EXPONENTIELLES ET LOGARITHMES
MÉTHODE D'EULER

OLIVIER DEBARRE – NICOLE BOPP

Table des matières

1. L'exponentielle comme solution d'une équation différentielle

Une des façons de définir l'exponentielle est de la construire comme solution d'une équation différentielle.

Théorème 1. *Il existe une unique fonction dérivable $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ vérifiant $f(0) = 1$ et $f' = f$.*

On notera cette fonction « exp ». On l'appelle la *fonction exponentielle.*

Démonstration. Nous allons tout d'abord construire *une* fonction f qui convient. On veut définir $f(x)$ comme la limite de la suite $(1 + \frac{x}{n})^n$ (définie pour $n > |x|$). Le plus rapide (même si ce n'est pas très naturel) est de montrer que les deux suites

$$u_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \qquad \text{et} \qquad v_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n} = \frac{1}{u_n(-x)}$$

(définies pour $n > |x|$) sont adjacentes.

Lemme 1. *Pour tout entier naturel n et tout réel $x > -1$, on a $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.*

Démonstration. On démontre le lemme par récurence sur n. Pour $n = 0$, il n'y a rien à montrer. Si $(1 + x)^n \geq 1 + nx$, on a, puisque $1 + x$ est positif,

$$\begin{aligned}
(1 + x)^{n+1} &\geq (1 + nx)(1 + x) \\
&= 1 + nx + x + nx^2 \\
&\geq 1 + (n + 1)x
\end{aligned}$$

ce qui montre le lemme. □

Montrons que la suite $(u_n(x))$ est croissante. On a pour $n > |x|$

$$\begin{aligned}
u_{n+1}(x) &= \Big(1+\frac{x}{n+1}\Big)^{n+1} \\
&= \Big(1+\frac{x}{n}\Big)^{n+1}\left(1-\frac{x}{n(n+1)\big(1+\frac{x}{n}\big)}\right)^{n+1} \\
&\geq \Big(1+\frac{x}{n}\Big)^{n+1}\left(1-\frac{x}{n\big(1+\frac{x}{n}\big)}\right) \qquad \text{par le lemme 1} \\
&= u_n(x)
\end{aligned}$$

On en déduit que la suite $(v_n(x))$ est décroissante puisque $v_n(x) = \frac{1}{u_n(-x)}$. De plus

$$\frac{u_n(x)}{v_n(x)} = \Big(1-\frac{x^2}{n^2}\Big)^n$$

d'où, en utilisant le lemme 1, toujours pour $n > |x|$,

$$1-\frac{x^2}{n} \leqslant \frac{u_n(x)}{v_n(x)} \leqslant 1$$

ce qui montre que les deux suites $(u_n(x))$ et $(v_n(x))$ sont adjacentes. On note $f(x)$ leur limite commune. On a bien $f(0) = 1$. Pour étudier la dérivée de la fonction f, on étudie le taux d'accroissement $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. On a, pour $|h| < 1$ et $n > |x|+1$,

$$\begin{aligned}
u_n(x+h) = \Big(1+\frac{x+h}{n}\Big)^n &= \Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n\left(1+\frac{h}{n\big(1+\frac{x}{n}\big)}\right)^n \\
&\geq \Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n\left(1+\frac{h}{\big(1+\frac{x}{n}\big)}\right) \qquad \text{par le lemme 1}
\end{aligned}$$

soit, en passant à la limite, $f(x+h) \geq (1+h)f(x)$. En remplaçant h par $-h$, on obtient $f(x-h) \geq (1-h)f(x)$ puis, en remplaçant x par $x+h$, on obtient $f(x) \geq (1-h)f(x+h)$, d'où, pour $h > 0$,

$$f(x) \leqslant \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leqslant \frac{f(x)}{1-h}$$

et pour $h < 0$,

$$\frac{f(x)}{1-h} \leqslant \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leqslant f(x)$$

On obtient en faisant tendre h vers 0 que f est dérivable en x, de dérivée $f(x)$.

La fonction f que nous avons construit vérifie donc les propriétés demandées. Pour montrer que c'est la seule, on prend une fonction quelconque g vérifiant les propriétés demandées. La fonction $h : x \mapsto g(x)f(-x)$ est dérivable et

$$h'(x) = g'(x)f(-x) - g(x)f'(-x) = g(x)f(-x) - g(x)f(-x) = 0$$

La fonction h est donc constante égale à $h(0) = 1$. On peut aussi appliquer ce raisonnement à la fonction $x \mapsto f(x)f(-x)$. On a donc montré

$$g(x)f(-x) = f(x)f(-x) = 1$$

pour tout x. En particulier, $f(-x)$ n'est pas nul, et on obtient en simplifiant $f(x) = g(x)$ pour tout x. Cela montre que la fonction f est la seule fonction vérifiant les propriétés demandées. Ceci termine la démonstration du théorème. □

Remarque 1. La valeur $u_n(x)$ est celle obtenue en appliquant la méthode d'Euler pour résoudre l'équation différentielle $y' = y$ sur l'intervalle d'extrémités 0 et x en le subdivisant en n parties égales (voir §6).

Proposition 1. *Pour tous réels x et y, on a*

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y) \tag{1}$$

Démonstration. Fixons x et y. La dérivée de la fonction

$$g : z \mapsto \exp(x+y-z)\exp(z)$$

est

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\exp'(x+y-z)\exp(z) + \exp(x+y-z)\exp'(z) \\ &= -\exp(x+y-z)\exp(z) + \exp(x+y-z)\exp(z) = 0 \end{aligned}$$

La fonction g est donc constante, égale à $g(0) = \exp(x+y)$. On a donc

$$\exp(x+y-z)\exp(z) = \exp(x+y)$$

pour tous réels x, y et z. En faisant $z = y$, on obtient la proposition. □

La relation (1) entraîne $\exp(x)\exp(-x) = \exp(0) = 1$, de sorte que l'exponentielle ne s'annule pas. De plus, $\exp(x) = \big(\exp(x/2)\big)^2 > 0$ pour tout réel x : l'exponentielle ne prend que des valeurs strictement positives.

Proposition 2. *Soit a un réel et soit $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable vérifiant $g' = ag$. On a alors*

$$g(x) = g(0)\exp(ax)$$

pour tout réel x.

Démonstration. Posons $h(x) = g(x)\exp(-ax)$. On a

$$h'(x) = g'(x)\exp(-ax) - ag(x)\exp'(-ax) = ag(x)\exp(-ax) - ag(x)\exp(-ax) = 0$$

La fonction h est donc constante, égale à $h(0) = g(0)$. $\square$

Notation exponentielle. Pour tout réel $a > 0$ et tout rationnel p/q, l'expression $a^{p/q}$ est déjà définie comme la racine $q$ième[1] de a^p.

On déduit facilement de (1) que, pour tout entier n et tout réel x, on a $\exp(nx) = \exp(x)^n$, puis, pour tout rationnel p/q,

$$\exp(x)^p = \exp(px) = \exp\Big(q\,\frac{p}{q}x\Big) = \Big(\exp\Big(\frac{p}{q}x\Big)\Big)^q$$

Puisque $\exp(\frac{p}{q}x)$ est positif, c'est la racine $q$ième de $\exp(x)^p$, c'est-à-dire

$$\exp\Big(\frac{p}{q}x\Big) = \exp(x)^{p/q}$$

En particulier, si on pose $e = \exp(1)$, on a $\exp(\frac{p}{q}) = e^{p/q}$. On peut donc poser sans conflit $e^x = \exp(x)$ pour tout *réel* x (c'est une notation).

Remarquons que l'on n'a pas défini ici a^x pour tout réel $a > 0$ et tout réel x.

2. Caractérisation de l'exponentielle par une équation fonctionnelle

On caractérise la fonction exponentielle par l'équation fonctionnelle (1).

Théorème 2. *Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction non identiquement nulle, continue en 0 et vérifiant $f(x+y) = f(x)f(y)$ pour tous réels x et y. Il existe un réel a tel que*

$$f(x) = e^{ax}$$

pour tout réel x.

La continuité de f en un point est essentielle (en fait, l'intégrabilité de f suffit, comme le montre la démonstration ci-dessous). Cependant, la construction de fonctions autres que les exponentielles vérifiant (1) est délicate (elle fait appel à l'axiome du choix).

Démonstration. Le premier pas est de montrer que f est dérivable. Remarquons tout d'abord que la continuité de f en 0 et la relation (1) entraînent la continuité de f sur tout $\mathbf{R}$. D'autre part, si f s'annule en un point x_0, on a $f(x) = f(x-x_0)f(x_0) = 0$ pour tout x, ce qui contredit l'hypothèse. Donc f ne s'annule pas, et comme $f(x) = f(x/2)^2$, elle ne prend que des valeurs strictement positives. On a en particulier $\int_0^1 f(y)\,dy > 0$. Comme $f(0) = f(0)^2$, on a aussi $f(0) = 1$.

[1] On rappelle que la racine $q$ième d'un réel positif x est définie comme l'unique réel positif dont la puissance $q$ième est x ; son existence découle du théorème des valeurs intermédiaires.

Intégrons entre 0 et 1 la relation (1), où les deux membres sont considérés comme des fonctions de y. On obtient

$$\int_0^1 f(x+y)\,dy = f(x)\int_0^1 f(y)\,dy$$

En faisant un changement de variables, on obtient

$$f(x) = \frac{\int_x^{x+1} f(z)\,dz}{\int_0^1 f(y)\,dy} = \frac{\int_0^{x+1} f(z)\,dz - \int_0^x f(z)\,dz}{\int_0^1 f(y)\,dy}$$

Comme l'intégrale d'une fonction continue est une fonction dérivable de ses bornes, f est dérivable. En dérivant (1) par rapport à y, puis en faisant $y = 0$, on obtient

$$f'(x) = f(x)f'(0)$$

La proposition 2 entraîne $f(x) = f(0)e^{xf'(0)} = e^{xf'(0)}$. $\square$

3. Le logarithme népérien comme fonction réciproque de l'exponentielle

La fonction exp est dérivable à dérivée strictement positive, donc strictement croissante, de limites 0 en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$. Elle admet une fonction réciproque $]0, +\infty[$, que l'on appelle le *logarithme népérien* et que l'on note « log », ou « ln ». Elle vérifie

$$\log(1) = 0 \quad , \quad \log(e) = 1 \quad , \quad \log(xy) = \log(x) + \log(y) \quad , \quad e^{\log(x)} = x$$

pour tous réels x, y strictement positifs. En dérivant $e^{\log(x)} = x$, on obtient

$$\log'(x)e^{\log(x)} = 1$$

c'est-à-dire $\log'(x) = \frac{1}{x}$.

La construction du logarithme présentée ci-dessus est indirecte : on a d'abord construit l'exponentielle comme solution d'une équation différentielle, puis on a défini le logarithme comme sa fonction réciproque.

On peut aussi définir directement la fonction logarithme en posant

$$\log(x) = \int_1^x \frac{dy}{y}$$

pour tout $x > 0$, mais on a besoin pour cela de la théorie de l'intégration. Inspiré par la construction de l'exponentielle, le lecteur pourrait tenter une construction directe du logarithme basée sur la méthode d'Euler. Après tout, il vérifie aussi une équation différentielle, à savoir $\log'(x) = 1/x$. Si on subdivise l'intervalle d'extrémités 1 et $1+x$ en n parties égales, on obtient des valeurs a_j en $1 + \frac{jx}{n}$ qui vérifient

$$a_0 = 0 \quad , \quad a_{j+1} = a_j + \frac{x}{n} \frac{1}{\left(1 + \frac{jx}{n}\right)}$$

c'est-à-dire $a_{j+1} = a_j + \frac{x}{n+jx}$, soit pour valeur en $1+x$

$$u_n(x) = \frac{x}{n} + \frac{x}{n+x} + \cdots + \frac{x}{n+(n-1)x}$$

(C'est aussi une somme de Riemann.) Il s'agit alors de montrer :

a) que pour tout $x > -1$, la suite $(u_n(x))_{n>0}$ converge vers une limite que l'on note $f(1+x)$;

b) que la fonction f ainsi définie sur $\mathbf{R}^{+*}$ est dérivable, de dérivée $1/x$.

Pas si simple !

On verra dans le §5 une construction directe (un peu technique) qui ne fait pas non plus appel à la théorie de l'intégration, basée sur la propriété $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$.

Nous récapitulons à la fin du numéro suivant les diverses façons possibles d'introduire les fonctions logarithmes.

4. Diverses caractérisations des fonctions logarithme

On s'intéresse aux fonctions $f :]0, +\infty[\to \mathbf{R}$ vérifiant la propriété suivante :

(2) $\qquad f(xy) = f(x) + f(y)$ pour tous x et y strictement positifs.

Théorème 3. *Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbf{R}$ une fonction non identiquement nulle. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est dérivable sur $]0, +\infty[$, $f(1) = 0$ et il existe un réel $\lambda \neq 0$ tel que $f'(x) = \frac{\lambda}{x}$;*

(ii) *f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et vérifie (2) ;*

(ii') *f est dérivable en $x = 1$ et vérifie (2) ;*

(iii) *f est continue sur $]0, +\infty[$ et vérifie (2) ;*

(iii') *f est continue en $x = 1$ et vérifie (2) ;*

(iv) *f est strictement monotone sur $]0, +\infty[$ et vérifie (2).*

Démonstration. Remarquons tout d'abord que si f vérifie (2) alors $f(1) = 0$.

(iii) $\iff$ (iii') Si f vérifie (2) on a, pour $x > 0$ et $|h|$ assez petit,

$$f(x+h) - f(x) = f(1 + \frac{h}{x}) = f(1 + \frac{h}{x}) - f(1)$$

Si la fonction f est continue en 1, elle est donc continue en tout point $x > 0$ et la rćiproque est triviale.

(ii) $\Longleftrightarrow$ (ii') Si f vérifie (2) on a pour $x > 0$ et $|h|$ assez petit

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{1}{x}\left(\frac{f(1+\frac{h}{x})-f(1)}{\frac{h}{x}}\right) .$$

Si la fonction f est dérivable en 1, elle est donc dérivable en tout point $x > 0$ et la réciproque est triviale.

(i) $\Longleftrightarrow$ (ii) Si f vérifie (ii), on obtient, en faisant tendre h vers 0 dans la relation montrée ci-dessus, que pour tout $x > 0$ on a

$$f'(x) = \frac{f'(1)}{x}$$

ce qui montre bien, puisque $f(1) = 0$, que f vérifie (i) avec $\lambda = f'(1)$.

Réciproquement si f vérifie (i), considérons la fonction $\varphi : x \mapsto f(xy) - f(x) - f(y)$ pour $y > 0$. La fonction φ est dérivable et on a

$$\varphi'(x) = y \times \frac{\lambda}{xy} - \frac{\lambda}{x} - 0 = 0$$

Par conséquent φ est une constante (qui dépend *a priori* de y). Comme elle s'annule en 0, on en déduit que φ est identiquement nulle, c'est-à-dire que f vérifie la propriété (2).

(ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) Il s'agit de montrer que si f est continue et vérifie (2), elle est dérivable. Pour cela, on intègre la relation (2) entre $y = 1$ et $y = 2$; cette intégration est bien définie puisque les fonctions $y \mapsto f(x) + f(y)$ et $y \mapsto f(xy)$ sont continues. On obtient ainsi pour tout $x > 0$

$$\int_1^2 f(xy)\, dy = f(x) + \int_1^2 f(y)\, dy$$

En utilisant le changement de variable $u = xy$, on peut écrire le premier membre de cette égalité sous la forme $\frac{1}{x}\int_x^{2x} f(u)\, du$ et on obtient

$$f(x) = \frac{1}{x}\left(\int_0^{2x} f(u)\, du - \int_0^x f(u)\, du\right) - \int_1^2 f(y)\, dy$$

Comme l'intégrale d'une fonction continue est une fonction dérivable de ses bornes, la fonction f est dérivable[2].

(iv) $\Longrightarrow$ (iii) Supposons par exemple f strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Comme $f(1) = 0$, on a $f(a) > 0$ pour tout $a > 1$. Choisissons un tel a. Nous allons utiliser les deux propriétés suivantes :

[2]On pourra remarquer que l'on a largement utilisé les résultats de la théorie de l'intégrale de Riemann dans cette démonstration.

- la suite $(a^{1/n})$ tend vers 1 [3];
- $f(a^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n}f(a)$, qui est conséquence de (2).

Montrons que f est continue en un point $x_0 > 0$. Pour cela, on remarque si $x > 0$ est tel que

$$a^{-\frac{1}{n}} \leqslant \frac{x}{x_0} \leqslant a^{\frac{1}{n}} \tag{3}$$

la croissance de f implique

$$-\frac{1}{n}f(a) \leqslant f(x) - f(x_0) \leqslant \frac{1}{n}f(a)$$

Or les inégalités (3) sont équivalentes à

$$x_0(a^{-\frac{1}{n}} - 1) \leqslant x - x_0 \leqslant x_0(a^{\frac{1}{n}} - 1)$$

Soit $\varepsilon > 0$, et soit $n \in \mathbf{N}$ tel que

$$0 < \frac{1}{n}f(a) < \varepsilon$$

Définissons η par

$$\eta = \min\Big(x_0(a^{\frac{1}{n}} - 1), x_0(1 - a^{-\frac{1}{n}})\Big)$$

On déduit des inégalités ci-dessus

$$|x - x_0| < \eta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

ce qui prouve la continuité de f en x_0.

Dans le cas où f est strictement décroissante, il suffit de choisir $a > 1$ tel que $f(a) < 0$ et de renverser les inégalités où intervient la fonction f pour obtenir le résultat.

Pour conclure la démonstration du théorème, on remarque que si une fonction f vérifie (i), sa dérivée a un signe constant et par conséquent elle est strictement monotone. Comme nous avons d'autre part montré que dans ce cas f vérifie la relation fonctionnelle (2), nous en concluons que (iv) est bien équivalent aux autres assertions. □

Pour définir le logarithme népérien, plusieurs options sont possibles :

- Chercher une fonction vérifiant (i) avec $\lambda = 1$. C'est ce qui est fait en terminale. L'existence d'une telle fonction se déduit de l'existence d'une primitive pour une fonction continue.

[3]Pour le démontrer *sans utiliser les fonctions exponentielle ou logarithme* il suffit d'utiliser le lemme 1 et d'écrire $a = (1 + (a^{\frac{1}{n}} - 1))^n \geqslant 1 + n(a^{\frac{1}{n}} - 1)$.

- Chercher une fonction vérifiant (ii), puis montrer (ii) $\Longrightarrow$ (i). Cela demande aussi d'admettre l'existence d'une primitive mais c'est plus satisfaisant d'un point de vue historique de partir de l'équation fonctionnelle. On peut alors caractériser le logarithme népérien par $\lambda = 1$ et parler naturellement des autres logarithmes en particulier de celui de base 10. C'est toutefois un peu restrictif de supposer *a priori* que la fonction est dérivable.
- Chercher une fonction vérifiant (iii), puis montrer (iii) $\Longrightarrow$ (ii) et se ramener au cas précédent. Cela nous semble le plus intéressant pour une leçon de CAPES, bien qu'il faille considérer comme connus les résultats de la théorie de l'intégration.
- Le plus satisfaisant serait d'être le moins restrictif possible sur les propriétés de la fonction et donc de chercher directement une fonction vérifiant (iv) puis de montrer son existence sans utiliser la théorie de l'intégration. C'est ce qui est fait au numéro suivant, mais la démonstration est sans doute trop difficile pour une leçon de CAPES.

5. Construction directe des fonctions logarithme

On peut définir directement la fonction « log » de façon tout-à-fait élémentaire, sans faire appel à la théorie de l'intégration. On recherche simplement les fonctions $f :]0, +\infty[\to \mathbf{R}$ qui vérifient la propriété (iv) du théorème 3.

Proposition 3. *Pour tout réel $a > 1$, il existe une unique fonction strictement croissante $f :]0, +\infty[\to \mathbf{R}$ telle que*
a) *$f(xy) = f(x) + f(y)$ pour tous réels strictement positifs x et y ;*
b) *$f(a) = 1$.*

La fonction f ainsi définie est appelée « logarithme de base a », noté $\log_a$.

Démonstration. Supposons qu'une telle fonction existe. On aura alors

$$f(1) = f(1 \times 1) = f(1) + f(1)$$

donc $f(1) = 0$, et

$$f(x^n) = f(x^{n-1} \times x) = f(x^{n-1}) + f(x) = nf(x)$$

(par récurrence sur n). En particulier,

$$f(a^n) = nf(a) = n$$

Pour construire une fonction f comme dans l'énoncé de la proposition, on commence donc par comparer les nombres réels positifs aux puissances de a.

Lemme 2. *Pour tout réel $x > 0$, il existe un entier relatif m tel que $a^m \leqslant x < a^{m+1}$.*

Démonstration. Comme $a > 1$, on a $\lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty$ et $\lim_{n\to-\infty} a^n = 0$. Il existe donc un plus petit entier relatif m tel que $x < a^{m+1}$. On a alors $a^m \leqslant x$, d'où le lemme. □

Fixons un réel $x > 0$ et considérons la partie A_x de $\mathbf{R}$ définie par

$$A_x = \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbf{Q} \mid q > 0 \quad \text{et} \quad a^p \leqslant x^q \right\}$$

(il faut remarquer que $a^p \leqslant x^q$ équivaut à $a^{kp} \leqslant x^{kq}$ pour tout entier k de sorte que cette propriété dépend de la fraction $\frac{p}{q}$ seulement, et pas du choix de p et q).

La partie A_x est une partie *non vide* et *majorée* de $\mathbf{R}$: l'entier m donné par le lemme est dans A_x et $m+1$ majore A_x. En effet, si $\frac{p}{q} \in A_x$, on a $\frac{p}{q} \leqslant m+1$ puisque $a^p \leqslant x^q \leqslant a^{(m+1)q}$. Donc A_x a une borne supérieure dans $\mathbf{R}$.

Supposons qu'il existe une fonction f vérifiant les conditions de la proposition. Si $\frac{p}{q} \in A_x$, on a $a^p \leqslant x^q$, donc $p = f(a^p) \leqslant f(x^q) = qf(x)$ puisque f est croissante. On en déduit $f(x) \geq \sup A_x$.

De plus, puisque $\mathbf{Q}$ est dense dans $\mathbf{R}$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rationnel $\frac{p'}{q'}$ tel que $\sup A_x + \varepsilon \geq \frac{p'}{q'} > \sup A_x$. On a alors $\frac{p'}{q'} \notin A_x$, de sorte que $a^{p'} > x^{q'}$, et $p' = f(a^{p'}) > f(x^{q'}) = q'f(x)$ puisque f est strictement croissante. On a donc $f(x) < \frac{p'}{q'} \leqslant \sup A_x + \varepsilon$, ceci pour tout ε. Ceci implique que nécessairement, on a $f(x) = \sup A_x$ pour tout $x > 0$. Cela montre déjà l'unicité de la fonction f.

On *définit* maintenant une fonction f ainsi, et il faut vérifier qu'elle satisfait bien aux conditions de la proposition.

Tout d'abord, puisque $a > 1$, des entiers p et q vérifient $a^p \leqslant a^q$ si et seulement si $p \leqslant q$. Ensuite, on a

$$A_a = \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbf{Q} \mid a^p \leqslant a^q \right\} = \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbf{Q} \mid p \leqslant q \right\}$$

de sorte que $f(a) = \sup A_a = 1$.

Remarquons que, si $a^p \leqslant x^q \leqslant a^{p+r}$, alors $\frac{p}{q} \in A_x$, de sorte que $f(x) \geq \frac{p}{q}$. Ensuite, pour tout $\frac{p'}{q'}$ dans A_x, on a $a^{p'} \leqslant x^{q'}$, et

$$a^{p'q} \leqslant x^{q'q} = (x^q)^{q'} \leqslant (a^{p+r})^{q'} = a^{(p+r)q'}$$

de sorte que $p'q \leqslant (p+r)q'$ et $\frac{p'}{q'} \leqslant \frac{p+r}{q}$. On a donc $\frac{p}{q} \leqslant f(x) \leqslant \frac{p+r}{q}$.

Montrons maintenant que cette fonction vérifie « l'équation fonctionnelle » (2). Donnons-nous des réels x et y. Pour tout entier $q \geq 1$, il existe par le lemme des entiers p et p' tels que

$$a^p \leqslant x^q \leqslant a^{p+1} \quad , \qquad a^{p'} \leqslant y^q < a^{p'+1}$$

de sorte que

$$a^{p+p'} \leqslant (xy)^q \leqslant a^{p+p'+2}$$

Mais alors, on a par ce qui précède

$$\frac{p}{q} \leqslant f(x) \leqslant \frac{p+1}{q} \quad , \quad \frac{p'}{q} \leqslant f(y) \leqslant \frac{p'+1}{q} \quad , \quad \frac{p+p'}{q} \leqslant f(xy) \leqslant \frac{p+p'+2}{q}$$

En ajoutant les deux premières inégalités, on obtient

$$\frac{p+p'}{q} \leqslant f(x)+f(y) \leqslant \frac{p+p'+2}{q}$$

de sorte que

$$|f(xy)-f(x)-f(y)| \leqslant \frac{2}{q}$$

ceci pour tout entier $q \geq 1$. Donc $f(xy) = f(x) + f(y)$.

Montrons à présent que f est *strictement croissante*. Comme elle transforme multiplication en addition, il est naturel de considérer, si $0 < x < y$, le rapport $z = \frac{y}{x} > 1$.

Comme $\lim_{n\to+\infty} z^n = +\infty$, il existe un entier $n \geq 1$ tel que $a < z^n$. Alors $\frac{1}{n} \in A_z$ et donc $f(z) \geq \frac{1}{n} > 0$. Enfin

$$f(y) = f(zx) = f(z) + f(x) > f(x)$$

On a ainsi fini la démonstration de la proposition. □

Si $a \in \,]0,1[$, la fonction $-\log_{1/a}$ vérifie l'équation fonctionnelle a) de la proposition 3 et prend la valeur 1 en a, ce qui justifie de la noter aussi $\log_a$. Elle est, bien sûr, strictement décroissante.

Pour tout a strictement positif différent de 1, la fonction $\log_a$ est strictement monotone et s'annule en 1. On a donc $\log_a b \neq 0$ pour tout b strictement positif différent de 1.

Proposition 4. *Si a et b sont strictement positifs et différents de* 1*, on a* $\log_a x = (\log_a b)(\log_b x)$ *pour tout* $x > 0$.

Démonstration. La fonction $x \mapsto \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$ est bien définie puisque $b \neq 1$, donc $\log_a b \neq 0$. Elle vérifie l'équation fonctionnelle (2), elle est strictement monotone, et vaut 1 en b. C'est donc la fonction $\log_b$. □

Proposition 5. *La fonction* $\log_a$ *est continue sur* $]0,+\infty[$.

Démonstration. Il suffit de traiter le cas $a > 1$. Soit x_0 un point de $]0, +\infty[$. Fixons un entier $n > 0$. Le réel $\sqrt[n]{a}$ vérifie $\log_a(\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n}$ et $\sqrt[n]{a} > 1$, puisque $a > 1$. Soit x un réel strictement positif tel que

$$x_0\left(\frac{1}{\sqrt[n]{a}} - 1\right) \leqslant x - x_0 \leqslant x_0(\sqrt[n]{a} - 1) \ ;$$

on a alors

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a}} \leqslant \frac{x}{x_0} \leqslant \sqrt[n]{a}$$

d'où, comme la fonction $\log_a$ est croissante, $-\frac{1}{n} \leqslant \log_a(x/x_0) \leqslant \frac{1}{n}$, soit encore $|\log_a(x) - \log_a(x_0)| \leqslant \frac{1}{n}$. Ceci achève la démonstration de la proposition. □

La fonction $\log_a$ est continue et strictement monotone, de sorte qu'elle possède une fonction réciproque continue appelée « exponentielle de base a » et notée $\exp_a$, définie sur tout $\mathbf{R}$ et prenant toutes les valeurs strictement positives. La boucle est ainsi bouclée : on retrouve les fonctions exponentielles comme fonctions réciproques des fonctions logarithmes. Cependant, l'exponentielle (de base e) ne joue pas de rôle particulier dans cette approche, car on n'a pas étudié la dérivée de ces fonctions.

6. La méthode d'Euler

Il s'agit d'une méthode générale pour construire une solution approchée d'une équation différentielle. On se donne donc un intervalle I de $\mathbf{R}$ et un point t_0 de I, ainsi qu'une fonction $f : I \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, pour l'instant simplement supposée continue. On cherche à résoudre l'équation

$$y' = f(t, y) \tag{4}$$

avec condition initiale $y(t_0) = y_0$. Cela inclut par exemple la recherche d'une primitive d'une fonction continue (cas où f ne dépend pas de la deuxième variable).

Pour approcher la valeur de y en $t_0 + T$ (avec par exemple $T > 0$), on subdivise l'intervalle $[t_0, t_0 + T]$ (contenu dans I) en n parties égales (pour simplifier). On pose donc $t_j = t_0 + \frac{j}{n}T$ et on construit une fonction y_n continue affine par morceaux telle que, sur l'intervalle $]t_j, t_{j+1}[$, on ait $y_n'(t) = f(t_j, y_n(t_j))$, en posant

$$y_n(t) = y_n(t_j) + (t - t_j) f(t_j, y_n(t_j)) \qquad \text{pour} \quad t \in [t_j, t_{j+1}]$$

de sorte que si l'on pose $y_{n,j} = y_n(t_j)$, on a

$$y_{n,j+1} = y_{n,j} + \frac{T}{n} f(t_j, y_{n,j})$$

Pour montrer que la suite de fonctions (y_n) converge vers une solution de l'équation (4), nous allons faire l'hypothèse (forte)[4] que f est *K-lipschitzienne en chacune des variables,* c'est-à-dire que l'on a

$$|f(u',x') - f(u,x)| \leqslant K(|u'-u| + |x'-x|) \tag{5}$$

pour $u, u' \in [t_0, t_0+T]$ et $x, x' \in \mathbf{R}$. C'est le cas si chacune des dérivées partielles de f existe et est bornée sur $[t_0, t_0+T] \times \mathbf{R}$. Elle est par exemple réalisée pour l'équation $y' = y$ étudiée dans le théorème 1 et pour l'équation $y' = 1/t$ qui peut servir à définir le logarithme.

Majoration de $|f(t, y_n(t))|$. L'inégalité (5) entraîne

$$\begin{aligned} |y_{n,j+1} - y_{n,j}| &= \frac{T}{n}|f(t_j, y_{n,j})| \\ &\leqslant \frac{T}{n}\big(|f(t_j, y_{n,j}) - f(t_j, y_0)| + |f(t_j, y_0)|\big) \\ &\leqslant \frac{T}{n}\big(K|y_{n,j} - y_0| + M\big) \end{aligned}$$

où M est un majorant de $|f|$ sur $[t_0, t_0+T] \times \{y_0\}$. On en déduit

$$|y_{n,j+1} - y_0| \leqslant \Big(1 + \frac{KT}{n}\Big)|y_{n,j} - y_0| + \frac{MT}{n}$$

On a donc pour tout $j \in \{0, \ldots, n\}$ l'inégalité $|y_{n,j+1} - y_0| \leqslant a|y_{n,j} - y_0| + b$, avec $a = 1 + \frac{KT}{n}$ et $b = \frac{MT}{n}$. On en déduit, par récurrence sur j,

$$|y_{n,j} - y_0| \leqslant b\,\frac{a^j - 1}{a-1} \leqslant \frac{MT}{n}\frac{\Big(1 + \frac{KT}{n}\Big)^n}{\frac{KT}{n}}$$

On a ainsi borné uniformément les valeurs de la fonction y_n en les points t_j. Cette fonction étant affine entre ces points, on se convainc facilement que cette majoration est valable sur tout l'intervalle $[t_0, t_0+T]$. Il apparaît dans cette majoration le terme $\big(1 + \frac{KT}{n}\big)^n$. On sait depuis §1 qu'il est lui-même majoré[5] par e^{KT}. On obtient donc, pour tout $t \in [t_0, t_0+T]$,

$$|y_n(t) - y_0| \leqslant \frac{M}{K}\,e^{KT}$$

et aussi, en utilisant à nouveau (5), la majoration uniforme

$$|f(t, y_n(t))| \leqslant |f(t, y_0)| + K|y_n(t) - y_0| \leqslant M(e^{KT} + 1) \tag{6}$$

[4] Il faut de toute façon faire une hypothèse de ce genre si on veut être assuré qu'il existe une solution définie sur l'intervalle $[t_0, t_0+T]$ tout entier, car ce n'est pas le cas en général. Par exemple, la solution de l'équation différentielle $y' = y^2$ prenant en 0 la valeur 1 est la fonction $y(t) = \frac{1}{1-t}$. Elle n'est définie que sur l'intervalle $[0, 1[$.

[5] Attention de ne pas tourner en rond dans les raisonnements ! Noter que n'importe quelle majoration suffit ici.

La fonction y_n est une solution « approchée ». On a, pour $t \in]t_j, t_{j+1}[$,

$$\begin{array}{rcll} |y_n'(t) - f(t, y_n(t)| & = & |f(t_j, y_{n,j}) - f(t, y_n(t)| & \\ & \leqslant & K(t-t_j) + K|y_{n,j} - y_n(t)| & \text{par (5),} \\ & = & K(t-t_j) + K(t-t_j)|f(t_j, y_{n,j})| & \text{car } y_n \text{ est affine,} \\ & \leqslant & K\dfrac{T}{n} + K\dfrac{T}{n}M(e^{KT}+1) & \text{par (6).} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll} |y_n'(t) - f(t, y_n(t)| & = & |f(t_j, y_{n,j}) - f(t, y_n(t)| & \\ & \leqslant & K(t-t_j) + K|y_{n,j} - y_n(t)| & \\ & = & K(t-t_j) + K(t-t_j)|f(t_j, y_{n,j})| & \\ & \leqslant & K\dfrac{T}{n} + K\dfrac{T}{n}M(e^{KT}+1) & \text{par (6).} \end{array}$$

En intégrant, on obtient, pour $t \in [t_0, t_0 + T]$,

$$\begin{array}{rcl} \left| y_n(t) - y_0 - \displaystyle\int_{t_0}^t f(u, y_n(u))\, du \right| & \leqslant & \displaystyle\int_{t_0}^t \left| y_n'(u) - f(u, y_n(u)) \right| du \\ & \leqslant & \dfrac{KT}{n}(1 + M(e^{KT}+1))(t - t_0) \end{array}$$

On en déduit que *si la suite de fonctions* (y_n) *(ou une sous-suite) converge uniformément sur l'intervalle* $[t_0, t_0 + T]$ *vers une fonction* y, celle-ci vérifie

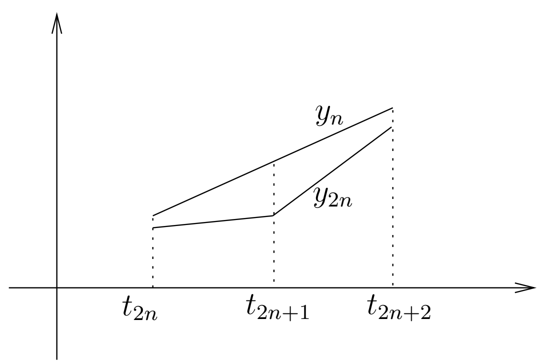
$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(u, y(u))\, du$$

c'est-à-dire $y(t_0) = y_0$ et, en dérivant, $y'(t) = f(t, y(t))$. C'est bien la solution cherchée.

La suite de fonctions (y_{2^m}) converge uniformément vers une solution. Nous choisissons cette sous-suite parce les subdivisions successives consistent simplement à diviser chaque intervalle en 2. Cela simplifie les notations, et suffit à montrer l'existence d'une solution. Un entier n étant donné, nous allons comparer les fonctions y_n

et y_{2n}. Posons $\varepsilon_j = |y_n(t_j) - y_{2n}(t_j)|$, avec $t_j = t_0 + \frac{j}{2n}T$. On a $\varepsilon_0 = 0$ et

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{2j+1} &= |y_n(t_{2j+1}) - y_{2n}(t_{2j+1})| \\
&\leqslant \Big|y_n(t_{2j}) + \frac{T}{2n} f(t_{2j}, y_n(t_{2j})) - y_{2n}(t_{2j}) - \frac{T}{2n} f(t_{2j}, y_{2n}(t_{2j}))\Big| \\
&\leqslant \varepsilon_{2j} + \frac{T}{2n} |f(t_{2j}, y_n(t_{2j})) - f(t_{2j}, y_{2n}(t_{2j}))| \\
&\leqslant \varepsilon_{2j} + \frac{T}{2n} K |y_n(t_{2j})) - y_{2n}(t_{2j})| \\
&= \Big(1 + \frac{KT}{2n}\Big) \varepsilon_{2j}
\end{aligned}$$



De la même façon,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{2j+2} &= |y_n(t_{2j+2}) - y_{2n}(t_{2j+2})| \\
&\leqslant \Big|y_n(t_{2j+1}) + \frac{T}{2n} f(t_{2j}, y_n(t_{2j})) - y_{2n}(t_{2j+1}) - \frac{T}{2n} f(t_{2j+1}, y_{2n}(t_{2j+1}))\Big| \\
&\leqslant \varepsilon_{2j+1} + \frac{T}{2n} |f(t_{2j}, y_n(t_{2j})) - f(t_{2j+1}, y_{2n}(t_{2j+1}))| \\
&\leqslant \varepsilon_{2j+1} + \frac{T}{2n} \big(K|t_{2j+1} - t_{2j}| + K|y_n(t_{2j}) - y_{2n}(t_{2j+1})|\big) \\
&\leqslant \varepsilon_{2j+1} + \frac{KT}{2n} \Big(\frac{T}{2n} + |y_n(t_{2j}) - y_n(t_{2j+1})| + |y_n(t_{2j+1}) - y_{2n}(t_{2j+1})|\Big) \\
&= \varepsilon_{2j+1} + \frac{KT}{2n} \Big(\frac{T}{2n} + \frac{T}{2n} |f(t_{2j}, y_n(t_{2j})| + \varepsilon_{2j+1}\Big) \\
&\leqslant \Big(1 + \frac{KT}{2n}\Big) \varepsilon_{2j+1} + \frac{KT^2(M(e^{KT} + 1) + 1)}{4n^2} \qquad \text{par (6).}
\end{aligned}$$

On a donc pour tout $j \in \{0, \ldots, 2n\}$ l'inégalité $\varepsilon_{j+1} \leqslant a\varepsilon_j + b$, avec $a = 1 + \frac{KT}{2n}$ et $b = \frac{KT^2(M(e^{KT}+1)+1)}{4n^2}$. On en déduit comme plus haut

$$\varepsilon_j \leqslant b\,\frac{a^j - 1}{a - 1} \leqslant \frac{KT^2(M(e^{KT}+1)+1)}{4n^2}\,\frac{\left(1 + \frac{KT}{2n}\right)^{2n}}{\frac{KT}{2n}}$$

On a ainsi majoré uniformément les différences des valeurs des fonctions y_n et y_{2n} en les points t_j. Ces fonctions étant affines entre ces points, cette majoration est valable sur tout l'intervalle $[t_0, t_0 + T]$. On obtient donc, pour tout $t \in [t_0, t_0 + T]$,

$$|y_n(t) - y_{2n}(t)| \leqslant \frac{T(M(e^{KT}+1)+1)}{2n}\,e^{KT}$$

Le critère de Cauchy entraîne que la suite de fonctions (y_{2^m}) converge uniformément sur l'intervalle $[t_0, t_0 + T]$. On a vu plus haut que sa limite est bien solution de l'équation différentielle (4), avec condition initiale $y(t_0) = y_0$.

Olivier DEBARRE et Nicole BOPP
Institut de Recherche Mathématique Avancée – UMR 7501
UFR de Mathématiques et Informatique
7 rue René Descartes
Université Louis Pasteur
67084 Strasbourg Cedex – France

e-mail : debarre@math.u-strasbg.fr