7 Mesure-produit, Convolution

7.1 Théorèmes de Fubini

Exercice 7.1 (Calculs...). 1. Soit f la fonction définie sur $[0,1]^2$ par

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathbf{1}_{(x,y)\neq(0,0)} \text{ et } 0 \text{ si } x = y = 0.$$

Calculer alors

$$\int_0^1 dx \int_0^1 dy f(x,y) \text{ et } \int_0^1 dy \int_0^1 dx f(x,y).$$

Étonnant non ?

2. En considérant l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}\, dx\, dy, \text{ calculer } \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2-1}\, dx.$$

3. En remarquant que $x^{-1}\sin(x) = \int_0^1 \cos(xy)\, dy$, calculer pour tout $t > 0$ l'intégrale suivante

$$\int_0^{+\infty} x^{-1}\sin(x)\, e^{-tx}\, dx.$$

Et donner une nouvelle preuve de l'exercice 4.5.

Exercice 7.2. Sur un espace mesuré σ-fini $(E,\mathcal{A},\mu)$, on considère $f : (E,\mathcal{A},\mu) \to (\mathbb{R}_+,\mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ une fonction mesurable et $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction croissante de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $g(0) = 0$. Montrer que

$$\int_E g\circ f\, d\mu = \int_0^{+\infty} g'(t)\mu(\{f \geq t\})\, dt.$$

Application : Si f est une fonction positive alors

$$\int_E f d\mu = \int_0^\infty \mu\{f \geq t\} dt.$$

Exercice 7.3. Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur $\mathbb{R}$ et soit μ une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R},\mathcal{A})$. Soient f et g deux fonctions $(\mathbb{R},\mathcal{A}) \to (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurables et monotones de même sens. On suppose de plus que les fonctions f, g et fg sont dans $\mathbb{L}^1(\mathbb{R},\mathcal{A},\mu)$. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} fg\, d\mu \geq \int_{\mathbb{R}} f\, d\mu \int_{\mathbb{R}} g\, d\mu.$$

Indication : on pourra considérer la fonction $F(x,y) = (f(x)-f(y))(g(x)-g(y))$.

Exercice 7.4. Soient μ et ν deux mesures σ-finies sur la tribu borélienne de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que l'ensemble $D_\mu = \{x \in \mathbb{R} : \mu(\{x\}) > 0\}$ est fini ou dénombrable.

2. Soit $\Delta = \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\}$ la diagonale de $\mathbb{R}^2$. Montrer que

$$\mu\otimes\nu(\Delta) = \sum_{x\in\mathbb{R}} \mu(\{x\})\nu(\{x\}).$$

7.2 Convolution, approximation de l'identité

Exercice 7.5. 1. Soient f une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire intégrable sur tout compact de $\mathbb{R}$) et φ une fonction de classe C^∞ à support compact. Montrer que la fonction $f * \varphi$ est définie *pour tout* $x \in \mathbb{R}$ et est de classe C^∞.

2. Soit $\phi : x \mapsto \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) \mathbf{1}_{|x|<1}$, montrer que cette fonction est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact.

3. En déduire que pour tout $p \in [1, \infty[$, l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{L}^p(\mathbb{R})$.

REMARQUE : J'attire votre attention sur le fait qu'il faut déjà démontrer la densité de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{L}^p(\mathbb{R})$ (de quelle manière ?) avant de pouvoir démontrer la densité de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{L}^p(\mathbb{R})$. Pourquoi ?

Pour l'exercice suivant on rappelle les deux théorèmes classiques :

- THÉORÈME D'ASCOLI : Soit X et Y deux espaces métriques compacts, et A une partie de l'ensemble $\mathcal{C}(X, Y)$ des fonctions continues de $X \longrightarrow Y$ muni de la convergence uniforme. Alors A est relativement compacte dans $\mathcal{C}(X, Y)$ (*i.e.* sa fermeture est compacte) si elle est équi-continue *i.e.*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \left(\mathrm{d}_X(x, x') \le \delta \Rightarrow \forall f \in A, \mathrm{d}_Y(f(x), f(x')) \le \varepsilon\right).$$

- PRÉ-COMPACITÉ : Soit (E, d) un espace métrique complet. Les parties $A \subset E$ relativement compactes sont exactement les parties pré-compactes *i.e.*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \exists \text{ un recouvrement de } A \text{ par } n_\varepsilon \text{ parties de diamètre } \le \varepsilon.$$

Exercice 7.6 (Riesz-Fréchet-Kolmogorov : un critère de compacité dans $\mathbb{L}^p$.)**.** On veut montrer le résultat suivant. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}$ et soit $\mathcal{F}$ un sous-ensemble borné de $\mathbb{L}^p(\Omega)$ (avec $1 \le p < \infty$) vérifiant :

(i) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\omega \subset\subset \Omega$ tel que $\sup_{f \in \mathcal{F}} \|f\|_{\mathbb{L}^p(\Omega \setminus \omega)} \le \varepsilon$,

(ii) pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $\omega \subset\subset \Omega$, il existe $\delta \in]0, \mathrm{dist}(\omega, \Omega^c)[$ tel que $\|\tau_h f - f\|_{\mathbb{L}^p(\omega)} < \varepsilon$ pour tous $|h| < \delta$ et $f \in \mathcal{F}$;

alors $\mathcal{F}$ est relativement compact dans $\mathbb{L}^p(\Omega)$ (c'est-à-dire d'adhérence compacte dans $\mathbb{L}^p(\Omega)$). La notation $\omega \subset\subset \Omega$ signifie que ω est un ouvert tel que $\overline{\omega}$ est compact et inclus dans Ω.

1. Fixons $\varepsilon > 0$ et $\omega \subset\subset \Omega$. Soit $(\rho_n)_{n \ge 1}$ une approximation de l'unité telle que chaque ρ_n est de classe C^∞ et de support inclus dans $[-1/n, 1/n]$. Pour $f \in \mathcal{F}$, on note $\tilde{f}$ la fonction f prolongée à tout $\mathbb{R}$ par 0.

(a) Montrer en utilisant le théorème d'Ascoli que pour tout $n \geq 1$, la famille $\mathcal{F}_n = \{(\tilde{f} * \rho_n)_{|\omega} : f \in \mathcal{F}\}$ est relativement compacte dans $\mathbb{L}^p(\omega)$.

(b) Montrer que pour tout n assez grand,

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \|\tilde{f} * \rho_n - f\|_{\mathbb{L}^p(\omega)} \leq \varepsilon.$$

(c) En déduire que l'ensemble $\mathcal{F}_{|\omega}$ peut être recouvert par un nombre fini de boules de $\mathbb{L}^p(\omega)$ de rayon 2ε.

2. Conclure.

Exercice 7.7 (convolution " $\mathbb{L}^1 * \mathbb{L}^p$ ".)**.** Soient $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ et $g \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R})$ avec $p \in]1, +\infty[$. Montrer que la fonction $f * g(x)$ est bien définie pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, puis que $f * g \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R})$ avec

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p.$$

Indication : on pourra écrire $|f(x-y)||g(y)| = |f(x-y)|^{1/q}|f(x-y)|^{1/p}|g(y)|$ où q est l'exposant conjugué de p.

Exercice 7.8. Soient $f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R})$ et $g \in \mathbb{L}^q(\mathbb{R})$ où $p \geq 1$ et q est l'exposant conjugué de p. Alors la fonction $f * g$ est définie sur tout $\mathbb{R}$, est uniformément continue, et vérifie

$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

1. Rappeler les étapes de la preuve.

2. Montrer que si $p > 1$ alors on a
$$f * g(x) \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} 0.$$

3. On suppose que $p = 1$ et $q = +\infty$.

   (a) Montrer que si g vérifie $g(x) \to 0$ quand $x \to \pm\infty$, alors le résultat de la question (1) est encore vrai.

   (b) Que peut-on dire dans le cas général ?

Exercice 7.9. Montrer en utilisant la convolution par $\mathbb{1}_{[0,1]}$ qu'il n'existe pas d'élément neutre pour la convolution dans $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de fonction $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $g \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$, $f * g = g$ presque partout.

Remarque : $(\mathbb{L}^1(\mathbb{R}), +, *)$ est une algèbre de Banach non unitaire.

7.3 Physionomie

Exercice 7.10. Qui sont ces charmants messieurs ?