3 Intégration de fonctions mesurables

Exercice 3.1 (Lebesgue parle)**.** "Je dois payer une certaine somme ; je fouille dans mes poches et j'en sors des pièces et des billets de différentes valeurs. Je les verse à mon créancier dans l'ordre où elles se présentent jusqu'à atteindre le total de ma dette. C'est l'intégrale de *Riemann*. Mais je peux opérer autrement. Ayant sorti tout mon argent, je réunis les billets de même valeur, les pièces semblables, et j'effectue le paiement en donnant ensemble les signes monétaires de même valeur. C'est mon intégrale." *Lebesgue 1901*. Commenter.

Exercice 3.2. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On suppose que $\mu(E) < \infty$ et que f est une fonction complexe intégrable et telle qu'il existe $S \subset \mathbb{C}$ un fermé tel que pour tout $E \in \mathcal{A}$ de mesure strictement positive on ait

$$A_E(f) = \frac{1}{\mu(E)} \int_E f d\mu \in S.$$

Montrer que $f(x) \in S$ pour μ-presque tout x.

Exercice 3.3 (Uniforme continuité de l'intégrale)**.** Soit $f : (E, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction intégrable. Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall A \in \mathcal{A},\ \ \mu(A) < \delta \Rightarrow \int_A |f|\, d\mu < \varepsilon.$$

En déduire que si $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est intégrable pour la mesure de Lebesgue, alors la fonction $F : u \to \int_{[0,u]} f d\lambda$ est uniformément continue.

Exercice 3.4 (Un exercice de prépa)**.** Soit $f : (E, \mathcal{A}) \to (\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ une fonction intégrable. Montrer que si $|\int_E f\, d\mu| = \int_E |f|\, d\mu$ alors il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ de module $|\alpha| = 1$ tel que $|f| = \alpha f$ μ-p.p.

Exercice 3.5 (Borel-Cantelli)**.** Soient $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction intégrable pour la mesure de Lebesgue et $\alpha > 0$. Montrer que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \to \infty} n^{-\alpha} f(nx) = 0.$$

Exercice 3.6 (Borel-Cantelli bis)**.** Soit $T : (E, \mathcal{A}, \mu) \longrightarrow (E, \mathcal{A}, \mu)$ une application mesurable qui préserve la mesure $i.e.$

$$(\forall A \in \mathcal{A})(\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)).$$

Montrer que si $(A_n)_{n \geq 0}$ est une suite d'ensembles mesurables tels que $\sum \mu(A_n) < \infty$ alors pour presque tout $x \in E$ il existe un rang $N(x)$ tel que pour tout $n \geq N(x)$ $T^n(x)$ n'appartient pas à A_n.

Exercice 3.7. Soit $f : (E, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable.

1. Montrer que

$$\int_E |f|\, d\mu < \infty \Leftrightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^n \mu(2^n \leq |f| < 2^{n+1}) < \infty.$$

2. Montrer que si $\mu(E) < \infty$, on a aussi

$$\int_E |f|\, d\mu < \infty \Leftrightarrow \sum_{n \geq 1} \mu(|f| \geq n) < \infty.$$

   Que peut-on dire si $\mu(E) = \infty$?

Théorème de Convergence

Exercice 3.8 (Contre-Exemple)**.**
1. Dans le lemme de Fatou, montrer que si l'on remplace $\liminf$ par $\limsup$, $f_n \geq 0$ par $f_n \leq 0$ et $\geq$ par $\leq$, le théorème reste vrai.

2. Dans le lemme de Fatou, que se passe-t-il si l'on oublie la condition de positivité ?

3. Donner un exemple de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ pour lesquelles l'inégalité est stricte dans le lemme de Fatou.

4. Dans le théorème de convergence dominée (resp. monotone), vérifier, en donnant des exemples et contre-exemples, que si l'on oublie une hypothèse la conclusion peut rester vraie, ou pas !

5. Soit (f_n) une suite de fonctions positives convergeant μ-pp vers f.
Supposons que $\int f_n \longrightarrow c < \infty$. Montrer que $\int f d\mu$ est définie est appartient à $[0, c]$ mais ne vaut pas nécéssairement c.

6. Construire une suite de fonctions continues f_n sur $[0, 1]$, avec $0 \leq f_n \leq 1$, et telle que
$$\lim \int_0^1 f_n(x)dx = 0,$$
sans toutefois que la suite $(f_n(x))$ ne converge pour un x quelconque de $[0, 1]$.

3.1 Applications

Exercice 3.9 (La puissance de la théorie de la mesure)**.** Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions continues sur $[0, 1]$, avec $0 \leq f_n \leq 1$ pour tout n, qui converge simplement vers 0. Montrer que
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 0,$$
sans utiliser de théorèmes de convergence du cours ou de théorie de la mesure. (Si vous y arrivez, vous gagnez une tablette de chocolat, même deux !).

Exercice 3.10 (Deuxième couche)**.** On définit sur un espace mesuré $(E, \mathcal{A}, \mu)$ une suite de fonctions mesurables $(f_n)_{n\geq 0}$ et une fonction mesurable f telle que $f_n \to f$ μ-p.p. quand $n \to \infty$. On suppose que
$$\sup_{n\geq 0} \int_E |f_n| \, d\mu < \infty.$$
Montrer que f est intégrable.

Exercice 3.11 (Borel-Cantelli encore et toujours)**.** Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite de parties mesurables telles que $\sum \mu(A_n) < \infty$. En considérant la suite de fonctions
$$f_n := \sum_{k=0}^{n} \mathbf{1}_{A_k},$$

démontrer le lemme de Borel Cantelli $i.e.$

$$\mu\left(\bigcap_{n\geq 0}\bigcup_{m\geq n} A_m\right) = 0.$$

Exercice 3.12. Soit $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ une fonction positive, monotone et intégrable. Quelle est la limite de la suite

$$\left(\int_{]0,1[} f\left(x^n\right)\, dx\right)_{n\geq 1} \quad ?$$