9 Mesures signées

Exercice 9.1 (Fonctions à variation bornée.)**.** Soit une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

1. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (i) f s'écrit comme une différence de deux fonctions croissantes continues à droite.
   (ii) Il existe une mesure signée μ sur $[a,b]$ telle que $f(x) = \mu([a,x])$ pour tout $x \in [a,b]$.
   (iii) f est continue à droite et à variation bornée c'est-à-dire que f vérifie la condition suivante
   $$\sup_{n\geq 2, a\leq a_1<\ldots<a_n\leq b} \sum_{i=1}^{n-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| < \infty.$$
2. Donner un exemple de fonction continue $[0,1] \longmapsto \mathbb{R}$ qui ne soit pas à variation bornée.

Exercice 9.2 (L'espace $\mathcal{M}(\mathbb{R})$.)**.** Montrer que $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ l'espace des des mesures boréliennes signées sur $\mathbb{R}$ (ou sur tout espace métrique localement compact) est un espace de Banach pour la norme

$$\mu \mapsto |\mu|.$$

Exercice 9.3. ($\star$) Soit (g_n) une suite de fonctions continues positives sur $I = [0,1]$. On note λ la mesure de Lebesgue sur I et μ une mesure positive de Borel sur I telle que

(i) $\lim_n g_n(x) = 0$ λ-p.p.

(ii) $\int_I g_n d\lambda = 1$ pour tout $n \geq 1$.

(iii) $\lim_n \int_I f g_n d\lambda = \int_I f d\mu$ pour tout $f \in \mathcal{C}(I)$.

Peut-on en déduire que μ est étrangère à λ ?

9.1 Dualité $\mathbb{L}^p$-$\mathbb{L}^q$

Exercice 9.4 (Convergence faible)**.** Soit $p \in]1,\infty[$ et q son exposant conjugué, $\Omega \subset \mathbb{R}$ un ouvert de $\mathbb{R}$ et μ la mesure de Lebesgue. Soit (f_n) une suite bornée de $\mathbb{L}^p(\Omega)$ (*i.e.* $(\|f_n\|_p)$ est bornée).

1. Montrer que $\mathbb{L}^q(\Omega)$ est séparable (c'est à dire qu'il contient une partie dénombrable dense).
2. Soit D une partie dénombrable dense de $\mathbb{L}^q(\Omega)$. Montrer qu'il existe une sous-suite $(f_{\varphi(n)})$ telle que pour tout $h \in D$,
   $$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_{\varphi(n)} h d\mu \text{ existe dans } \mathbb{R}.$$
3. Montrer que pour tout $g \in \mathbb{L}^q(\Omega)$,
   $$\phi(g) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_{\varphi(n)} g d\mu \text{ existe dans } \mathbb{R}.$$

4. En déduire qu'il existe $f \in \mathbb{L}^p(\Omega)$ telle que l'on ait *convergence faible* dans $\mathbb{L}^p(\Omega)$ de la suite $(f_{\varphi(n)})$ vers f *i.e.*
$$\forall g \in \mathbb{L}^q(\Omega), \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_{\varphi(n)} g d\mu = \int_\Omega f g d\mu.$$
5. Le résultat précédent substite-t-il pour $p = 1$?

Exercice 9.5. Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini, $p \in [1, +\infty[$ et q l'exposant conjugué de p. Soit $\psi : E \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que pour toute $f \in \mathbb{L}^p(\mu)$ alors $f\psi \in \mathbb{L}^1(\mu)$. Le but de l'exercice est de montrer que $\psi \in \mathbb{L}^q(\mu)$. Pour cela on introduit la forme linéaire sur $\mathbb{L}^p(\mu)$ suivante :
$$\Phi_\psi(f) = \int_E f\psi\, d\mu, \;\; f \in \mathbb{L}^p(\mu).$$

1. On suppose dans cette question que $\Phi_\psi(f) = 0$ pour toute $f \in \mathbb{L}^p(\mu)$. Montrer que $\psi = 0$ μ-p.p.
2. On note $(E_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante de $\mathcal{A}$ telle que $\cup_{n\geq 1} E_n = E$ et $\mu(E_n) < \infty$ pour tout $n \geq 1$. On pose, pour tout $n \geq 1$, $A_n = E_n \cap \{|\psi| \leq n\}$ et
$$\Phi_n : f \in \mathbb{L}^p(\mu) \mapsto \int_E f\psi \mathbb{1}_{A_n}\, d\mu.$$
Montrer que la suite $(\Phi_n)_{n\geq 1}$ est une suite de formes linéaires continues convergeant simplement vers Φ_ψ. En déduire, en utilisant le théorème de Banach-Steinhaus, que Φ_ψ est continue.
3. Conclure

Remarque : le cas $p = \infty$ est évident. En effet $\mathbb{1}_E \in \mathbb{L}^\infty(\mu)$ donc $\psi\mathbb{1}_E = \psi \in \mathbb{L}^1(\mu)$.

Exercice 9.6. Soient $E = \{a, b\}$ et μ la mesure définie sur $\mathcal{P}(E)$ par $\mu(\{a\}) = 1$ et $\mu(\{b\}) = \mu(E) = +\infty$. Caractériser $\mathbb{L}^\infty(\mu)$ et le dual topologique de $\mathbb{L}^1(\mu)$. Conclure.

9.2 Physionomie

Exercice 9.7. Qui sont ces charmants messieurs ?