# 8 Transformation de Fourier

*Les corrections sont partielles et indicatives. N'hésitez pas à utiliser le mail ou passer me voir dans le bureau V2 si vous avez des problèmes. Toutes les remarques (et fautes trouvées) sont les bienvenues pour l'amélioration du TD.*

## 8.1 Encore un peu de convolution

**Exercice 8.1** (Régularisation). Soit $K$ un compact de $\mathbb{R}^d$ et $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^d$ avec $K \subset \Omega$. Montrer qu'il existe $f$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à valeurs dans $[0,1]$ telle que

$$f = 1 \text{ sur } K, f = 0 \text{ sur } \Omega^c.$$

**Correction :** Corrigeons pour $d = 1$. Puisque $K$ est un compact, $\mathrm{d}(K, \Omega^c) = c > 0$. Si $\phi$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support inclu dans $[-c/3, c/3]^d$ alors

$$f = 1_{K+[-c/3;c/3]^d} * \phi \text{ convient.}$$

**Exercice 8.2** (Super Hölder).

1. Soient $p, q, r \in [1, \infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$. Soient $f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R})$ et $g \in \mathbb{L}^q(\mathbb{R})$. Montrer que $f * g$ est définie presque partout et que

   $$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

   *Indication :*

   $$|f(x-y)g(y)| = (|f(x-y)|^p |g(y)|^q)^{\frac{1}{r}} \left(|f(x-y)^p|\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} \left(|g(y)|^q\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}$$

2. Soit $f \in \mathbb{L}^1$ et $g \in \mathbb{L}^p$, $p \geq 1$. Montrer que pour tout $|a| < \|f\|_1^{-1}$ l'équation

   $$h - af * h = g,$$

   possède une unique solution dans $\mathbb{L}^p$.

**Correction :**

1. On utilise l'inégalité généralisée de Hölder

   $$\left(\int f_1 f_2 f_3\right) \leq \left(\int f_1^{1/\alpha}\right)^\alpha \left(\int f_2^{1/\beta}\right)^\beta \left(\int f_3^{1/\gamma}\right)^\gamma,$$

   pour $\alpha, \beta, \gamma \in ]0,1[$ tels que $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Ici on pose $\alpha = \frac{1}{r}, \beta = \frac{1}{p} - \frac{1}{r}$ et $\gamma = \frac{1}{q} - \frac{1}{r}$ alors l'indication amène à

   $$\int |f(x-y)g(y)|dy \leq \left(\int |f(x-y)|^p |g(y)|^q dy\right)^{\frac{1}{r}} \left(\int |f(x-y)|^p\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} \left(\int |g(y)|^q\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}.$$

   D'où

   $$\|f * g\|_r^r \leq \underbrace{\int\int |f(x-y)|^p |g(y)|^q dxdy}_{\leq \|f\|_p^p \|g\|_q^q} \|f\|_p^{r-p} \|g\|_q^{r-q},$$

   ce qui permet de conclure.

2. On considère l'application $\Phi : h \in \mathbb{L}^p \mapsto af * h + g$. Alors d'après la question précédente

$$\|\Phi(h) - \Phi(h')\|_p \leq a\|f\|_1\|h - h'\|_p,$$

est une contraction de $\mathbb{L}^p$. Cet espace est complet, donc $\Phi$ admet un unique point fixe, ce qui résoud la question.

## 8.2 Transformation de Fourier

**Exercice 8.3** (Premières propriétés)**.** Si $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ on note sa transformée de Fourier

$$\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ixt}dx.$$

1. Montrer que $\hat{f} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.

2. Soient $f, g \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$. Montrer que $\widehat{f * g} = \hat{f}.\hat{g}$.
3. En déduire que $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ n'a pas d'élément neutre pour la convolution (deuxième démonstration de l'année).

**Correction :**

1. Voir corrigé dans le Polycopié de J.F. Le Gall p 52.
2. Par définition on a

$$\widehat{f * g}(t) = \int_{\mathbb{R}} dx e^{-ixt} \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}} dx e^{-i(x-y)t}e^{-iyt} \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy.$$

   Puisque $\int\int |f(x-y)||g(y)|dxdy \leq \|f\|_1\|g\|_1 < +\infty$, le théorème de Fubini s'applique et le changement de variable $x - y = z$ donne le résultat escompté.
3. Si $e \in \mathbb{L}^1$ est un élément neutre pour la convolution alors

$$\forall f \in \mathbb{L}^1, \forall t \in \mathbb{R}, \widehat{f * e}(t) = \hat{f}\hat{e}(t) = \hat{f}(t).$$

   Or il n'est pas difficile de trouver une fonction $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f}(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ (voir par exemple l'exercice suivant). On en déduit donc que $\hat{e}(t) = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Ce qui est en contradiction avec la première question.

**Exercice 8.4** (($\star$)Inversion de Fourier)**.** Soit $H(x) = \dfrac{1}{2\pi}\exp\left(\dfrac{-x^2}{2}\right)$. On rappelle que $\hat{H}(t) = \sqrt{2\pi}H(t)$ (Voir exercice 4.3).

0. Vous souvenez-vous de la démonstration ?

On note $h_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} H(\lambda t)e^{itx}dt$.

1. Calculer $h_\lambda$ et vérifier que $h_\lambda$ quand $\lambda \to 0$ est une approximation de la mesure de Dirac.

2. Soit $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$. Montrer que

$$(f * h_\lambda)(x) = \int_{\mathbb{R}} H(\lambda t)\hat{f}(t)e^{ixt}dt.$$

3. Soit $g \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})$ continue au point $x \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\lim_{\lambda \to 0} (g * h_\lambda)(x) = g(x).$$

4. Soit $p \in [1, \infty[$, et $f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\lim_{\lambda \to 0} \|f * h_\lambda - f\|_p = 0.$$

5. Soit $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$, telle que $\hat{f} \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\text{si } g(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t)e^{ixt}dt \text{ alors } 2\pi f(x) = g(x)\mu\text{-p.p.}$$

6. Donner un exemple de fonction $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} \notin \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$.

7. Soit $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f}(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $f$ est nulle presque partout. C'est-à-dire que l'application $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}) \mapsto \hat{f} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ est injective.

8. ($\star$) L'application $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}) \mapsto \hat{f} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ est-elle surjective ?

**Correction :**

1. On fait le changement de variable $u = \lambda t$ et on trouve

$$h_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-x^2}{2\lambda^2}\right),$$

qui vérifie toutes les propriétés requises pour être une approximation de la mesure de Dirac.

2. C'est une application du théorème de Fubini.

3. Évaluons

$$\begin{array}{rc} & (g * h_\lambda)(x) - g(x) \\ = & \int_{\mathbb{R}} (g(x-y) - g(x))h_\lambda(y)dy \\ = & \int_{\mathbb{R}} (g(x-y) - g(x))\frac{1}{\lambda}h_1(y/\lambda)dy \\ = & \int_{\mathbb{R}} (g(x-\lambda s) - g(x))h_1(s)ds. \end{array}$$

La dernière fonction à intégrer est majorée par $2\|g\|_\infty h_1(s)$ et tend vers 0 lorsque $\lambda$ tend vers $+\infty$. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée.

4. Calculons

$$\int_{\mathbb{R}} |f * h_\lambda(x) - f(x)|^p dx \leq \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)|^p h_\lambda(y) dy$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \|\tau_y f - f\|_p^p h_\lambda(y) dy,$$

où la première inégalité découle de Jensen pour la mesure de probabilité $h_\lambda(y)dy$ et la seconde du théorème de Fubini. D'après le cours la fonction $y \mapsto \|\tau_y f - f\|_p$ est continue et bornée, le résultat découle donc de la question précédente.

5. D'après la question 2 on a

$$(f * h_\lambda)(x) = \int_{\mathbb{R}} H(\lambda t)\hat{f}(t)e^{ixt}dt$$

Remarquons que $H(\lambda t) \to \frac{1}{2\pi}$ quand $\lambda \to 0$. Ainsi, par convergence dominée, le second membre tend vers $\frac{1}{2\pi}g(x)$. Pour le premier membre, on sait qu'il tend dans $\mathbb{L}^p$ vers $f$. Il existe donc une sous suite qui converge presque partout vers $f$. Ainsi, en passant à la limite, on obtient $2\pi f = g$ $\mu$-p.p.

6. On peut prendre par exemple $f = 1_{[0,1]}$. Si $\hat{f} \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ alors $f$ est à une constante et un retournement du temps près, la transformée de Fourier de $\hat{f}$. Donc $f$ est en particulier continue. Ce qui est absurde.

7. On applique la question précédente. En particulier, on en déduit que la transformée de Fourier d'une fonction $\in \mathbb{L}^1$ la caractérise complètement.

8. Non, c'est une conséquence du théorème de l'application ouverte.

**Exercice 8.5** (Pavage)**.** On se donne un rectangle $R = [a,b] \times [c,d]$ tel qu'il existe un pavage de $R$ en petits rectangles

$$R = \bigsqcup_{i \geq 0} \underbrace{[a_i, b_i] \times [c_i, d_i]}_{R_i},$$

tels que pour chaque $i$, au moins l'une des deux longueurs $|b_i - a_i|$ ou $|d_i - c_i|$ soit entière. Montrer alors que l'une des deux longueurs $|b - a|$ ou $|d - c|$ de $R$ est entière.

**Correction :** On calcule

$$\int\int_R e^{i2\pi(x+y)}dxdy,$$

la fonction $(x,y) \mapsto e^{i2\pi(x+y)}$ est dans $\mathbb{L}^1(R)$ (la fonction est bornée et l'ensemble d'intégration est fini) donc $\int\int_R ... = \sum_i \int\int_{R_i}$ ...Or sur chaque $R_i$ d'après le théorème de Fubini, on a

$$\int\int_{R_i} e^{i(x+y)}dxdy = \frac{1}{4\pi^2}[e^{i2\pi b_i} - e^{i2\pi a_i}][e^{i2\pi d_i} - e^{i2\pi c_i}] = 0.$$

Donc

$$\int\int_R e^{i(x+y)}dxdy = \frac{1}{4\pi^2}[e^{i2\pi b} - e^{i2\pi a}][e^{i2\pi d} - e^{i2\pi c}] = 0,$$

ce qui signifie que l'un des deux nombres $|b - a|$ ou $|d - c|$ est entier.

### 8.3 Physionomie

**Exercice 8.6.** Qui sont ces charmants messieurs ?

**Correction :** Fourier, Jensen, Kolmogorov.