

Séparation et propriété de Deligne–Mumford des champs de modules d’intersections complètes lisses

Olivier Benoist

RÉSUMÉ

On montre que les champs de modules d’intersections complètes lisses dans \mathbb{P}^N polarisées par $\mathcal{O}(1)$ sont séparés (sauf dans le cas des quadriques) et de Deligne–Mumford (sauf pour quelques exceptions).

ABSTRACT

We show that the moduli stacks of smooth complete intersections in \mathbb{P}^N polarized by $\mathcal{O}(1)$ are separated (except for quadrics) and Deligne–Mumford (apart from a few exceptions).

1. Introduction

On commence par discuter la question générale de la séparation d’un champ de modules de variétés polarisées, avant de se restreindre au cas particulier abordé dans cet article: le champ de modules des intersections complètes lisses polarisées par $\mathcal{O}(1)$.

1.1. Séparation d’espaces de modules

Soit \mathcal{M} un champ de modules de variétés projectives lisses polarisées. On s’intéresse à la séparation du champ \mathcal{M} . Un résultat classique est le théorème de Matsusaka et Mumford ([17] Theorem 2):

THÉORÈME 1.1. *Si les variétés que \mathcal{M} paramètre ne sont pas birationnellement réglées (i.e. ne sont pas birationnelles à une variété de la forme $\mathbb{P}^1 \times Y$), le champ \mathcal{M} est séparé.*

On peut chercher à étendre ce résultat à d’autres classes de variétés. Commençons par une remarque facile et utile. Les stabilisateurs des points géométriques de \mathcal{M} s’identifient aux groupes d’automorphismes des variétés polarisées paramétrées par \mathcal{M} , qui sont des schémas en groupes affines. Si \mathcal{M} est séparé, ces stabilisateurs doivent être propres; comme ils sont donc propres et affines, ils sont même finis. On a montré:

REMARQUE 1.2. Une condition nécessaire pour que \mathcal{M} soit séparé est que les variétés polarisées que \mathcal{M} paramètre aient des groupes d’automorphismes finis.

Un cas particulier intéressant est celui où \mathcal{M} paramètre des variétés de Fano. Ce cas particulier est motivé par l’intervention en théorie de Mori de fibrations à fibres variétés de Fano, donc de familles de variétés de Fano.

Regardons des exemples de petite dimension. En dimension 1, la seule variété de Fano est \mathbb{P}^1 , dont le groupe d'automorphismes est de dimension > 0 ; par la remarque 1.2, la situation n'est pas intéressante.

En dimension 2, les variétés de Fano sont les surfaces de del Pezzo. Notons \mathcal{M} le champ de modules des surfaces de del Pezzo de degré d . Au vu de la remarque 1.2, la question de la séparation de \mathcal{M} est intéressante si $1 \leq d \leq 5$. Dans ce cas, l'article [10] propose une construction d'un espace de modules grossier pour \mathcal{M} à l'aide de théorie géométrique des invariants, qui montre que le champ \mathcal{M} est séparé (appliquer [18] Corollary 2.5).

En dimension 3, on peut parfois appliquer le théorème 1.1 de Matsusaka et Mumford via le corollaire suivant:

COROLLAIRE 1.3. *En caractéristique nulle, si \mathcal{M} paramètre des solides de Fano qui ne sont pas rationnels, \mathcal{M} est nécessairement séparé.*

Preuve. Soit X un solide de Fano birationnel à $\mathbb{P}^1 \times Y$. Comme X est de Fano et que nous sommes en caractéristique nulle, X est rationnellement connexe, de sorte que Y est une surface rationnellement connexe. Comme Y est recouverte par des courbes rationnelles très libres, toute forme pluricanonique sur Y est nulle. La classification des surfaces montre alors que Y est birationnelle à $\mathbb{P}^1 \times C$ pour C une courbe. Comme Y est rationnellement connexe, C est rationnelle, de sorte que Y , donc X sont rationnels. On a montré, comme voulu, qu'un solide de Fano non rationnel n'est pas birationnellement réglé. \square

Pour certaines collections de solides de Fano à groupes d'automorphismes finis, par exemple celle étudiée dans [5], la question de la séparation de \mathcal{M} est ouverte (on sait seulement, par [2] théorème 5.6, qu'une variété générale dans cette famille n'est pas rationnelle, de sorte que le corollaire 1.3 ne s'applique pas):

QUESTION 1.4. En caractéristique nulle, le champ de modules \mathcal{M} des solides de Fano de nombre de Picard 1, d'indice 1 et de degré 10 est-il séparé?

Énonçons la question générale que ces exemples illustrent:

QUESTION 1.5. Quand un champ de modules de variétés de Fano à groupes d'automorphismes finis est-il séparé?

L'objectif de ce texte est de répondre à la question 1.5 dans le cas particulier où \mathcal{M} paramètre des intersections complètes lisses.

1.2. Énoncés des théorèmes

Dans tout ce texte, on travaille sur $\text{Spec}(\mathbb{Z})$, et on fixe $N \geq 2$, $1 \leq c \leq N - 1$ et $2 \leq d_1 \leq \dots \leq d_c$ des entiers. Par intersection complète (sur un corps k), on vaudra dire sous-schéma fermé de codimension c dans \mathbb{P}_k^N défini par c équations homogènes de degrés d_1, \dots, d_c . On notera $n = N - c \geq 1$ la dimension de ces intersections complètes.

Soit H l'ouvert du schéma de Hilbert de $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^N$ paramétrant les intersections complètes lisses (voir par exemple [20] 4.6.1). On note \mathcal{M} le champ de modules des intersections complètes lisses polarisées par $\mathcal{O}(1)$. Par définition, c'est le champ quotient $[\text{PGL}_{N+1} \backslash H]$.

Remarquons que, si $d_1 + \dots + d_c < N + 1$, les variétés considérées sont de Fano. Pour ces valeurs des paramètres, on étudie donc un cas particulier de la question 1.5.

Le premier théorème principal est:

THÉORÈME 1.6. *Le champ \mathcal{M} est de Deligne–Mumford sauf dans les cas suivants:*

- (i) *Si $c = 1$ et $d_1 = 2$.*
- (ii) *Si $N = 2$, $c = 1$, $d_1 = 3$, auquel cas il est de Deligne–Mumford au-dessus de $\text{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{3}])$.*
- (iii) *Si $N \geq 3$ est impair, $c = 2$, $d_1 = d_2 = 2$, auquel cas il est de Deligne–Mumford au-dessus de $\text{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{2}])$.*

Ce théorème signifie que, sauf pour quelques exceptions, les automorphismes projectifs d'une intersection complète lisse forment un schéma en groupes fini réduit. Il y a deux types d'exceptions différents: dans le cas (i), ces groupes sont de dimension > 0 ; dans les cas (ii) et (iii), ils sont finis non réduits.

Au vu de la remarque 1.2, cet énoncé peut être vu comme un résultat facile à tester indiquant que l'étude de la séparation de \mathcal{M} est intéressante – sauf si $c = 1$ et $d_1 = 2$. C'est ce qui a motivé pour nous son étude. Ce n'est cependant pas un énoncé plus faible que la séparation du champ \mathcal{M} car celle-ci ne dit rien sur le caractère réduit de ces groupes d'automorphismes.

Le champ de modules des quadriques ne peut être séparé par la remarque 1.2 car le groupe de leurs automorphismes projectifs est de dimension > 0 . On montre que ce contre-exemple trivial est le seul:

THÉORÈME 1.7. *Le champ \mathcal{M} est séparé, sauf si $c = 1$ et $d_1 = 2$.*

Ce théorème permet d'appliquer le théorème de Keel et Mori [12] pour obtenir:

COROLLAIRE 1.8. *Si l'on n'a pas $c = 1$ et $d_1 = 2$, le champ \mathcal{M} admet un espace de modules grossier M qui est un espace algébrique séparé.*

Il est alors naturel d'étudier l'espace algébrique M : est-ce un schéma, un schéma quasi-projectif? Cette question est discutée, et résolue dans des cas particuliers dans [3].

Les deux parties de ce texte sont consacrées aux preuves respectives des théorèmes 1.7 (théorème 2.1) et 1.6 (théorème 3.9). On renvoie à ces parties pour une discussion plus précise de ces énoncés, des cas particuliers déjà connus...

Remarquons que, contrairement à ce qu'on a laissé entendre plus haut, et qui aurait été plus naturel, l'étude de la séparation de \mathcal{M} précède ici celle des groupes d'automorphismes. La raison pour cela est que, faute d'argument plus simple, on déduira le théorème 3.1 quand $N \geq 5$ est impair, $c = 2$, $d_1 = d_2 = 2$ et $\text{car}(k) = 2$ de la séparation de \mathcal{M} .

2. Séparation

Introduisons quelques notations. Un trait T est le spectre d'un anneau de valuation discrète. Si T est un trait, on notera toujours η son point générique et s son point spécial, R l'anneau de valuation discrète dont il est le spectre, K le corps de fractions de R , k son corps résiduel, t une uniformisante, v la valuation et $\pi: R \rightarrow k$ la spécialisation.

2.1. Introduction

2.1.1. *Énoncé du théorème.* On va montrer dans cette partie le théorème suivant:

THÉORÈME 2.1. *Le champ \mathcal{M} est séparé, sauf si $c = 1$ et $d_1 = 2$.*

On peut reformuler plus concrètement le théorème 2.1. C'est sous la dernière forme (iii) que nous le démontrerons.

LEMME 2.2. *Les assertions suivantes sont équivalentes:*

- (i) *Le champ \mathcal{M} est séparé.*
- (ii) *Le groupe PGL_{N+1} agit proprement sur H .*
- (iii) *Pour tout trait T à corps résiduel algébriquement clos, si $Z, Z' \subset \mathbb{P}_T^N$ sont des sous- T -schémas fermés plats sur T dont les fibres géométriques sont des intersections complètes lisses, tout automorphisme $f_\eta : \mathbb{P}_\eta^N \rightarrow \mathbb{P}_\eta^N$ tel que $f_\eta(Z_\eta) = Z'_\eta$ se prolonge en un automorphisme $f : \mathbb{P}_T^N \rightarrow \mathbb{P}_T^N$ tel que $f(Z) = Z'$.*

Preuve. Considérons le diagramme 2-cartésien ci-dessous, où l'on a noté Δ le morphisme diagonal de \mathcal{M} et $P : H \rightarrow \mathcal{M}$ la présentation canonique de \mathcal{M} :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{PGL}_{N+1} \times H & \xrightarrow{(\sigma, p_2)} & H \times H \\ \downarrow p_2 \circ P & & \downarrow (P, P) \\ \mathcal{M} & \xrightarrow{\Delta} & \mathcal{M} \times \mathcal{M}. \end{array} \quad (1)$$

Comme P est lisse et surjectif, (P, P) est également lisse et surjectif, donc un recouvrement fppf. Par conséquent, par [14] 7.11.1, (σ, p_2) est propre si et seulement si Δ l'est. Enfin, par [14] 7.7, Δ est propre si et seulement si \mathcal{M} est séparé. Cela montre l'équivalence entre les deux premières assertions.

L'équivalence entre les deux dernières est exactement le critère valuatif de propriété appliqué au morphisme $\mathrm{PGL}_{N+1} \times H \rightarrow H \times H$ (on peut se restreindre aux corps résiduels algébriquement clos par la remarque 7.3.9 (i) de [8]). \square

On a déjà vu qu'il était nécessaire d'exclure le cas des quadriques par la remarque 1.2. On peut aussi proposer un contre-exemple explicite à (iii): on prend $R = k[[t]]$, $Z = Z'$ définis par l'équation $X_0 X_N + Q(X_1, \dots, X_{N-1}) = 0$ où Q est une forme quadratique ordinaire sur k , et on choisit pour f_η l'automorphisme de \mathbb{P}_η^N donné par l'équation $f_\eta([x_0 : \dots : x_N]) = [t^{-1}x_0 : x_1 : \dots : x_{N-1} : tx_N]$.

Enfin, plusieurs cas du théorème 2.1 sont déjà connus.

Le cas $c = 1$ et $d_1 \geq 3$ sous sa forme (ii) est conséquence de [18] Corollary 2.5 appliqué à [18] Proposition 4.2. Dans cette référence, la base est un corps de caractéristique nulle, mais ces arguments fonctionnent sur une base quelconque (par exemple $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$) comme expliqué dans [21].

Le cas $d_1 + \dots + d_c \geq N + 1$ sous sa forme (iii) est conséquence du théorème 1.1 de Matsusaka et Mumford. En effet, le fibré canonique des intersections complètes étant $\mathcal{O}(d_1 + \dots + d_c - N - 1)$, il a des sections globales sous cette hypothèse; cela empêche les intersections complètes considérées d'être birationnellement réglées.

2.1.2. *Conjecture de Pukhlikov.* Dans [19], Pukhlikov, motivé par des questions de géométrie birationnelle, considère l'énoncé ci-dessous plus général que (iii):

- (iv) *Pour tout trait T à corps résiduel algébriquement clos, si $Z, Z' \subset \mathbb{P}_T^N$ sont des sous- T -schémas fermés réguliers et plats sur T dont les fibres géométriques sont des intersections complètes, tout automorphisme $f_\eta : \mathbb{P}_\eta^N \rightarrow \mathbb{P}_\eta^N$ tel que $f_\eta(Z_\eta) = Z'_\eta$ se prolonge en un automorphisme $f : \mathbb{P}_T^N \rightarrow \mathbb{P}_T^N$ tel que $f(Z) = Z'$.*

Pour être précis, Pukhlikov travaille avec $n \geq 2$ et $R = \mathbb{C}[[t]]$. Il montre (iv) si $c = 1$ et $d_1 \geq 3$, et il conjecture que, à c fixé, si N est grand et quitte à exclure un nombre fini de multidegrés, (iv) est vrai.

Le cas $c \geq 2$, même dans le cas abordé ici où Z et Z' sont lisses sur T , fait apparaître la difficulté suivante par rapport au cas $c = 1$ traité par Pukhlikov: il n'y a aucune raison pour qu'on puisse trouver c équations F_1, \dots, F_c de Z_η se spécialisant en c équations définissant Z_s telles que $f_\eta^{-1*}F_1, \dots, f_\eta^{-1*}F_c$ se spécialisent en c équations définissant Z'_s . Cela empêche de montrer (iii) en comparant directement les équations de Z_s et Z'_s .

2.1.3. Plan de la preuve. Cette partie est organisée comme suit. Dans le deuxième paragraphe, on regroupe tous les résultats standards sur les intersections complètes qui seront utiles par la suite. Les deux paragraphes suivants sont consacrés à une preuve par l'absurde du théorème 2.1 sous sa forme (iii) ci-dessus. Dans le troisième paragraphe, le lemme 2.6 fournit, à l'aide d'arguments géométriques, des restrictions a priori sur Z_s et Z'_s . Dans le quatrième paragraphe, on conclut en manipulant de manière explicite les équations de petit degré de Z_s et Z'_s . On distingue pour cela trois cas: le cas $d_1 \geq 3$ est traité au paragraphe 2.4.2, le cas $c \geq 2$, $d_1 = d_2 = 2$ au paragraphe 2.4.3, et le cas $c \geq 2$, $d_1 = 2$, $d_2 \geq 3$, plus délicat, au paragraphe 2.4.4.

2.2. Généralités sur les intersections complètes

On rassemble ici des résultats standards sur les intersections complètes pour pouvoir y faire référence par la suite. Dans ce paragraphe, et dans ce paragraphe seulement, on autorise $c = 0$.

Si Z est une intersection complète, une « suite régulière globale » définissant Z est la donnée de c équations homogènes la définissant.

PROPOSITION 2.3. *Soit k un corps algébriquement clos et $Z \subset \mathbb{P}_k^N$ une intersection complète définie par des équations F_1, \dots, F_c . On note \mathcal{I}_Z son faisceau d'idéaux.*

- (i) *Les équations F_1, \dots, F_c sont une suite régulière; Z est Cohen–Macaulay.*
- (ii) *Si $0 < q < n$ et $d \in \mathbb{Z}$, $H^q(Z, \mathcal{O}_Z(d)) = 0$.*
- (iii) *Si $d \in \mathbb{Z}$, la flèche de restriction $H^0(\mathbb{P}_k^N, \mathcal{O}(d)) \rightarrow H^0(Z, \mathcal{O}_Z(d))$ est surjective. Son noyau, égal à $H^0(\mathbb{P}_k^N, \mathcal{I}_Z(d))$, est constitué des polynômes homogènes de la forme $\sum_i Q_i F_i$, $Q_i \in H^0(\mathbb{P}_k^N, \mathcal{O}(d - d_i))$. La dimension de ce noyau ne dépend que de N , c , d_1, \dots, d_c et d .*
- (iv) *La schéma Z est connexe. Si Z est lisse, Z est intègre.*
- (v) *Le sous-schéma Z n'est schématiquement inclus dans aucun hyperplan de \mathbb{P}_k^N .*
- (vi) *Toute base de $H^0(\mathbb{P}_k^N, \mathcal{I}_Z(d_1))$ peut être complétée en une suite régulière globale définissant Z .*
- (vii) *Si $F \in H^0(\mathbb{P}_k^N, \mathcal{I}_Z(d))$ ne s'écrit pas $\sum_i Q_i F_i$ où la somme porte sur les i tels que $d_i < d$, F fait partie d'une suite régulière globale définissant Z .*
- (viii) *Si Z est lisse, les variétés $\{F_i = 0\}$ sont lisses et transverses en tout point de Z .*

Preuve. (i) Posons $Z_i = \{F_1 = \dots = F_i = 0\}$. Par Hauptidealsatz, Z_{i+1} est de codimension au plus 1 dans Z_i , de sorte que, comme $Z = Z_c$ est de codimension c dans $\mathbb{P}_k^N = Z_0$, Z_i est nécessairement de codimension pure i dans \mathbb{P}_k^N . Montrons alors par récurrence sur $0 \leq i \leq c$ que F_1, \dots, F_i forment une suite régulière et que Z_i est Cohen–Macaulay. Pour $i = 0$, c'est évident. Supposons-le vrai pour i . Alors F_{i+1} ne s'annule pas sur une composante irréductible de Z_i car Z_{i+1} est de codimension 1 dans Z_i . Il ne s'annule pas non plus sur un point immergé de Z_i car Z_i , Cohen–Macaulay, n'en a pas. Ainsi, F_{i+1} n'est pas un diviseur de zéro sur Z_i de sorte que F_1, \dots, F_{i+1} forment une suite régulière. On en déduit que Z_{i+1} est localement

intersection complète, donc Cohen–Macaulay. Cela conclut la récurrence; on obtient l'énoncé voulu en faisant $i = c$.

(ii) On montre ceci par récurrence sur c , le cas $c = 0$ étant connu. Comme, par (i), F_c n'est pas un diviseur de zéro sur Z_{c-1} , la multiplication par F_c induit une suite exacte courte de faisceaux sur Z_{c-1} : $0 \rightarrow \mathcal{O}_{Z_{c-1}}(d - d_c) \rightarrow \mathcal{O}_{Z_{c-1}}(d) \rightarrow \mathcal{O}_{Z_c}(d) \rightarrow 0$. En écrivant la suite exacte longue de cohomologie associée et en utilisant les annulations données par l'hypothèse de récurrence appliquée à Z_{c-1} , on obtient les annulations désirées.

(iii) Que le noyau de cette flèche de restriction soit $H^0(\mathbb{P}_k^N, \mathcal{I}_Z(d))$ résulte de la suite longue de cohomologie associée à la suite exacte courte $0 \rightarrow \mathcal{I}_Z \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^N} \rightarrow \mathcal{O}_Z \rightarrow 0$.

Montrons la surjectivité de l'application de restriction. On raisonne par récurrence sur c et on utilise la suite exacte longue de cohomologie suivante: $0 \rightarrow H^0(Z_{c-1}, \mathcal{O}(d - d_c)) \rightarrow H^0(Z_{c-1}, \mathcal{O}(d)) \rightarrow H^1(Z_{c-1}, \mathcal{O}(d - d_c))$. Par (ii) le H^1 s'annule, ce qui permet de conclure.

En particulier, on a une suite exacte courte: $0 \rightarrow H^0(\mathbb{P}_k^N, \mathcal{I}_Z(d)) \rightarrow H^0(\mathbb{P}_k^N, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^N}(d)) \rightarrow H^0(Z, \mathcal{O}_Z(d)) \rightarrow 0$. Pour montrer que $h^0(\mathbb{P}_k^N, \mathcal{I}_Z(d))$ ne dépend pas que de N , c , d_1, \dots, d_c et d , il suffit de montrer que c'est le cas de $h^0(Z, \mathcal{O}_Z(d))$. Cela se montre par récurrence sur c en utilisant à nouveau la suite exacte $0 \rightarrow H^0(Z_{c-1}, \mathcal{O}(d - d_c)) \rightarrow H^0(Z_{c-1}, \mathcal{O}(d)) \rightarrow H^0(Z_c, \mathcal{O}(d)) \rightarrow 0$.

Il reste à décrire les polynômes homogènes inclus dans ce noyau. On raisonne encore par récurrence sur c , et on procède par chasse au diagramme dans le diagramme commutatif ci-dessous où l'on a vu que la deuxième ligne est exacte, où les flèches verticales sont surjectives de noyau connu par hypothèse de récurrence et où les flèches horizontales de gauche sont données par la multiplication par F_c .

$$\begin{array}{ccc} H^0(\mathbb{P}_k^N, \mathcal{O}(d - d_c)) & \twoheadrightarrow & H^0(\mathbb{P}_k^N, \mathcal{O}(d)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 \gg H^0(Z_{c-1}, \mathcal{O}(d - d_c)) & \gg & H^0(Z_{c-1}, \mathcal{O}(d)) \gg H^0(Z_c, \mathcal{O}(d)) \gg 0. \end{array}$$

(iv) On applique (iii) avec $d = 0$. Il vient $H^0(Z, \mathcal{O}_Z) = k$: Z est bien connexe. Si Z est lisse et connexe, elle est intègre.

(v) On applique (iii) avec $d = 1$: la description explicite de $H^0(\mathbb{P}_k^N, \mathcal{I}_Z(1))$ montre qu'il est nul de sorte que $H^0(\mathbb{P}_k^N, \mathcal{O}(1)) \rightarrow H^0(Z, \mathcal{O}_Z(1))$ est injective, ce qu'on voulait.

(vi) On applique (iii) avec $d = d_1$: $H^0(\mathbb{P}_k^N, \mathcal{I}_Z(d_1))$ est constitué des combinaisons linéaires à coefficients dans k des F_i qui sont de degré d_1 . Si l'on remplace les F_i de degré d_1 par une autre base de $H^0(\mathbb{P}_k^N, \mathcal{I}_Z(d_1))$, on obtient une nouvelle collection de c équations définissant Z .

(vii) Par (iii), on peut écrire $F = \sum_i Q_i F_i$ et il existe i tel que $d = d_i$ et Q_i est un scalaire non nul. Alors, en remplaçant F_i par F , on obtient une nouvelle collection de c équations définissant Z .

(viii) Par lissité, si $z \in Z$, $T_z Z$ est de codimension c dans $T_z \mathbb{P}_k^N$. Comme $T_z Z = \bigcap_{i=1}^c T_z \{F_i = 0\}$, les $T_z \{F_i = 0\}$ sont nécessairement des hyperplans transverses de $T_z \mathbb{P}_k^N$, de sorte que les $\{F_i = 0\}$ sont lisses et transverses en z . \square

LEMME 2.4. *Soit T un trait à corps résiduel algébriquement clos et $Z \subset \mathbb{P}_T^N$ un sous- T -schéma fermé plat sur T dont les fibres géométriques sont des intersections complètes. Soit $F \in H^0(\mathbb{P}_k^N, \mathcal{O}(d))$ un polynôme homogène de degré d à coefficients dans k s'annulant sur Z_s . Alors on peut relever F en un polynôme homogène de degré d à coefficients dans R s'annulant sur Z .*

Preuve. Notons \mathcal{I}_Z le faisceau d'idéaux de Z . Comme \mathbb{P}_T^N et Z sont plats sur T , la suite exacte $0 \rightarrow \mathcal{I}_Z \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_T^N} \rightarrow \mathcal{O}_Z \rightarrow 0$ montre que \mathcal{I}_Z est plat sur T . De plus, cette suite exacte reste alors exacte après restriction à la fibre spéciale, de sorte que $\mathcal{I}_Z|_{\mathbb{P}_k^N} = \mathcal{I}_{Z_s}$.

On a $h^0(\mathbb{P}_\eta^N, \mathcal{I}_Z(d)) = h^0(\mathbb{P}_k^N, \mathcal{I}_Z(d)) = h^0(\mathbb{P}_k^N, \mathcal{I}_{Z_s}(d))$ où la première égalité découle de [9] III 9.3 et la seconde de 2.3 (iii). Ainsi, les hypothèses de [9] III 12.9 appliqué au faisceau $\mathcal{I}_Z(d)$ sur \mathbb{P}_T^N et au morphisme structurel $q: \mathbb{P}_T^N \rightarrow T$ sont vérifiées. Par conséquent, $q_*\mathcal{I}_Z(d)$ est localement libre sur T (donc libre car T est local), et $q_*\mathcal{I}_Z(d) \otimes_R k \rightarrow H^0(\mathbb{P}_k^N, \mathcal{I}_{Z_s}(d))$ est un isomorphisme.

On en déduit que $F \in H^0(\mathbb{P}_k^N, \mathcal{I}_{Z_s}(d))$ se relève en un élément de $\tilde{F} \in H^0(\mathbb{P}_T^N, \mathcal{I}_Z(d))$, c'est-à-dire en un élément de $H^0(\mathbb{P}_T^N, \mathcal{O}(d))$ nul sur Z . On conclut car, par [9] III 5.1 (a), $H^0(\mathbb{P}_T^N, \mathcal{O}(d))$ est constitué des polynômes homogènes de degré d à coefficients dans R . \square

2.3. Automorphismes projectifs

Commençons la preuve du théorème 2.1. On fixe pour cela un trait T à corps résiduel algébriquement clos, $Z, Z' \subset \mathbb{P}_T^N$ des sous- T -schémas fermés plats sur T dont les fibres géométriques sont des intersections complètes lisses, et un automorphisme $f_\eta: \mathbb{P}_\eta^N \rightarrow \mathbb{P}_\eta^N$ tel que $f_\eta(Z_\eta) = Z'_\eta$.

2.3.1. Description de l'automorphisme f_η .

LEMME 2.5. *On peut supposer qu'il existe des entiers $\alpha_0 \leq \dots \leq \alpha_N$ tels que f_η soit donné par la formule $f_\eta([x_0 : \dots : x_N]) = [t^{\alpha_0}x_0 : \dots : t^{\alpha_N}x_N]$.*

Preuve. L'automorphisme f_η est induit par un automorphisme linéaire $f_K: K^{N+1} \rightarrow K^{N+1}$. Quitte à composer f_K avec une homothétie, on peut supposer que f_K induit $f_R: R^{N+1} \rightarrow R^{N+1}$ R -linéaire. Comme $f_R \otimes K$ est surjective, $\text{Coker}(f_R)$ est de torsion, de sorte que f_R est injective et $\text{Im}(f_R)$ est un sous- R -module de rang maximal. Par le théorème de la base adaptée, on peut trouver des éléments e_0, \dots, e_N de R^{N+1} , f_0, \dots, f_N de R^{N+1} et $\lambda_0, \dots, \lambda_N$ de R tels que $(f_R(e_i))$ soit une base de $\text{Im}(f_R)$, (f_i) soit une base de R^{N+1} et $f_R(e_i) = \lambda_i f_i$. Comme tout élément de R s'écrit comme une unité fois une puissance de l'uniformisante, on peut supposer $\lambda_i = t^{\alpha_i}$. Quitte à réordonner les e_i et les f_i , on peut supposer que $\alpha_0 \leq \dots \leq \alpha_N$. Remarquons enfin que comme f_R est injective, les e_i forment une base de R^{N+1} .

On a montré que quitte à composer à la source et au but par un automorphisme de \mathbb{P}_T^N , f_η est de la forme voulue. \square

Désormais, on suppose que f_η est donné par une telle formule.

Si $\alpha_0 = \dots = \alpha_N$, f_η est l'identité et se prolonge donc en l'identité $f: \mathbb{P}_T^N \rightarrow \mathbb{P}_T^N$. Comme, par platitude, Z et Z' sont les adhérences de Z_η et Z'_η , et que $f_\eta(Z_\eta) = Z'_\eta$, on a $f(Z) = Z'$ comme voulu.

Dans toute la suite, on suppose au contraire que $\alpha_0 < \alpha_N$, et on cherche à obtenir une contradiction.

2.3.2. *Spécialisation de l'automorphisme f_η .* On définit p_* et p^* de sorte que $\alpha_0 = \dots = \alpha_{p_*} < \alpha_{p_*+1}$ et $\alpha_N = \dots = \alpha_{N-p^*} > \alpha_{N-p^*-1}$. On note $P_* = \{X_{p_*+1} = \dots = X_N = t = 0\}$, $P^* = \{X_0 = \dots = X_{N-p^*-1} = t = 0\}$, $L_* := \{X_{N-p^*} = \dots = X_N = t = 0\}$ et $L^* := \{X_0 = \dots = X_{p_*} = t = 0\}$; ce sont des sous-espaces linéaires de \mathbb{P}_k^N .

LEMME 2.6. *On a $P_* \subset Z'_s$. De même, $P^* \subset Z_s$.*

Preuve. On montre l'énoncé concernant Z'_s ; l'autre est symétrique.

L'isomorphisme f_η induit une application rationnelle $f: \mathbb{P}_T^N \dashrightarrow \mathbb{P}_T^N$. L'expression de f_η montre que f est définie hors de L^* et que sa restriction f_s à la fibre spéciale est la projection depuis L^* sur P_* .

Notons W l'adhérence de $f_s(Z_s \setminus (Z_s \cap L^*))$, munie de sa structure réduite. Par description de f_s , $W \subset P_*$. Comme, par platitude, Z et Z' sont les adhérences de Z_η et Z'_η , et que $f_\eta(Z_\eta) \subset Z'_\eta$, on a $f(Z \setminus (Z \cap L^*)) \subset Z'$. En se restreignant aux fibres spéciales, il vient: $W \subset Z'_s$. Si $W = P_*$, on peut conclure; on suppose par l'absurde que ce n'est pas le cas.

Remarquons que Z_s n'est pas ensemblistement inclus dans L^* . Si c'était le cas, comme Z_s est réduit, il serait schématiquement inclus dans L^* , donc dans un hyperplan de \mathbb{P}_k^N , et cela contredit 2.3 (v). Ainsi, $(Z_s \cap L^*) \neq Z_s$ de sorte que, Z_s étant intègre par 2.3 (iv), $Z_s \setminus (Z_s \cap L^*)$ est dense dans Z_s , donc de dimension n .

Si $f_s: Z_s \setminus (Z_s \cap L^*) \rightarrow W$ était génériquement finie, W serait de dimension n . Comme $W \subset Z'_s$, W serait une composante irréductible de Z'_s , et comme Z'_s est intègre par 2.3 (iv), on aurait $Z'_s = W$, donc $Z'_s \subset P_*$. Alors Z'_s serait schématiquement inclus dans un hyperplan de \mathbb{P}_k^N , ce qui contredit 2.3 (v). On a montré que $f_s: Z_s \setminus (Z_s \cap L^*) \rightarrow W$ n'est pas génériquement finie.

Soit maintenant w un point fermé de W ; on choisit w général de sorte que w est un point lisse de W , et que la fibre F de $f_s: Z_s \setminus (Z_s \cap L^*) \rightarrow W$ en w est de dimension ≥ 1 . Comme w est un point lisse de W et que $W \neq P_*$, il résulte que $T_w W$ est un sous-espace linéaire strict de P_* . Notons C le cône réduit de sommet L^* et de base W : on a $Z_s \subset C$ ensemblistement car $f_s(Z_s \setminus (Z_s \cap L^*)) \subset W$, donc schématiquement car Z_s est réduit. Ainsi, pour tout $f \in F$, comme $T_f C = \langle T_w W, L^* \rangle$, $T_f Z_s \subset \langle T_w W, L^* \rangle$. Comme $T_w W$ est un sous-espace linéaire strict de P_* , $\langle T_w W, L^* \rangle$ est un sous-espace linéaire strict de \mathbb{P}_k^N . On obtient une contradiction car, par [15] 6.3.5, 6.3.6, une hypersurface de \mathbb{P}_k^N ne peut pas être tangente à Z_s le long d'une sous-variété de dimension ≥ 1 . \square

COROLLAIRE 2.7. *Si $F \in H^0(\mathbb{P}_k^N, \mathcal{O}(d))$ fait partie d'une suite régulière globale définissant Z_s , $\{F = 0\}$ contient P^* et y est lisse.*

De même, si $F' \in H^0(\mathbb{P}_k^N, \mathcal{O}(d))$ fait partie d'une suite régulière globale définissant Z'_s , $\{F' = 0\}$ contient P_ et y est lisse.*

Preuve. C'est une conséquence du lemme 2.6 et de 2.3 (viii). \square

2.4. Étude des équations de petit degré

Notons \mathfrak{M}_d l'ensemble des monômes de degré d en X_0, \dots, X_N . Si $M = X_0^{e_0} \dots X_N^{e_N}$, on note $\deg_\alpha(M) = \sum_i \alpha_i e_i$: c'est le α -degré du monôme M . Si $F \in H^0(\mathbb{P}_k^N, \mathcal{O}(d))$, on dit qu'un monôme M intervient dans F si le coefficient de M dans F n'est pas nul. On dit qu'une variable X_i intervient dans F si un monôme qu'elle divise intervient dans F .

2.4.1. Spécialisation d'équations. Soit $F \in H^0(\mathbb{P}_k^N, \mathcal{O}(d))$ une équation de degré d non nulle de Z_s . Par le lemme 2.4, on peut la relever en $\tilde{F} = \sum_{M \in \mathfrak{M}_d} a_M M \in H^0(\mathbb{P}_T^N, \mathcal{O}(d))$, une équation de degré d non nulle de Z . Vu l'expression de f_η , $\sum t^{-\deg_\alpha(M)} a_M M$ est une équation de degré d non nulle de Z'_η . Notons $r_{\tilde{F}} = \min_{M \in \mathfrak{M}_d} (v(a_M) - \deg_\alpha(M))$, considérons $\tilde{F}' = \sum t^{-\deg_\alpha(M) - r_{\tilde{F}}} a_M M \in H^0(\mathbb{P}_T^N, \mathcal{O}(d))$ et notons $F' = \pi(\tilde{F}') \in H^0(\mathbb{P}_k^N, \mathcal{O}(d))$. Par choix de $r_{\tilde{F}}$, F' est non nulle. Comme $Z'_\eta \subset \{\tilde{F}' = 0\}$, et que Z' est son adhérence par platitude, $Z' \subset \{\tilde{F}' = 0\}$. Prenant les fibres spéciales, on obtient $Z'_s \subset \{F' = 0\}$: F' est une équation de degré d non nulle de Z'_s .

2.4.2. Équations de degré $d \geq 3$. On garde les notations du paragraphe 2.4.1.

LEMME 2.8. *Supposons que $d \geq 3$ et que F fasse partie d'une suite régulière globale définissant Z_s . Alors $\{F' = 0\}$ contient P_* et y est singulier.*

De plus, les monômes intervenant dans F' sont de α -degré $\geq \alpha_0 + (d-1)\alpha_N$.

Preuve. Si aucun monôme $X_{i_1} \dots X_{i_{d-1}} X_j$ avec $N - p^* \leq i_1, \dots, i_{d-1} \leq N$ n'intervient dans F , on voit que $P^* \subset \{F = 0\}$, et le critère jacobien montre que $\{F = 0\}$ est singulier le long de P^* . Cela contredit le corollaire 2.7.

Soit donc M un monôme de cette forme intervenant dans F . Alors $r_{\bar{F}} \leq v(a_M) - \deg_\alpha(M) = -\deg_\alpha(M) \leq -(\alpha_0 + (d-1)\alpha_N)$.

Soit maintenant M' un monôme intervenant dans F' , de sorte que $v(a_{M'}) - \deg_\alpha(M') - r_{\bar{F}} = 0$. Alors $\deg_\alpha(M') = v(a_{M'}) - r_{\bar{F}} \geq -r_{\bar{F}} \geq \alpha_0 + (d-1)\alpha_N$. Comme $d \geq 3$, et que $\alpha_0 < \alpha_N$, cela implique $\deg_\alpha(M') > (d-1)\alpha_0 + \alpha_N$. En particulier, aucun monôme de la forme $X_{j_1} \dots X_{j_{d-1}} X_i$ avec $0 \leq j_1, \dots, j_{d-1} \leq p_*$ n'intervient dans F' . Cela implique que $\{F' = 0\}$ contient P_* et le critère jacobien montre que $\{F' = 0\}$ est singulier le long de P_* . \square

On peut à présent montrer le théorème 2.1 si $d_1 \geq 3$.

Preuve du théorème 2.1 si $d_1 \geq 3$. On prend pour F une équation de degré d_1 de Z_s qui fait partie d'une suite régulière globale définissant Z_s . Alors, par le lemme 2.8, $\{F' = 0\}$ contient P_* et y est singulier.

Comme F' est une équation non nulle de degré d_1 de Z'_s , par 2.3 (vi), elle fait partie d'une suite régulière globale définissant Z'_s . Cela contredit le corollaire 2.7. \square

2.4.3. *Équations de degré 2.* On garde les notations du paragraphe 2.4.1.

LEMME 2.9. *Supposons que $d = d_1 = 2$.*

Alors, si $N - p^ \leq i \leq N$, la variable X_i intervient dans F , mais seulement dans des monômes de la forme $X_i X_j$ avec $0 \leq j \leq p_*$.*

De même, si $0 \leq j \leq p_$, la variable X_j intervient dans F' , mais seulement dans des monômes de la forme $X_i X_j$ avec $N - p^* \leq i \leq N$.*

De plus, $r_{\bar{F}} = -\alpha_0 - \alpha_N$.

Preuve. Par 2.3 (vi), F fait partie d'une suite régulière globale définissant Z_s . En particulier, par le corollaire 2.7, $\{F = 0\}$ contient P^* et y est lisse. Si $N - p^* \leq i \leq N$ est tel que X_i n'intervient pas dans F , le critère jacobien montre que $\{F = 0\}$ est singulier en le point de P^* ayant toutes ses coordonnées nulles sauf la i -ème: c'est absurde. De même, si $0 \leq j \leq p_*$, la variable X_j apparaît dans F' .

Soient maintenant $N - p^* \leq i \leq N$, $0 \leq j \leq p_*$, M un monôme intervenant dans F divisible par X_i et M' un monôme intervenant dans F' divisible par X_j . On a $r_{\bar{F}} \leq v(a_M) - \deg_\alpha(M) = -\deg_\alpha(M) \leq -\alpha_0 - \alpha_N$ d'une part et $r_{\bar{F}} = v(a_{M'}) - \deg_\alpha(M') \geq -\deg_\alpha(M') \geq -\alpha_0 - \alpha_N$ d'autre part. Ces inégalités sont donc des égalités. En particulier, $\deg_\alpha(M) = \deg_\alpha(M') = \alpha_0 + \alpha_N$, ce qui montre les restrictions voulues sur les monômes intervenant dans F et F' , et $r_{\bar{F}} = -\alpha_0 - \alpha_N$. \square

Montrons à présent le théorème 2.1 si $c \geq 2$ et $d_1 = d_2 = 2$.

Preuve du théorème 2.1 si $c \geq 2$ et $d_1 = d_2 = 2$. On peut supposer, quitte à échanger Z et Z' , que $p^* \geq p_*$. Soit $(F_t)_{t \in \mathbb{P}^1}$ un pinceau d'équations de degré 2 de Z_s . Comme F_t fait partie d'une suite régulière globale définissant Z_s par 2.3 (vi), le corollaire 2.7 montre que

$\{F_t = 0\}$ contient P^* et y est lisse. De plus, les restrictions sur les monômes de F_t obtenues dans le lemme 2.9 montrent que si $x \in P^*$, $L^* \subset T_x\{F_t = 0\}$. L'ensemble des hyperplans de \mathbb{P}_k^N contenant L^* s'identifie naturellement au dual $(P_*)^\vee$ de P_* , et on obtient un morphisme $\Gamma: \mathbb{P}^1 \times P^* \rightarrow (P_*)^\vee$ défini par $\Gamma(t, x) = T_x\{F_t = 0\}$.

Comme $\dim(\mathbb{P}^1 \times P^*) = p^* + 1 > p_* = \dim((P_*)^\vee)$, on peut trouver un hyperplan $H \in (P_*)^\vee$, et C une courbe irréductible dans $\mathbb{P}^1 \times P^*$ tels que $\Gamma(t, x) = H$ pour $(t, x) \in C$. Si la projection $C \rightarrow P^*$ n'est pas constante, son image est une courbe, et H est tangent à Z_s le long de cette courbe, ce qui contredit [15] 6.3.5, 6.3.6. Sinon, $C = \mathbb{P}^1 \times \{x\}$ pour $x \in P^*$, et tous les $\{F_t = 0\}$ ont espace tangent H en x . En particulier, les équations F_0 et F_1 ne sont pas transverses en x . Comme, par 2.3 (vi), elles font partie d'une suite régulière globale définissant Z_s , cela contredit 2.3 (viii). \square

2.4.4. *Fin de la preuve.* Il reste à prouver le théorème 2.1 si $c \geq 2$, $d_1 = 2$ et $d_2 \geq 3$.

Preuve du théorème 2.1 si $c \geq 2$, $d_1 = 2$ et $d_2 \geq 3$. Soient $F \in H^0(\mathbb{P}_k^N, \mathcal{O}(2))$ et $G \in H^0(\mathbb{P}_k^N, \mathcal{O}(d_2))$ des équations de Z_s faisant partie d'une suite régulière globale la définissant. Appliquant la discussion du paragraphe 2.4.1 à F et G , on obtient d'une part des équations \tilde{F} , \tilde{F}' , F' et un entier $r_{\tilde{F}}$, d'autre part des équations \tilde{G} , \tilde{G}' , G' et un entier $r_{\tilde{G}}$. Par le lemme 2.9, $r_{\tilde{F}} = -\alpha_0 - \alpha_N$.

Par le lemme 2.8, G' est singulier le long de P_* , de sorte que, par le corollaire 2.7, G' ne peut faire partie d'une suite régulière globale définissant Z'_s . Par 2.3 (vii), cela signifie qu'il existe $Q \in H^0(\mathbb{P}_k^N, \mathcal{O}(d_2 - 2))$ tel que $G' = QF'$.

Par le lemme 2.9, la variable X_0 intervient dans F' . Par le lemme 2.8, tous les monômes intervenant dans G' ont un α -degré $\geq \alpha_0 + (d_2 - 1)\alpha_N$. Ces deux faits impliquent que tous les monômes intervenant dans Q ont α -degré $(d_2 - 2)\alpha_N$, et que G' fait intervenir au moins un monôme de α -degré $\alpha_0 + (d_2 - 1)\alpha_N$. En particulier, on a égalité dans les inégalités de la démonstration du lemme 2.8, ce qui montre $r_{\tilde{G}} = -\alpha_0 - (d_2 - 1)\alpha_N$.

Soit \tilde{Q} un relevé de Q à $H^0(\mathbb{P}_T^N, \mathcal{O}(d_2 - 2))$ ne faisant intervenir que des monômes de α -degré $(d_2 - 2)\alpha_N$. Posons $H = G - QF$. Comme $\{F = G = 0\} = \{F = H = 0\}$, F et H font partie d'une suite régulière globale définissant Z_s . On applique la discussion du paragraphe 2.4.1 à H et à son relevé $\tilde{H} = \tilde{G} - \tilde{Q}\tilde{F}$. Comme le raisonnement effectué ci-dessus pour F et G vaut aussi pour F et H , on a $r_{\tilde{H}} = -\alpha_0 - (d_2 - 1)\alpha_N$.

Calculons \tilde{H}' . On note $a_M^{\tilde{F}}$ le coefficient du monôme M dans \tilde{F} , et on utilise des notations analogues pour \tilde{G} , \tilde{H} et \tilde{Q} . Comme le α -degré d'un produit de monômes est la somme des α -degrés de ces monômes, il vient:

$$\begin{aligned} \tilde{H}' &= t^{-r_{\tilde{H}}} \left(\sum_{M \in \mathfrak{M}_{d_2}} t^{-\deg_\alpha(M)} a_M^{\tilde{H}} M \right) \\ &= t^{-r_{\tilde{H}}} \left(\sum_{M \in \mathfrak{M}_{d_2}} t^{-\deg_\alpha(M)} a_M^{\tilde{G}} M - \sum_{M \in \mathfrak{M}_{d_2-2}} t^{-\deg_\alpha(M)} a_M^{\tilde{Q}} M \sum_{M \in \mathfrak{M}_2} t^{-\deg_\alpha(M)} a_M^{\tilde{F}} M \right). \end{aligned}$$

Comme $r_{\tilde{G}} = r_{\tilde{H}} = -\alpha_0 - (d_2 - 1)\alpha_N$, $r_{\tilde{F}} = -\alpha_0 - \alpha_N$, et que tous les monômes intervenant dans \tilde{Q} sont de α -degré $(d_2 - 2)\alpha_N$, on obtient:

$$\begin{aligned} \tilde{H}' &= t^{-r_{\tilde{G}}} \left(\sum_{M \in \mathfrak{M}_{d_2}} t^{-\deg_\alpha(M)} a_M^{\tilde{G}} M \right) - \tilde{Q} \left(t^{-r_{\tilde{F}}} \sum_{M \in \mathfrak{M}_2} t^{-\deg_\alpha(M)} a_M^{\tilde{F}} M \right) \\ &= \tilde{G}' - \tilde{Q}\tilde{F}'. \end{aligned}$$

Spécialisant cette équation, il vient $H' = G' - QF' = 0$. C'est une contradiction car, dans la construction du paragraphe 2.4.1, $r_{\tilde{H}}$ est choisi de sorte que H' soit non nul. Cela conclut la preuve. \square

3. Automorphismes

3.1. Schéma en groupes des automorphismes

On regroupe dans ce paragraphe des généralités sur les automorphismes de variétés, nécessaires pour l'énoncé et la preuve du théorème 3.1.

Soit k un corps; on note p sa caractéristique (on peut avoir $p = 0$). Si Z et T sont des k -schémas, on notera Z_T le T -schéma $Z \times_k T$.

On adopte les conventions de [6] Chap. 9 en ce qui concerne les foncteurs et schémas de Picard.

3.1.1. *Automorphismes d'une variété.* On rappelle que, si Z est un k -schéma projectif, le foncteur qui à un k -schéma T associe l'ensemble $\text{Aut}_T(Z_T)$ des T -automorphismes de Z_T est représentable par un k -schéma en groupes noté $\text{Aut}_k(Z)$. Le groupe des composantes connexes de $\text{Aut}_k(Z)$ est dénombrable et sa composante neutre est un k -schéma en groupes de type fini dont l'espace tangent en l'identité s'identifie à $H^0(Z, T_Z)$. Pour ces faits, on pourra consulter [20] Prop. 4.6.10.

3.1.2. *Automorphismes d'une variété polarisée.* Soient $g: Z \rightarrow \text{Spec}(k)$ un k -schéma projectif géométriquement intègre, et $\lambda \in \mathbf{Pic}_{Z/k}(k)$. Considérons le foncteur qui à un k -schéma T associe l'ensemble des $f \in \text{Aut}_T(Z_T)$ tels que le diagramme suivant commute:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{Pic}_{Z_T/T} & \xrightarrow{f^*} & \mathbf{Pic}_{Z_T/T} \\
 & \swarrow \lambda_T & \searrow \lambda_T \\
 & T &
 \end{array} \tag{2}$$

Ce foncteur est représentable par un sous-schéma fermé de $\text{Aut}_k(Z)$. En effet, si T est un k -schéma et $f \in \text{Aut}_T(Z \times_k T)$, le sous-schéma fermé de T défini par l'équation $f^* \circ \lambda_T - \lambda_T = 0$ vérifie la propriété universelle requise. Il est de plus immédiat que c'est un sous-schéma en groupes. On le note $\text{Aut}_k(Z, \lambda)$.

3.1.3. *Cas des intersections complètes.* Supposons maintenant que $Z \subset \mathbb{P}_k^N$ est une intersection complète lisse polarisée par $\mathcal{O}(1)$. On note $i: Z \subset \mathbb{P}_k^N$ l'inclusion, et g et h les morphismes structurels de Z et \mathbb{P}_k^N . On va donner une description plus concrète de $\text{Aut}_k(Z, \mathcal{O}(1))$, en l'identifiant à un sous-schéma en groupes de $\text{PGL}_{N+1,k}$.

Rappelons que $\text{PGL}_{N+1,k} = \text{Aut}_k(\mathbb{P}_k^N)$, de sorte que si T est un k -schéma, $\text{PGL}_{N+1,k}(T)$ est l'ensemble des T -automorphismes de \mathbb{P}_T^N (voir [18] 0.5b). Considérons le sous-foncteur G de $\text{PGL}_{N+1,k}$ qui associe à un k -schéma T l'ensemble $G(T)$ des $f \in \text{PGL}_{N+1,k}(T)$ tels que $f(Z_T) = Z_T$. Vérifions que G est représentable par un sous-schéma fermé de $\text{PGL}_{N+1,k}$. Pour cela, soit T un k -schéma et $f \in \text{PGL}_{N+1,k}(T)$. Les sous-schémas Z_T et $f(Z_T)$ de \mathbb{P}_T^N sont plats sur T et induisent donc des sections $T \rightarrow \text{Hilb}(\mathbb{P}_T^N/T)$ qui sont des immersions fermées par [7] 5.4.6. L'intersection de ces deux sous-schémas fermés de $\text{Hilb}(\mathbb{P}_T^N/T)$ s'identifie à un sous-schéma fermé de T qui vérifie la propriété universelle requise. On a montré que G est représentable par un sous-schéma fermé de $\text{PGL}_{N+1,k}$; que ce soit un sous-schéma en groupes est immédiat.

On va montrer que G et $\text{Aut}_k(Z, \mathcal{O}(1))$ coïncident. Si $f \in G(T)$, on note $\Phi(T)(f) = f|_{Z_T}$. Comme f préserve nécessairement la polarisation $\mathcal{O}(1) \in \mathbf{Pic}_{\mathbb{P}_T^N/T}(T)$ de \mathbb{P}_T^N , elle préserve sa restriction à Z_T , de sorte que $\Phi(T)(f) \in \text{Aut}_k(Z, \mathcal{O}(1))(T)$. On a ainsi construit un morphisme de foncteurs $\Phi: G \rightarrow \text{Aut}_k(Z, \mathcal{O}(1))$; on vérifie aisément qu'il respecte les lois de groupes. Montrons en deux temps que c'est un isomorphisme.

Tout d'abord, montrons que $\Phi(T)$ est injectif. Pour cela, soit $f \in \text{Ker}(\Phi(T))$: $f|_{Z_T}: Z_T \rightarrow Z_T$ est l'identité. Par la proposition 2.3 (iii), $i^*: H^0(\mathbb{P}_k^N, \mathcal{O}(1)) \rightarrow H^0(Z, \mathcal{O}(1))$ est un isomorphisme de sorte que par changement de base plat par $T \rightarrow \text{Spec}(k)$, $i_T^*: h_{T^*}\mathcal{O}(1) \rightarrow g_{T^*}\mathcal{O}(1)$ est un isomorphisme. La commutativité du diagramme ci-dessous:

$$\begin{array}{ccc} g_{T^*}\mathcal{O}(1) & \xrightarrow{f|_{Z_T}} & g_{T^*}\mathcal{O}(1) \\ i_T^* \uparrow & & \uparrow i_T^* \\ h_{T^*}\mathcal{O}(1) & \xrightarrow{f^*} & h_{T^*}\mathcal{O}(1) \end{array}$$

montre que $f^*: h_{T^*}\mathcal{O}(1) \rightarrow h_{T^*}\mathcal{O}(1)$ est l'identité, de sorte que f est l'identité.

Montrons enfin que $\Phi(T)$ est surjectif. Pour cela, soit $f: Z_T \rightarrow Z_T$ un élément de $\text{Aut}_k(Z, \mathcal{O}(1))(T)$: $f^*\mathcal{O}(1) \otimes \mathcal{O}(-1)$ est trivial dans $\mathbf{Pic}_{Z_T/T}(T) = \mathbf{Pic}_{Z/k}(T)$, donc, par [6] Th. 9.2.5 1, dans $\mathbf{Pic}_{Z/k}(T)$. Il existe donc $\mathcal{L} \in \mathbf{Pic}(T)$ tel que $f^*\mathcal{O}(1) \simeq \mathcal{O}(1) \otimes g_T^*\mathcal{L}$. Par conséquent, f^* induit un isomorphisme entre $g_{T^*}\mathcal{O}(1)$ et $g_{T^*}\mathcal{O}(1) \otimes \mathcal{L}$. Composant avec i_T^* , on obtient un isomorphisme entre $h_{T^*}\mathcal{O}(1)$ et $h_{T^*}\mathcal{O}(1) \otimes \mathcal{L}$, donc entre les fibrés projectifs associés: c'est un isomorphisme $\mathbb{P}_T^N \rightarrow \mathbb{P}_T^N$. Par construction, c'est un élément de $G(T)$ qui est un antécédent de f par $\Phi(T)$.

Ainsi, suivant la situation, on pourra considérer $\text{Aut}_k(Z, \mathcal{O}(1))$ comme un sous-schéma en groupes fermé de $\text{Aut}_k(Z)$ ou de $\text{PGL}_{N+1,k}$.

3.2. Automorphismes des intersections complètes lisses

3.2.1. Énoncé du théorème. Le but de ce chapitre est de montrer que, si Z est une intersection complète lisse, $\text{Aut}_k(Z)$ et $\text{Aut}_k(Z, \mathcal{O}(1))$ sont, sauf pour un petit nombre d'exceptions qu'on explique, des schémas en groupes finis réduits.

Le théorème principal est le suivant:

THÉORÈME 3.1. *Soit Z une intersection complète lisse. Les schémas en groupes $\text{Aut}_k(Z)$ et $\text{Aut}_k(Z, \mathcal{O}(1))$ coïncident et sont finis réduits, sauf dans les cas suivants:*

- (i) *Quadriques: si $c = 1$ et $d_1 = 2$, $\text{Aut}_k(Z) = \text{Aut}_k(Z, \mathcal{O}(1))$ est lisse de dimension $N(N+1)/2$.*
- (ii) *Courbes de genre 1: si $N = 2$, $c = 1$ et $d_1 = 3$ ou si $N = 3$, $c = 2$ et $d_1 = d_2 = 2$, $\text{Aut}_k(Z)$ est de type fini et sa composante neutre est une courbe elliptique. De plus $\text{Aut}_k(Z, \mathcal{O}(1))$ est fini ; il est aussi réduit sauf si $N = 2$, $c = 1$, $d_1 = 3$ et $p = 3$ ou si $N = 3$, $c = 2$, $d_1 = d_2 = 2$ et $p = 2$.*
- (iii) *Courbes de genre ≥ 2 : dans les autres cas où $n = 1$, $\text{Aut}_k(Z)$ et $\text{Aut}_k(Z, \mathcal{O}(1))$ sont tous deux finis réduits, mais peuvent ne pas coïncider.*
- (iv) *Surfaces K3: si $N = 3$, $c = 1$ et $d_1 = 4$, si $N = 4$, $c = 2$, $d_1 = 2$ et $d_2 = 3$ ou si $N = 5$, $c = 3$ et $d_1 = d_2 = d_3 = 2$, $\text{Aut}_k(Z)$ est de dimension nulle, réduit et au plus dénombrable tandis que $\text{Aut}_k(Z, \mathcal{O}(1))$ est fini réduit.*
- (v) *Intersections de deux quadriques: si $N \geq 5$ est impair, $c = 2$, $d_1 = d_2 = 2$ et $p = 2$, $\text{Aut}_k(Z) = \text{Aut}_k(Z, \mathcal{O}(1))$ est fini non réduit.*

3.2.2. *Cas des hypersurfaces.* Le cas des hypersurfaces est classique. En caractéristique nulle, il est traité par Kodaira et Spencer dans [13] 14.2. En caractéristique positive, la finitude des groupes d'automorphismes est étudiée dans [16]. On trouvera une discussion très détaillée incluant les problèmes de réduction dans [11] 11.5, 11.6, 11.7.

3.2.3. *Codimension supérieure.* Les arguments en codimension supérieure sont analogues. D'une part, il faut étendre aux intersections complètes lisses le calcul fait dans [13] des champs de vecteurs sur une hypersurface lisse. C'est l'objet du paragraphe 3.3.1. D'autre part, un phénomène nouveau apparaît: la non réduction de $\text{Aut}_k(Z)$ quand $N \geq 5$ est impair, $c = 2$, $d_1 = d_2 = 2$ et $p = 2$ (cas (v) ci-dessus). On traite ce cas à l'aide de calculs explicites au paragraphe 3.3.2. La preuve proprement dite du théorème 3.1 se trouve au paragraphe 3.3.3.

Dans le cas (ii) ci-dessus, les automorphismes infinitésimaux sont facilement explicables: ce sont des automorphismes de translation de la courbe de genre 1. Il serait intéressant d'obtenir également dans le cas (v) une description géométrique de ces automorphismes infinitésimaux. Pourrait-on même identifier la composante connexe de l'identité de $\text{Aut}_k(Z)$?

3.3. Preuve du théorème

3.3.1. *Champs de vecteurs sur les intersections complètes lisses.* Soit Z une intersection complète lisse sur k . L'objectif de ce paragraphe est la proposition 3.6: on montre que, à quelques exceptions éventuelles près, Z n'admet pas de champs de vecteurs globaux non triviaux. La preuve, qui étend celle de [13] pour les hypersurfaces, consiste en un calcul de cohomologie de faisceaux de formes différentielles.

Rappelons tout d'abord le théorème d'annulation suivant sur \mathbb{P}^N . En caractéristique 0, c'est une conséquence du théorème d'annulation de Bott. On peut en trouver une preuve de Deligne, indépendante de la caractéristique, dans [1] Exposé XI, Th. 1.1.

LEMME 3.2. *On a $H^q(\mathbb{P}_k^N, \Omega_{\mathbb{P}_k^N}^p(l)) = 0$ sauf dans les trois cas suivants:*

- (i) $p = q$ et $l = 0$,
- (ii) $q = 0$ et $l > p$,
- (iii) $q = N$ et $l < p - N$.

On peut en déduire des théorèmes d'annulation sur Z .

LEMME 3.3. *Soit Z une intersection complète lisse sur k .*

Si $p + q > n$ et $l > p - q$, on a $H^q(Z, \Omega_Z^p(l)) = 0$.

Preuve. On raisonne par récurrence sur q . Si $q = 0$, on a $p > n$, de sorte que $\Omega_Z^p = 0$ et l'annulation est évidente.

Considérons la $(p + c)$ -ème puissance extérieure de la suite exacte courte $0 \rightarrow N_{Z/\mathbb{P}_k^N}^* \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}_k^N}|_Z \rightarrow \Omega_Z \rightarrow 0$. On obtient une filtration de $\Omega_{\mathbb{P}_k^N}^{p+c}|_Z$ dont les gradués successifs sont les faisceaux localement libres:

$$\Omega_Z^{p+t} \otimes \bigwedge^{c-t} N_{Z/\mathbb{P}_k^N}^* = \bigoplus_{1 \leq j_1 < \dots < j_{c-t} \leq c} \Omega_Z^{p+t}(-d_{j_1} - \dots - d_{j_{c-t}}), \quad t \geq 0.$$

Tensorisons ce faisceau localement libre filtré par $\mathcal{O}(l + d_1 + \dots + d_c)$, de sorte que le gradué correspondant à $t = 0$ soit $\Omega_Z^p(l)$. En dévissant cette filtration en suite exactes courtes de faisceaux localement libres, et en écrivant les suites exactes longues de cohomologie associées

à ces suites exactes courtes, on est ramenés, pour montrer l'annulation désirée, à vérifier les annulations suivantes:

- (i) Pour $t \geq 1$ et $1 \leq j_1 < \dots < j_t \leq c$, $H^{q-1}(Z, \Omega_Z^{p+t}(d_{j_1} + \dots + d_{j_t} + l)) = 0$.
- (ii) $H^q(Z, \Omega_{\mathbb{P}_k^N}^{p+c}|_Z(l + d_1 + \dots + d_c)) = 0$.

Pour les premières annulations, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence. Les hypothèses sont vérifiées car $p + t + q - 1 \geq p + q > n$ et $d_{j_1} + \dots + d_{j_t} + l \geq l + t + 1 > p + t - q + 1$.

Pour la seconde annulation, on dispose de la résolution de Koszul de \mathcal{O}_Z :

$$0 \rightarrow \mathcal{K}^{-c} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{K}^0 \rightarrow \mathcal{O}_Z \rightarrow 0,$$

où $\mathcal{K}^{-r} = \bigwedge^r(\bigoplus_{i=1}^c \mathcal{O}(-d_i)) = \bigoplus_{1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq c} \mathcal{O}(-d_{j_1} - \dots - d_{j_r})$. Tensorisons cette résolution par le faisceau localement libre $\Omega_{\mathbb{P}_k^N}^{p+c}(l + d_1 + \dots + d_c)$, et considérons la suite spectrale d'hypercohomologie associée:

$$E_1^{r,s} = H^s(\mathbb{P}_k^N, \mathcal{K}^r \otimes \Omega_{\mathbb{P}_k^N}^{p+c}(l + d_1 + \dots + d_c)) \Rightarrow H^{r+s}(Z, \Omega_{\mathbb{P}_k^N}^{p+c}|_Z(l + d_1 + \dots + d_c)).$$

Il s'ensuit que pour montrer l'annulation voulue, il suffit de vérifier l'annulation des $H^{q+r}(\mathbb{P}_k^N, \Omega_{\mathbb{P}_k^N}^{p+c}(l + d_{j_1} + \dots + d_{j_{c-r}}))$ pour $0 \leq r \leq c$ et $1 \leq j_1 < \dots < j_{c-r} \leq c$. Pour cela, montrons que le lemme 3.2 s'applique.

Si l'on était dans le cas (i), on pourrait écrire $l = -d_{j_1} - \dots - d_{j_{c-r}} \leq -2(c-r) = (p-q) - (c-r) \leq p-q$, ce qui est absurde. Si l'on était dans le cas (ii), on aurait $q+r=0$ donc $q=0$, mais ce cas a été traité comme initialisation de la récurrence. Enfin, si l'on était dans le cas (iii), il viendrait: $p-q < l \leq l + d_{j_1} + \dots + d_{j_{c-r}} < p+c-N = p-n$, de sorte que $q > n$ et que l'annulation de $H^q(Z, \Omega_Z^p(l))$ était évidente. \square

La stratégie de démonstration du lemme ci-dessus permet de montrer l'annulation d'autres groupes de cohomologie. Les deux lemmes qui suivent en sont des exemples, dont on aura besoin. Le premier de ces lemmes concerne les hypersurfaces cubiques de dimension au moins 2.

LEMME 3.4. *Supposons que $c = 1$, $d_1 = 3$ et $N \geq 3$. Soit Z une intersection complète lisse sur k .*

$$\text{Alors } H^{N-1}(Z, \Omega_Z^1(2-N)) = 0.$$

Preuve. On procède de la même manière que dans la preuve du lemme 3.3. Par l'argument de filtration, on est ramenés à montrer l'annulation des deux groupes de cohomologie $H^{N-2}(Z, \Omega_Z^2(5-N))$ et $H^{N-1}(Z, \Omega_{\mathbb{P}_k^N}^2|_Z(5-N))$. Pour le premier, on peut appliquer le lemme 3.3. Pour le second, on procède de la même manière qu'en 3.3: par l'argument de suite spectrale de Koszul, on est ramenés à montrer l'annulation des deux groupes de cohomologie $H^{N-1}(\mathbb{P}_k^N, \Omega_{\mathbb{P}_k^N}^2(5-N))$ et $H^N(\mathbb{P}_k^N, \Omega_{\mathbb{P}_k^N}^2(2-N))$. Le lemme 3.2 montre qu'ils s'annulent, sauf le second si $N = 2$. \square

Le second de ces lemmes concerne les intersections de deux quadriques de dimension paire.

LEMME 3.5. *Supposons que $c = 2$, $d_1 = d_2 = 2$ et que N est pair. Soit Z une intersection complète lisse sur k .*

$$\text{Alors } H^{N-2}(Z, \Omega_Z^1(3-N)) = 0.$$

Preuve. On va en fait prouver l'énoncé plus général suivant : si $c = 2$, $d_1 = d_2 = 2$ et $i \geq 0$, $H^{N-2-i}(Z, \Omega_Z^{1+i}(3+2i-N)) = 0$, de sorte qu'on obtient le résultat voulu en faisant $i = 0$. La

preuve procède par récurrence descendante sur i . L'initialisation de la récurrence est facile: si $i \geq N - 2$, le faisceau Ω_Z^{1+i} est nul par dimension. Supposons l'annulation vérifiée pour $i + 1$, et cherchons à la montrer pour i .

On procède de la même manière que dans la preuve du lemme 3.3. Par l'argument de filtration, on est ramenés à montrer l'annulation des trois groupes de cohomologie $H^{N-3-i}(Z, \Omega_Z^{2+i}(5 + 2i - N))$, $H^{N-3-i}(Z, \Omega_Z^{3+i}(7 + 2i - N))$ et $H^{N-2-i}(Z, \Omega_{\mathbb{P}_k^N}^{3+i}|_Z(7 + 2i - N))$. Le premier s'annule par hypothèse de récurrence, le second s'annule par le lemme 3.3. Pour montrer l'annulation du troisième, on procède toujours comme dans la preuve du lemme 3.3: en utilisant la suite spectrale de Koszul, on est ramenés à montrer l'annulation des trois groupes de cohomologie suivants: $H^{N-2-i}(\mathbb{P}_k^N, \Omega_{\mathbb{P}_k^N}^{3+i}(7 + 2i - N))$, $H^{N-1-i}(\mathbb{P}_k^N, \Omega_{\mathbb{P}_k^N}^{3+i}(5 + 2i - N))$ et $H^{N-i}(\mathbb{P}_k^N, \Omega_{\mathbb{P}_k^N}^{3+i}(3 + 2i - N))$. Pour cela, appliquons le lemme 3.2. Le cas (i) n'arrive que pour le troisième de ces groupes et $N = 2i + 3$, ce qui est impossible car N est supposé pair. Le cas (ii) n'intervient pas car $i < N - 2$, et on vérifie facilement qu'on n'est jamais dans le cas (iii). Cela conclut. \square

On peut finalement montrer:

PROPOSITION 3.6. *Supposons qu'on n'a pas $c = 1$ et $d_1 = 2$, ni $N = 2$, $c = 1$ et $d_1 = 3$, ni N impair, $c = 2$ et $d_1 = d_2 = 2$. Soit Z une intersection complète lisse sur k .*

Alors $H^0(Z, T_Z) = 0$.

Preuve. Par dualité de Serre, $H^0(Z, T_Z) = H^n(Z, \Omega_Z^1(d_1 + \dots + d_c - N - 1))^\vee$. Cherchons à annuler ce groupe de cohomologie à l'aide du lemme 3.3. La première condition $p + q = 1 + n > n$ est trivialement vérifié. Pour la seconde, on remarque que $l + q - p = d_1 + \dots + d_c - c - 2 > 0$ sauf si $c = 1$ et $d_1 = 2$ ou 3 , ou si $c = 2$ et $d_1 = d_2 = 2$.

Si $c = 1$, $d_1 = 3$ et $N \geq 3$, on peut appliquer le lemme 3.4. Si $c = 2$, $d_1 = d_2 = 2$ et N est pair, on peut appliquer le lemme 3.5. \square

3.3.2. Intersections de deux quadriques. Dans ce paragraphe, on effectue des calculs sur les intersections de deux quadriques par manipulation explicite de leurs équations.

PROPOSITION 3.7. *Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique $\neq 2$, $N \geq 3$ et $Z \subset \mathbb{P}_k^N$ une intersection complète lisse de deux quadriques. Alors l'espace tangent en Id de $\text{Aut}_k(Z, \mathcal{O}(1))$ est trivial.*

Comme Z est lisse, on peut appliquer [23] Proposition 3.28: on obtient un système de coordonnées dans lequel $Z = \{q = q' = 0\}$ avec $q = X_0^2 + \dots + X_N^2$, $q' = a_0 X_0^2 + \dots + a_N X_N^2$, et où les a_i sont distincts.

Notons $PG = \text{Aut}_k(Z, \mathcal{O}(1))$ et G son image réciproque dans GL_{N+1} : on a une suite exacte courte $0 \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow G \rightarrow PG \rightarrow 0$. On note $A = k[\varepsilon]/\varepsilon^2$ les nombres duaux de sorte que l'espace tangent à GL_{N+1} en Id s'identifie aux matrices de la forme $(\text{Id} + \varepsilon M) \in \text{GL}_{N+1}(A)$. Soit v un vecteur tangent à PG en Id . Par lissité de $G \rightarrow PG$, on le relève en $g = \text{Id} + \varepsilon M \in G(A)$ un vecteur tangent à G en Id . On note $(m_{i,j})_{0 \leq i, j \leq N} \in k$ les coefficients de la matrice M .

Par la proposition 2.3 (iii), $H^0(\mathbb{P}_k^N, \mathcal{I}_Z(2))$ est de dimension 2, engendré par q et q' . Ainsi, par changement de base par le morphisme plat $k \rightarrow A$, $H^0(\mathbb{P}_A^N, \mathcal{I}_{Z_A}(2))$ est un A -module libre de rang 2, engendré par q et q' . La matrice $g = \text{Id} + \varepsilon M$ agit sur $H^0(\mathbb{P}_A^N, \mathcal{O}(2))$ en préservant ce sous-module, de sorte que $q \circ g$ et $q' \circ g$ sont combinaisons à coefficients dans A de q et q' . En

calculant les termes constants (sans ε), on voit qu'il existe $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in k$ tels que ces relations soient de la forme suivante:

$$q \circ g = (1 + \varepsilon\alpha)q + \varepsilon\beta q', \quad (3)$$

$$q' \circ g = \varepsilon\gamma q + (1 + \varepsilon\delta)q'. \quad (4)$$

Comme aucun monôme $X_i X_j$ avec $i \neq j$ n'intervient dans le terme de droite de (3), on obtient $m_{i,j} + m_{j,i} = 0$ pour $i \neq j$. Procédant de même avec (4), on obtient $a_i m_{i,j} + a_j m_{j,i} = 0$ pour $i \neq j$. Comme $a_i \neq a_j$ pour $i \neq j$, cela montre $m_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$.

La relation (3) s'écrit alors $m_{i,i} = \alpha + \beta a_i$ pour $0 \leq i \leq N$. De même, la relation (4) s'écrit $a_i m_{i,i} = \gamma + \delta a_i$ pour $0 \leq i \leq N$. De ces deux relations, il vient que, pour $0 \leq i \leq N$, $\beta a_i^2 + (\alpha - \delta)a_i - \gamma = 0$. Les a_i sont alors $N + 1$ racines distinctes d'un polynôme de degré 2. Ce polynôme est donc nul: en particulier, $\beta = 0$ et $m_{i,i} = \alpha$ pour tout i .

On a montré que M est une homothétie, donc que g est en fait tangent à \mathbb{G}_m . Par conséquent, $v = 0$, et l'espace tangent de PG en Id est bien trivial.

PROPOSITION 3.8. *Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique 2, $N \geq 3$ impair, et $Z \subset \mathbb{P}_k^N$ une intersection complète lisse de deux quadriques. Alors l'espace tangent en Id de $\text{Aut}_k(Z, \mathcal{O}(1))$ est de dimension $\geq (N - 1)/2$.*

Preuve. Soient $Z = \{q = q' = 0\}$ des équations de Z . Notons b et b' les formes bilinéaires symétriques associées aux formes quadratiques q et q' . Comme la caractéristique de k est 2, le polynôme $\det(\lambda b + \mu b')$, homogène de degré $N + 1$ en λ et μ , est le carré du pfaffien $\text{pfaff}(\lambda b + \mu b')$. Comme il suffit de montrer la proposition pour Z générale, on peut supposer que les racines de ce pfaffien sont distinctes.

Dans ce cas, on peut appliquer [4] Coro. 2.10: en notant $N + 1 = 2r$, il existe un système de coordonnées dans lequel $Z = \{q = q' = 0\}$ avec $q = \sum_{i=1}^r X_i Y_i$ et $q' = \sum_{i=1}^r a_i X_i Y_i + c_i X_i^2 + d_i Y_i^2$.

On raisonne alors comme dans la preuve de la proposition précédente, dont on conserve les notations. Un vecteur tangent à GL_{N+1} en Id est un élément $g = \text{Id} + \varepsilon M \in \text{GL}_{N+1}(A)$. S'il préserve le sous- A -module libre de rang 2 de $H^0(\mathbb{P}_A^N, \mathcal{O}(2))$ engendré par q et q' , il préserve $Z_A = \{q = q' = 0\}$ et est donc tangent à G en Id . Or, si $D \in M_r(k)$ est diagonale, et si on note

$$M = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

on vérifie par calcul que $g = \text{Id} + \varepsilon M$ préserve ce sous-module, de sorte que g est tangent à G en Id . Ceci montre que l'espace de tangent de G en Id est de dimension $\geq r = (N + 1)/2$. De la suite exacte $0 \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow G \rightarrow PG \rightarrow 0$, on déduit que l'espace tangent de PG en Id est de dimension $\geq (N - 1)/2$, comme voulu. \square

3.3.3. Fin de la preuve. Montrons finalement le théorème 3.1.

Preuve du théorème 3.1. On se ramène au cas où k est algébriquement clos; pour cela, on note \bar{k} une clôture algébrique de k . Par description de leurs foncteurs des points, $\text{Aut}_{\bar{k}}(Z_{\bar{k}}) = \text{Aut}_k(Z)_{\bar{k}}$. Ainsi, le k -schéma en groupes $\text{Aut}_k(Z)$ est de dimension nulle (respectively fini, respectivement lisse, respectivement de dimension nulle et réduit) si et seulement si le \bar{k} -schéma en groupes $\text{Aut}_{\bar{k}}(Z_{\bar{k}})$ l'est. Le seul point non trivial dans cette assertion est le fait que si $\text{Aut}_k(Z)$ est réduit de dimension nulle, $\text{Aut}_{\bar{k}}(Z_{\bar{k}})$ est réduit. Mais si c'est le cas, la composante connexe de l'identité de $\text{Aut}_k(Z)$ est un k -schéma connexe de dimension nulle donc ponctuel, réduit donc

isomorphe au spectre d'un corps, avec un k -point donc k -isomorphe à $\mathrm{Spec}(k)$. Par conséquent, la composante connexe de l'identité de $\mathrm{Aut}_{\bar{k}}(Z_{\bar{k}})$ est $\mathrm{Spec}(\bar{k})$. Par homogénéité sous l'action des \bar{k} -points de $\mathrm{Aut}_{\bar{k}}(Z_{\bar{k}})$, toutes ses composantes connexes sont isomorphes à $\mathrm{Spec}(\bar{k})$, donc réduites. Le même raisonnement permet de comparer $\mathrm{Aut}_k(Z, \mathcal{O}(1))$ et $\mathrm{Aut}_{\bar{k}}(Z_{\bar{k}}, \mathcal{O}(1))$. Dans la suite, on suppose donc k algébriquement clos.

Commençons par montrer que si $n \geq 2$ et si l'on n'est pas dans le cas (iv), $\mathrm{Aut}_k(Z) = \mathrm{Aut}_k(Z, \mathcal{O}(1))$. Pour cela, soient T un k -schéma et $f \in \mathrm{Aut}_k(Z)(T)$ un T -automorphisme de Z_T . Il faut montrer que le diagramme (2) commute. Raisonnant composante connexe par composante connexe, on peut supposer T connexe. Remarquons tout d'abord que, comme $n \geq 2$, la proposition 2.3(ii) montre que l'espace tangent en l'identité $H^1(Z, \mathcal{O}_Z)$ à $\mathbf{Pic}_{Z/k}$ est nul, de sorte que $\mathbf{Pic}_{Z_T/T}$ est réunion de composantes connexes T -isomorphes à T . Les sections λ_T et $f^* \circ \lambda_T$ sont nécessairement des isomorphismes sur l'une de ces composantes connexes: ainsi, pour qu'elles coïncident, il suffit qu'elles coïncident en un point géométrique. On est donc ramenés à vérifier que, sous nos hypothèses, un automorphisme f d'une intersection complète lisse Z sur un corps algébriquement clos préserve $\mathcal{O}(1)$. Si $n \geq 3$, par théorème de Lefschetz, $\mathcal{O}(1)$ est l'unique générateur ample du groupe de Picard de Z , et est donc préservé par f . Si $n = 2$, mais qu'on n'est pas dans le cas (iv), [1] Exposé XI, Th. 1.8 montre que $\mathcal{O}(1)$ est l'unique générateur ample du sous-groupe du groupe de Picard de Z constitué des fibrés en droites dont un multiple est proportionnel au diviseur canonique; cette caractérisation montre qu'il est préservé par f .

D'autre part, par la proposition 3.6, si l'on n'est pas dans un des cas (i), (ii) ou (v), $H^0(Z, T_Z) = 0$. Comme cet espace vectoriel s'identifie à l'espace tangent en l'identité de $\mathrm{Aut}_k(Z)$, $\mathrm{Aut}_k(Z)$ est alors un schéma en groupes réduit de dimension 0.

Ces deux faits, combinés aux résultats généraux du paragraphe 3.1, montrent le théorème sauf dans les cas (i), (ii), (iii) et (v) qu'on discute à présent.

Le cas (i) des quadriques est classique: la composante connexe de $\mathrm{Aut}_k(Z)$ est un groupe semi-simple de type orthogonal.

Le cas (iii) des courbes de genre ≥ 2 est également classique, mais donnons un argument. Comme T_Z est un fibré en droites anti-ample, $H^0(Z, T_Z) = 0$, de sorte que $\mathrm{Aut}_k(Z)$ est réduit de dimension 0. Pour montrer que ce schéma en groupes est fini, on peut remarquer que, comme un automorphisme préserve $3K_Z$, $\mathrm{Aut}_k(Z) = \mathrm{Aut}_k(Z, 3K_Z)$. Alors, en considérant le plongement tricanonique de Z et en procédant comme au paragraphe 3.1.3, on réalise $\mathrm{Aut}_k(Z)$ comme un sous-schéma en groupes d'un groupe linéaire, de sorte qu'il est de type fini, donc fini. Enfin, $\mathrm{Aut}_k(Z, \mathcal{O}(1))$ est fini réduit comme sous-schéma en groupes de $\mathrm{Aut}_k(Z)$.

Dans le cas (ii), Z est une courbe de genre 1. La courbe elliptique E sous-jacente agit par translations sur Z . Comme $h^0(Z, T_Z) = h^0(Z, \mathcal{O}_Z) = 1$, on voit que E s'identifie à la composante connexe de l'identité de $\mathrm{Aut}_k(Z)$. Finalement, le groupe des composantes connexes de $\mathrm{Aut}_k(Z)$ est fini par [22], Chapter III, Theorem 10.1. Il reste à déterminer le schéma en groupes $E \cap \mathrm{Aut}_k(Z, \mathcal{O}(1))$. Il est expliqué dans [11] 11.7 p. 342 que c'est $E[3]$ (respectively $E[4]$) si $N = 2$, $c = 1$ et $d_1 = 3$ (respectively si $N = 3$, $c = 2$ et $d_1 = d_2 = 2$). Le Corollary 6.4 de [22] permet de comparer le degré et le cardinal de ce sous-groupe, et donc de vérifier qu'il est non réduit si et seulement si $p = 3$ (respectively $p = 2$).

Traisons enfin le cas (v). On note H le schéma de Hilbert des intersections complètes lisses. Le théorème 2.1 sous sa forme (iii) montre la propreté de l'action de PGL_{N+1} sur H . La description de $\mathrm{Aut}_k(Z, \mathcal{O}(1))$ comme sous-groupe de PGL_{N+1} montre qu'il s'identifie au stabilisateur de $[Z] \in H(k)$ pour cette action: il est donc propre. Comme il est affine comme sous-groupe fermé d'un groupe affine, il est fini. La proposition 3.7 montre que si $p \neq 2$, l'espace tangent en l'identité de $\mathrm{Aut}_k(Z, \mathcal{O}(1))$ est trivial, de sorte que ce schéma en groupes est fini et réduit. La proposition 3.8 montre, elle, que si $p = 2$, l'espace tangent en l'identité de ce groupe est non trivial, de sorte que ce schéma en groupes est fini mais non réduit. \square

3.4. *Propriété de Deligne–Mumford*

On peut enfin montrer:

THÉORÈME 3.9. *Le champ \mathcal{M} est de Deligne–Mumford sauf dans les cas suivants:*

- (i) Si $c = 1$ et $d_1 = 2$.
- (ii) Si $N = 2$, $c = 1$, $d_1 = 3$, auquel cas il est de Deligne–Mumford au-dessus de $\text{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{3}])$.
- (iii) Si $N \geq 3$ est impair, $c = 2$, $d_1 = d_2 = 2$, auquel cas il est de Deligne–Mumford au-dessus de $\text{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{2}])$.

Preuve. Soient k un corps algébriquement clos et Z une intersection complète lisse sur k . La description de $\text{Aut}_k(Z, \mathcal{O}(1))$ comme sous-groupe de PGL_{N+1} montre qu’il s’identifie au stabilisateur de $[Z] \in H(k)$ pour l’action de PGL_{N+1} par changement de coordonnées. Comme le champ \mathcal{M} est de Deligne–Mumford si et seulement si les stabilisateurs géométriques de l’action de PGL_{N+1} sur H sont finis et réduits, le théorème 3.1 permet de montrer la proposition. \square

References

1. *Groupes de monodromie en géométrie algébrique. II.* Lecture Notes in Mathematics 340 (Springer, Berlin, 1973). Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1967–1969 (SGA 7 II), dirigé par P. Deligne et N. Katz.
2. A. BEAUVILLE, ‘Variétés de Prym et jacobiniennes intermédiaires’, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) 10 (1977) 309–391.
3. O. BENOIST, ‘Quelques espaces de modules d’intersections complètes lisses qui sont quasi-projectifs’, Preprint, 2011, arXiv:1111.1589.
4. U. BOSLE, ‘Pencils of quadrics and hyperelliptic curves in characteristic two’, *J. rein. angew. Math.* 407 (1990) 75–98.
5. O. DEBARRE, A. ILIEV AND L. MANIVEL, ‘On the period map for prime Fano threefolds of degree 10’, Preprint, 2011, arXiv:0812.3670v1, à paraître dans *J. Algebraic Geom.*
6. B. FANTECHI, L. GÖTTSCHE, L. ILLUSIE, S. L. KLEIMAN, N. NITSURE AND A. VISTOLI, *Fundamental algebraic geometry*, Mathematical Surveys and Monographs 123 (American Mathematical Society, Providence, RI, 2005). Grothendieck’s FGA explained.
7. A. GROTHENDIECK, ‘Éléments de géométrie algébrique. I. Le langage des schémas’, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (4) (1960) 228.
8. A. GROTHENDIECK, ‘Éléments de géométrie algébrique. II. étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes’, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (8) (1961) 222.
9. R. HARTSHORNE, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics 52 (Springer, New York, 1977).
10. S. ISHII, ‘Moduli space of polarized del Pezzo surfaces and its compactification’, *Tokyo J. Math.* 5 (1982) 289–297.
11. N. M. KATZ AND P. SARNAK, *Random matrices, Frobenius eigenvalues, and monodromy*, American Mathematical Society Colloquium Publications 45 (American Mathematical Society, Providence, RI, 1999).
12. S. KEEL AND S. MORI, ‘Quotients by groupoids’, *Ann. of Math.* (2) 145 (1997) 193–213.
13. K. KODAIRA AND D. C. SPENCER, ‘On deformations of complex analytic structures. I, II’, *Ann. of Math.* (2) 67 (1958) 328–466.
14. G. LAUMON AND L. MORET-BAILLY, *Champs algébriques*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge 39 (Springer, Berlin, 2000). Classical setting: line bundles and linear series.
15. R. LAZARSFELD, *Positivity in algebraic geometry. II*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 49 (Springer, Berlin, 2004). Positivity for vector bundles, and multiplier ideals.
16. H. MATSUMURA AND P. MONSKY, ‘On the automorphisms of hypersurfaces’, *J. Math. Kyoto Univ.* 3 (1963/1964) 347–361.
17. T. MATSUSAKA AND D. MUMFORD, ‘Two fundamental theorems on deformations of polarized varieties’, *Amer. J. Math.* 86 (1964) 668–684.
18. D. MUMFORD, J. FOGARTY AND F. KIRWAN, *Geometric invariant theory*, 3rd edn, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (2) 34 (Springer, Berlin, 1994).
19. A. V. PUKHLIKOV, ‘Fiberwise birational correspondences’, *Mat. Zametki* 68 (2000) 120–130.
20. E. SERNESI, *Deformations of algebraic schemes*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 334 (Springer, Berlin, 2006).
21. C. S. SESHADRI, ‘Geometric reductivity over arbitrary base’, *Adv. Math.* 26 (1977) 225–274.

22. J. H. SILVERMAN, *The arithmetic of elliptic curves*, Graduate Texts in Mathematics 106 (Springer, New York, 1986).
23. O. WITTENBERG, *Intersections de deux quadriques et pinceaux de courbes de genre 1/Intersections of two quadrics and pencils of curves of genus 1*, Lecture Notes in Mathematics, 1901 (Springer, Berlin, 2007).

O. Benoist
DMA, ENS
45 rue d'Ulm
75005 Paris
France

olivier.benoist@ens.fr