après le théorème de Fubini pour les fonctions positives,

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} F(x,y)\, dx\, dy = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{dy}{1+y}\left(\int_{\mathbb{R}_+} \frac{dx}{1+x^2y}\right) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{dy}{(1+y)}\frac{\pi}{2\sqrt{y}} = \frac{\pi}{2}\int_{\mathbb{R}_+} \frac{2\, du}{1+u^2} = \frac{\pi^2}{2},$$

et

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} F(x,y)\, dx\, dy = \int_{\mathbb{R}_+}\left(\int_{\mathbb{R}_+} F(x,y)\, dy\right) dx.$$

Or pour tout $x > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}_+} F(x,y)\,dy = \frac{1}{x^2-1}\int_{\mathbb{R}_+}\left(\frac{x^2}{1+x^2y} - \frac{1}{1+y}\right)dy = \frac{2\ln(x)}{x^2-1}.$$

Donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2-1}\,dx = \frac{\pi^2}{4}.$$

3. Posons $G(x,y) = \cos(xy)\exp(-tx)$ pour $x \geq 0$, $y \in [0,1]$ et $t > 0$. On a $|G(x,y)| \leq \exp(-tx)$ et $(x,y) \mapsto \exp(-tx)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+ \times [0,1]$ d'après le théorème de Fubini pour les fonctions positives. Donc G est intégrable sur $\mathbb{R}_+ \times [0,1]$ et d'après le théorème de Fubini pour les fonctions intégrables,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sin(x)}{x}e^{-xt}\,dx &= \int_{\mathbb{R}_+\times[0,1]} G(x,y)\,dx\,dy \\
&= \int_0^1 \left(\int_{\mathbb{R}_+} \cos(xy)e^{-tx}\,dx\right)dy \\
&= \int_0^1 \frac{t}{y^2+t^2}\,dy \\
&= \arctan\left(\frac{1}{t}\right).
\end{aligned}$$

Exercice 7.2. Sur un espace mesuré σ-fini $(E,\mathcal{A},\mu)$, on considère $f : (E,\mathcal{A},\mu) \to (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ une fonction mesurable et $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction croissante de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $g(0) = 0$. Montrer que

$$\int_E g\circ f\,d\mu = \int_0^{+\infty} g'(t)\mu(\{f \geq t\})\,dt.$$

Application : Si f est une fonction positive alors

$$\int_E f d\mu = \int_0^\infty \mu\{f \geq t\}dt.$$

Correction : La fonction $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $g(0) = 0$ donc pour tout $x \in E$ on a

$$g(f(x)) = \int_0^{f(x)} g'(s)\,ds.$$

On a donc

$$\int_E g\circ f\,d\mu = \int_E\int_{\mathbb{R}_+} g'(s)\mathbb{1}_{\{s\leq f(x)\}}\,ds\,d\mu(x).$$

Et la fonction $F : (x,s) \in E\times\mathbb{R}_+ \mapsto g'(s)\mathbb{1}_{\{s\leq f(x)\}}$ est positive. Donc d'après le théorème de Fubini pour les fonctions positives (Fubini-Tonelli), on a

$$\int_E g\circ f\,d\mu = \int_{\mathbb{R}_+} g'(s)\int_E \mathbb{1}_{\{s\leq f(x)\}}\,d\mu(x)\,ds = \int_{\mathbb{R}_+} g'(s)\mu(\{f\geq s\})\,ds.$$

Remarque : *Si* $f : (E, \mathcal{A}, \mu) \to (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ *est une fonction mesurable alors*

$$\int_E f \, d\mu = \int_0^{+\infty} \mu(\{f \geq t\}) \, dt.$$

Exercice 7.3. Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur $\mathbb{R}$ et soit μ une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$. Soient f et g deux fonctions $(\mathbb{R}, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurables et monotones de même sens. On suppose de plus que les fonctions f, g et fg sont dans $\mathbb{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{A}, \mu)$. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} fg \, d\mu \geq \int_{\mathbb{R}} f \, d\mu \int_{\mathbb{R}} g \, d\mu.$$

Indication : on pourra considérer la fonction $F(x, y) = (f(x) - f(y))(g(x) - g(y))$.

Correction : La fonction F est positive donc $\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} F(x, y) \, d\mu(x) \, d\mu(y) \geq 0$. De plus, $f, g \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ donc d'après le théorème de Fubini pour les fonctions positives,

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f(x)||g(y)| \, d\mu(x) \, d\mu(y) = \int_{\mathbb{R}} |f| \, d\mu \int_{\mathbb{R}} |g| \, d\mu < \infty.$$

Ainsi, la fonction $(x, y) \mapsto f(x)g(y) \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. De même $fg \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ et μ est une mesure de probabilité, donc $(x, y) \mapsto f(x)g(x) \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. On peut donc écrire

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} F(x, y) \, d\mu(x) \, d\mu(y) = 2 \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(x)g(x) \, d\mu(x) \, d\mu(y) - 2 \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(x)g(y) \, d\mu(x) \, d\mu(y).$$

Et d'après le théorème de Fubini pour les fonctions intégrables (Fubini-Lebesgue), on a

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(x)g(x) \, d\mu(x) \, d\mu(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x) \left(\int_{\mathbb{R}} d\mu(y) \right) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} fg \, d\mu,$$

et

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(x)g(y) \, d\mu(x) \, d\mu(y) = \int_{\mathbb{R}} f \, d\mu \int_{\mathbb{R}} g \, d\mu,$$

ce qui nous donne le résultat.

Exercice 7.4. Soient μ et ν deux mesures σ-finies sur la tribu borélienne de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que l'ensemble $D_\mu = \{x \in \mathbb{R} : \mu(\{x\}) > 0\}$ est fini ou dénombrable.
2. Soit $\Delta = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$ la diagonale de $\mathbb{R}^2$. Montrer que

$$\mu \otimes \nu(\Delta) = \sum_{x \in \mathbb{R}} \mu(\{x\})\nu(\{x\}).$$

Correction :

1. Soit $(E_n)_{n\geq 0}$ une suite croissante de boréliens de $\mathbb{R}$ telle que $\mathbb{R} = \cup_{n\geq 0} E_n$ et telle que $\mu(E_n) < \infty$ pour tout $n \geq 0$. On note $D_n = \{x \in E_n : \mu(x) \geq 1/n\}$. Si D_n est infini alors il contient une suite $(y_m)_{m\geq 1}$ et

$$\mu(E_n) \geq \mu(D_n) \geq \mu(\{y_m, m \geq 1\}) = \sum_{m\geq 1} \mu(\{y_m\}) \geq \sum_{m\geq 1} \frac{1}{n} = \infty,$$

ce qui est impossible. On en déduit donc que D_n est fini. Puis $D = \cup_{n\geq 0} D_n$ est fini ou dénombrable.

2. D'après le théorème de Fubini pour les fonctions positives on a

$$\begin{aligned}
\mu \otimes \nu(\Delta) &= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \mathbb{1}_\Delta(x,y)\, \mu(dx)\nu(dy) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mu(\{y\})\, \nu(dy) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \sum_{x\in D_\mu} \mu(\{x\}) \mathbb{1}_{\{x=y\}}\, \nu(dy) \\
&= \sum_{x\in D_\mu} \int_{\mathbb{R}} \mu(\{x\}) \mathbb{1}_{\{x=y\}}\, \nu(dy) \\
&= \sum_{x\in D_\mu \cap D_\nu} \mu(\{x\})\nu(\{x\}) \\
&= \sum_{x\in\mathbb{R}} \mu(\{x\})\nu(\{x\}).
\end{aligned}$$

7.2 Convolution, approximation de l'identité

Exercice 7.5. 1. Soient f une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire intégrable sur tout compact de $\mathbb{R}$) et φ une fonction de classe C^∞ à support compact. Montrer que la fonction $f * \varphi$ est définie *pour tout* $x \in \mathbb{R}$ et est de classe C^∞.

2. Soit $\phi : x \mapsto \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) \mathbf{1}_{|x|<1}$, montrer que cette fonction est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact.

3. En déduire que pour tout $p \in [1, \infty[$, l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{L}^p(\mathbb{R})$.

REMARQUE : J'attire votre attention sur le fait qu'il faut déjà démontrer la densité de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{L}^p(\mathbb{R})$ (de quelle manière ?) avant de pouvoir démontrer la densité de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{L}^p(\mathbb{R})$. Pourquoi ?

Pour l'exercice suivant on rappelle les deux théorèmes classiques :

- Théorème d'Ascoli : Soit X et Y deux espaces métriques compacts, et A une partie de l'ensemble $\mathcal{C}(X,Y)$ des fonctions continues de $X \longrightarrow Y$ muni de la convergence uniforme. Alors A est relativement compacte dans $\mathcal{C}(X,Y)$ (*i.e.* sa fermeture est compacte) si elle est équi-continue *i.e.*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \left(\mathrm{d}_X(x,x') \leq \delta \Rightarrow \forall f \in A, \mathrm{d}_Y(f(x), f(x')) \leq \varepsilon\right).$$

- Pré-compacité : Soit (E,d) un espace métrique complet. Les parties $A \subset E$ relativement compactes sont exactement les parties pré-compactes *i.e.*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \exists \text{ un recouvrement de } A \text{ par } n_\varepsilon \text{ parties de diamètre } \leq \varepsilon.$$

Correction :

1. On note K un compact tel que $\mathrm{supp}(\varphi) \subset K$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$|\varphi(x-y)f(y)| \leq \|\varphi\|_\infty |f(y)| \mathbb{1}_{x-K}(y).$$

   Or la fonction $y \mapsto |f(y)|\mathbb{1}_{x-K}(y)$ est intégrable. Donc $\varphi * f$ est définie pour x. Soit $M > 0$. On note $K_M = [-M, M] - K$. On a pour $x \in [-M, M]$,

$$\varphi * f(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x-y)f(y)\mathbb{1}_{x-K}(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x-y)f(y)\mathbb{1}_{K_M}(y)\,dy.$$

   En appliquant le théorème de continuité sous le signe intégral, on montre que $\varphi * f$ est continue sur $[-M, M]$. Ceci étant vrai pour tout $M > 0$ la fonction $\varphi * f$ est continue sur $\mathbb{R}$. Puis on montre de même que la fonction $\varphi * f$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

2.

3. Si $f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R})$ alors f est localement intégrable sur $\mathbb{R}$. De plus on peut construire $(\rho_n)_{n\geq 1}$ une approximation de l'unité telle que chaque ρ_n est de classe C^∞. Ainsi $f * \rho_n$ est de classe C^∞ et $f * \rho_n \to f$ dans $\mathbb{L}^p$.

Exercice 7.6 (Riesz-Fréchet-Kolmogorov : un critère de compacité dans $\mathbb{L}^p$.)**.** On veut montrer le résultat suivant. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}$ et soit $\mathcal{F}$ un sous-ensemble borné de $\mathbb{L}^p(\Omega)$ (avec $1 \leq p < \infty$) vérifiant :

(i) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\omega \subset\subset \Omega$ tel que $\sup_{f\in\mathcal{F}} \|f\|_{\mathbb{L}^p(\Omega\setminus\omega)} \leq \varepsilon$,

(ii) pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $\omega \subset\subset \Omega$, il existe $\delta \in]0, \mathrm{dist}(\omega, \Omega^c)[$ tel que $\|\tau_h f - f\|_{\mathbb{L}^p(\omega)} < \varepsilon$ pour tous $|h| < \delta$ et $f \in \mathcal{F}$;

alors $\mathcal{F}$ est relativement compact dans $\mathbb{L}^p(\Omega)$ (c'est-à-dire d'adhérence compacte dans $\mathbb{L}^p(\Omega)$). La notation $\omega \subset\subset \Omega$ signifie que ω est un ouvert tel que $\overline{\omega}$ est compact et inclus dans Ω.

1. Fixons $\varepsilon > 0$ et $\omega \subset\subset \Omega$. Soit $(\rho_n)_{n\geq 1}$ une approximation de l'unité telle que chaque ρ_n est de classe C^∞ et de support inclus dans $[-1/n, 1/n]$. Pour $f \in \mathcal{F}$, on note $\tilde{f}$ la fonction f prolongée à tout $\mathbb{R}$ par 0.

(a) Montrer en utilisant le théorème d'Ascoli que pour tout $n \geq 1$, la famille $\mathcal{F}_n = \{(\tilde{f} * \rho_n)_{|\omega} : f \in \mathcal{F}\}$ est relativement compacte dans $\mathbb{L}^p(\omega)$.

(b) Montrer que pour tout n assez grand,

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \|\tilde{f} * \rho_n - f\|_{\mathbb{L}^p(\omega)} \leq \varepsilon.$$

(c) En déduire que l'ensemble $\mathcal{F}_{|\omega}$ peut être recouvert par un nombre fini de boules de $\mathbb{L}^p(\omega)$ de rayon 2ε.

2. Conclure.

Correction :

1. On note M un majorant de $\mathcal{F}$ dans $\mathbb{L}^p(\Omega)$.

(a) Soit $n \geq 1$ fixé. On note $\mathcal{F}'_n = \{(\tilde{f} * \rho_n)_{|\overline{\omega}} : f \in \mathcal{F}\}$ Tout d'abord on a $\mathcal{F}'_n \subset \mathcal{C}(\overline{\omega}, \mathbb{R})$. De plus, pour tout $x \in \overline{\omega}$, d'après l'inégalité de Jensen (appliquée à la mesure de probabilité $\rho_n(y)dy$), on a

$$\begin{aligned} \left|\tilde{f} * \rho_n(x)\right| &= \left(\int_{\mathbb{R}} |\tilde{f}(x-y)|^p \rho_n(y)\, dy\right)^{1/p} \\ &\leq (\|\rho_n\|_\infty)^{1/p} \|f\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)} \\ &\leq (\|\rho_n\|_\infty)^{1/p} M. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{F}'_n$ est une famille bornée de $\mathcal{C}(\overline{\omega}, \mathbb{R})$. Et pour $x, x' \in \overline{\omega}$, on a

$$\begin{aligned} |\tilde{f} * \rho_n(x) - \tilde{f} * \rho_n(x')| &= \left|\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(y)(\rho_n(x-y) - \rho_n(x'-y))dy\right| \\ &\leq \|\rho'_n\|_\infty |x-x'| \int_{\mathbb{R}} |\tilde{f}|\, d\lambda \\ &\leq \|\rho'_n\|_\infty |x-x'| \|f\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)} \lambda(\Omega)^{1-1/p} \\ &= C_n |x-x'|. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{F}'_n$ est une famille équicontinue de $\mathcal{C}(\overline{\omega}, \mathbb{R})$. D'après le théorème d'Ascoli, $\mathcal{F}'_n$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}(\overline{\omega}, \mathbb{R})$. Or pour $g \in \mathcal{C}(\overline{\omega}, \mathbb{R})$, on a $g_{|\omega} \in \mathbb{L}^p(\omega)$ et $\|g_{|\omega}\|_{\mathbb{L}^p(\omega)} \leq (\lambda(\omega))^{1/p} \|g\|_\infty$. Donc l'injection de $\mathcal{C}(\overline{\omega}, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{L}^p(\omega)$ est continue. Ainsi, $\mathcal{F}_n$ est relativement compacte dans $\mathbb{L}^p(\omega)$.

(b) Soit δ associé à ε et ω par la propriété (ii). Soit $n_0 \geq \delta^{-1}$. Pour $n \geq n_0$, $f \in \mathcal{F}$ et $x \in \omega$, on a

$$\begin{aligned} \left|\tilde{f} * \rho_n(x) - f(x)\right|^p &= \left|\int_{\mathbb{R}} \left(\tilde{f}(x-y) - f(x)\right) \rho_n(y)\, dy\right|^p \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \left|\tilde{f}(x-y) - f(x)\right|^p \rho_n(y)\, dy \\ &= \int_{[-1/n, 1/n]} |f(x-y) - f(x)|^p \rho_n(y)\, dy, \end{aligned}$$

donc d'après le théorème de Fubini-Tonelli,

$$\begin{aligned}
\|\tilde{f} * \rho_n - f\|_{\mathbb{L}^p(\omega)}^p &\leq \int_\omega \int_{[-1/n,1/n]} |f(x-y) - f(x)|^p \rho_n(y)\, dy\, dx \\
&= \int_{[-1/n,1/n]} \int_\omega |f(x-y) - f(x)|^p\, dx\, \rho_n(y)\, dy \\
&= \int_{[-1/n,1/n]} \|\tau_y f - f\|_{\mathbb{L}^p(\omega)}^p \rho_n(y)\, dy \\
&\leq \varepsilon^p \int_{[-1/n,1/n]} \rho_n(y)\, dy \\
&= \varepsilon^p.
\end{aligned}$$

On a donc montré que pour $n \geq n_0$,

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \|\tilde{f} * \rho_n - f\|_{\mathbb{L}^p(\omega)} \leq \varepsilon.$$

(c) La famille $\mathcal{F}_{n_0}$ est relativement compacte dans $\mathbb{L}^p(\omega)$ donc on peut la recouvrir par un nombre fini de boules de rayon ε. D'après la question (b), ces mêmes boules de rayon 2ε recouvrent $\mathcal{F}$.

2. Comme $\mathbb{L}^p(\Omega)$ est complet, il suffit de montrer que $\mathcal{F}$ peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayon ε pour tout $\varepsilon > 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $\omega \subset\subset \Omega$ tel que $\sup_{f\in\mathcal{F}} \|f\|_{\mathbb{L}^p(\Omega\setminus\omega)} \leq \varepsilon/2$. Et d'après la question (1), $\mathcal{F}_{|\omega}$ peut être recouvert par des boules $B(g_i, \varepsilon/2), i = 1, \ldots, k$ (de $\mathbb{L}^p(\omega)$). On note G_i les fonctions g_i prolongées à Ω par 0. Alors les boules $B(G_i, \varepsilon), i = 1, \ldots, k$ (de $\mathbb{L}^p(\Omega)$) recouvrent $\mathcal{F}$.

Exercice 7.7 (convolution " $\mathbb{L}^1 * \mathbb{L}^p$ ".)**.** Soient $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ et $g \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R})$ avec $p \in]1, +\infty[$. Montrer que la fonction $f * g(x)$ est bien définie pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, puis que $f * g \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R})$ avec

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p.$$

Indication : on pourra écrire $|f(x-y)||g(y)| = |f(x-y)|^{1/q}|f(x-y)|^{1/p}|g(y)|$ où q est l'exposant conjugué de p.

Correction : On a d'après l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)||g(y)|\, dy &= \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|^{1/q}|f(x-y)|^{1/p}|g(y)|\, dy \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|\, dy\right)^{1/q} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)||g(y)|^p\, dy\right)^{1/p} \\
&= \|f\|_1^{1/q} \left(|f| * |g|^p(x)\right)^{1/p}. \qquad (\star)
\end{aligned}$$

Or $|f| \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ et $|g|^p \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ donc $|f| * |g|^p(x)$ est définie pour presque tout x donc $f * g(x)$ est définie pour presque tout x. De plus d'après l'inégalité $(\star)$,

$$|f * g(x)|^p \leq \|f\|_1^{p/q}\, |f| * |g|^p(x),$$

donc

$$\int_{\mathbb{R}} (|f{*}g(x)|^p)\, dx \leq \|f\|_1^{p/q} \|f\|_1 \||g|^p\|_1 = \|f\|_1^{p/q+1} \|g\|_p^p = (\|f\|_1 \|g\|_p)^p.$$

Exercice 7.8. Soient $f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R})$ et $g \in \mathbb{L}^q(\mathbb{R})$ où $p \geq 1$ et q est l'exposant conjugué de p. Alors la fonction $f * g$ est définie sur tout $\mathbb{R}$, est uniformément continue, et vérifie

$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

1. Rappeler les étapes de la preuve.
2. Montrer que si $p > 1$ alors on a
$$f * g(x) \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} 0.$$
3. On suppose que $p = 1$ et $q = +\infty$.
   (a) Montrer que si g vérifie $g(x) \to 0$ quand $x \to \pm\infty$, alors le résultat de la question (1) est encore vrai.
   (b) Que peut-on dire dans le cas général ?

Correction :

1. Cours.
2. Supposons que f et g sont deux fonctions continues à support compact. Alors $f * g$ est à support compact. On a donc la conclusion dans ce cas. Soient maintenant f et g quelconques comme dans l'énoncé et $\varepsilon \in\,]0, 1]$. Alors on peut trouver F et G deux fonctions continues à support compact telles que $\|f - F\|_p \leq \varepsilon$ et $\|g - G\|_q \leq \varepsilon$. Notons $[a, b]$ un segment contenant le support de $F * G$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$|f * g(x) - F * G(x)| \leq \|f\|_p \|g - G\|_q + \|f - F\|_p \|G\|_q \leq \varepsilon(\|f\|_p + \|g\|_q + 1).$$
En particulier, pour tout $x \geq b$ ou pour tout $x \leq a$, on a
$$|f * g(x)| \leq \varepsilon(\|f\|_p + \|g\|_q + 1).$$
Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a le résultat.

(2) (a) Si f est continue à support compact inclus dans $[-M, M]$ alors pour tout $A > 0$ et tout $x > A + M$,
$$|f * g(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |g(x - y)||f(y)|\, dy \leq \|f\|_\infty \int_{[-M,M]} |g(x - y)|\, dy \leq 2M\|f\|_\infty \sup_{x>A} |g(x)|.$$
On en déduit que $f * g(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$. On montre de même que $f * g(x) \to 0$ quand $x \to -\infty$. Soient maintenant $f \in \mathbb{L}^1$ et $\varepsilon > 0$. Alors il existe une fonction F continue à support compact telle que $\|f - F\|_1 \leq \varepsilon$. Puis
$$|f * g(x) - F * g(x)| = |(f - F) * g(x)| \leq \|f - F\|_1 \|g\|_\infty \leq \varepsilon\|g\|_\infty.$$
On montre donc avec ce qui précède que $f * g(x) \to 0$ quand $x \to \pm\infty$.

(2) (b) Dans le cas général, le résultat est faux. En effet, on peut considérer une fonction $f \in \mathbb{L}^1$ d'intégrale non nulle et $g = \mathbb{1}_{\mathbb{R}} \in \mathbb{L}^\infty$. Alors $f * g \equiv \int f \, d\lambda$.

Exercice 7.9. Montrer en utilisant la convolution par $\mathbb{1}_{[0,1]}$ qu'il n'existe pas d'élément neutre pour la convolution dans $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de fonction $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $g \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$, $f * g = g$ presque partout.

Remarque : $(\mathbb{L}^1(\mathbb{R}), +, *)$ est une algèbre de Banach non unitaire.

Correction : On suppose qu'il existe un élément neutre $f \in \mathbb{L}^1$. La fonction $\mathbb{1}_{[0,1]} \in \mathbb{L}^\infty$ donc $f * \mathbb{1}_{[0,1]}$ est continue (et même uniformément continue). De plus $\mathbb{1}_{[0,1]} \in \mathbb{L}^1$ donc $f * \mathbb{1}_{[0,1]} = \mathbb{1}_{[0,1]}$ p.p. Donc $f * \mathbb{1}_{[0,1]}(x) = 1$ pour presque tout $x \in]0,1[$ et par continuité $f * \mathbb{1}_{[0,1]}(x) = 1$ pour tout $x \in]0,1[$. De même $f * \mathbb{1}_{[0,1]}(x) = 0$ pour tout $x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$. Cela contredit la continuité de $f * \mathbb{1}_{[0,1]}$.

7.3 Physionomie

Exercice 7.10. Qui sont ces charmants messieurs ?

  

Correction : De droite à gauche, Riesz, Fréchet, Kolomogorov.