

Notes de cours de Géométrie différentielle

par Claude Viterbo

27 juin 2014

Table des matières

1	Préliminaires	7
1	Partition de l'unité	7
2	Inversion locale et fonctions implicites. Théorème du rang constant	10
3	Théorème de Brown-Morse-Sard	11
4	Champs de vecteurs	13
4.1	Remarques générales sur les équations différentielles	13
4.2	Théorème de Cauchy-Lipschitz	14
5	Flots, portrait de phase	16
5.1	Notions de base	16
5.2	Portraits de phase en dimension 2	19
5.3	Conjugaison et changement de coordonnées.	21
6	Appendice : paracompacité et espaces métriques	23
7	Appendice : Démonstration de la paracompacité des espaces métriques (d'après M.E. Rudin, Proc. Amer. Math. Soc. 20 (1969), p. 603.	24
8	Appendice : Le théorème de Sard	26
9	Exercices	35
2	Sous-variétés	39
1	Définition, premières propriétés.	39
2	Espaces tangents	44
2.1	Faisceaux associés à une sous-variété	46
2.2	Sous-variétés à bord.	47
3	Applications	49
3.1	Points critiques de fonctions définies sur une sous-variété	49
4	Exercices	52
3	Variétés	57
1	Definitions et propriétés de base	57
1.1	Faisceaux sur les variétés, partitions de l'unité, plongements et im- mersions	59
1.2	Espace tangent et fibrés vectoriels	59
1.3	Immersion, plongements, partitions de l'unité	62
1.4	Régularisation des variétés	63

1.5	Exemples de variétés	65
1.6	Classification des variétés	67
2	Exercices	68
4	Formes différentielles, Formule de Stokes et Applications	69
1	Formes différentielles	69
1.1	Algèbre extérieure	69
1.2	Formes différentielles sur les variétés	74
2	Orientation, différentielle, Formule de Stokes	75
2.1	Variétés orientées	75
2.2	Intégration des formes différentielles, formule de Stokes	78
2.3	Différentielle extérieure	79
3	Applications de la formule de Stokes	84
3.1	Formules intégrales	84
3.2	Application topologique : le théorème du point fixe de Brouwer	85
4	Exercices	87
5	Introduction à la Topologie et à la Géométrie différentielle.	91
1	Lemme de Poincaré, théorie du degré	91
1.1	Lemme de Poincaré	91
1.2	Théorie du degré, applications	94
1.3	Indice d'un champ de vecteurs en un zéro isolé	97
2	Théorèmes de Gauss-Bonnet et Poincaré-Hopf	98
3	Exercices	106
6	Calcul différentiel de Lie	111
1	Les champs de vecteurs vus comme dérivations	111
1.1	Flot d'un champ de vecteurs	112
2	Crochets de Lie	115
3	Dérivée de Lie	120
4	Exercices	122
5	Appendice : Quelques démonstration du théorème de Gauss-Bonnet par Allendoerfer, Weil, S.S. Chern	132
6	Appendice : l'histoire des formes différentielles en topologie par H. Samelson	145
7	Cohomologie de deRham	153
1	Généralités, principaux résultats.	153
2	Cohomologie relative, à support compact	155
3	Suites exactes en cohomologie. Suites relatives et de Mayer-Vietoris	155
4	Quelques calculs de cohomologie	157
5	Exercices	158
8	Quelques propriétés des champs de sous-espaces	161

1	Théorème de Frobenius	162
2	Les théorèmes de Chow et Sussmann	165
3	Exercices	172
9	Groupes de Lie	175
1	Généralités sur les groupes de Lie	175
1.1	Représentation adjointe et applications	178
1.2	Le théorème de Cartan	179
2	Cohomologie des groupes de Lie	181
3	Appendice 1 : Classification des groupes de Lie	185
4	Quotients de variétés par des groupes de Lie	185
5	Exercices	185
10	Théorie des revêtements, groupe fondamental	189
1	Groupe fondamental	189
2	Revêtements	190
2.1	Automorphismes de revêtement	193
2.2	Application : Théorème de Nielsen Schreier	195
3	Exercices	195
	Bibliographie	197

Table des figures

1.1	La fonction $f(s)f(1-s)$	8
1.2	Démonstration de Sard d'après deRham	12
1.3	Paire de courbes de niveau transverses	13
1.4	Paire de courbes de niveau non-transverses	13
1.5	Portrait de phase du pendule libre $\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin(\theta) = 0$	19
1.6	En vert : Trajectoire du pendule avec frottement. En rouge : niveaux de $\frac{1}{2}y^2 - \cos(x)$	21
2.1	Carte pour une sous-variété de dimension 1 du plan	40
2.2	Image d'une immersion qui n'est pas une sous-variété	43
2.3	Image d'une immersion injective qui n'est pas une sous-variété	44
2.4	Courbes d'intersection de deux ellipsoïdes	51
2.5	Isothermes annuelles du Canada.	53
2.6	Exercice (N)	54
3.1	Une carte de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$	66
4.1	Un exemple de surface non-orientable : le ruban de Möbius	77
5.1	L'application de Gauss	99
5.2	L'application F_ν envoyant (x, h) sur $(\nu(x), h)$	99
6.1	Exemple de paire de noeuds (Wikipedia commons)	127
6.2	Croisements correspondant à n_1, n_2, n_3, n_4 respectivement	127
7.1	Partition de l'unité de $U \cup V$	156
8.1	Monocycle	161
8.2	Démonstration du théorème de Sussmann	166
8.3	Champ de plans non-intégrable et courbe tangente	169
8.4	Boule roulant sans glisser sur un plan	171
10.1	Revêtement universel du bouquet de deux cercles	196

Chapitre 1

Préliminaires

Nous présentons dans ces préliminaires un certain nombre d'outils "analytiques" qui permettent de travailler localement sur les variétés. La Géométrie différentielle commence par établir des propriétés locales des variétés, avant de s'attaquer à des propriétés globales, en général plus difficiles.

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n et K un compact de Ω . On note $C^m(\Omega)$ l'espace des fonctions de classe C^m sur Ω et par $C^m(K)$ l'espace des fonctions C^m au voisinage de K . Enfin C_K^m est l'espace des fonctions C^m à support dans K , c'est-à-dire telles que $\{x \mid f(x) \neq 0\} \subset K$. Lorsque Ω est omis, il faut entendre qu'il s'agit du cas $\Omega = \mathbb{R}^n$. Enfin $C_0(\Omega)$ est la réunion des C_K^m pour K dans Ω . Si $m = \infty$, C^m est l'espace des fonctions C^∞ , si $m = \omega$, c'est l'espace des fonctions analytiques, c'est-à-dire des fonctions qui sont au voisinage de chaque point la somme d'une série entière convergente.

1 Partition de l'unité

(d'après [Munkres])

Le théorème énoncé à la fin de cette section permet dans de nombreux cas de remplacer une question globale par une question locale. Il joue surtout un rôle crucial dans l'étude des variétés et sous-variétés.

Tout d'abord il est important de remarquer qu'il existe des fonctions C^m à support compact (ici $m \leq \infty$ mais $m \neq \omega$). En effet,

Lemme 1.1. *La fonction définie sur \mathbb{R} par $f(t) = e^{-1/t}$ pour $t \geq 0$ et par $f(t) = 0$ pour $t \leq 0$ est C^∞ .*

Démonstration. On montre par récurrence que pour $t > 0$, $f^{(p)}(t)$ est de la forme $\frac{Q(t)}{t^{2p}} e^{-1/t}$

où Q est un polynôme. En effet, cela est vrai pour $p = 0$ et la dérivée de $\frac{Q(t)}{t^p}e^{-1/t}$ est

$$\frac{tQ'(t) - 2pQ(t)}{t^{2p+1}}e^{-1/t} - \frac{Q(t)}{t^{2p+2}}e^{-1/t}$$

Il en résulte que $f^p(t)$ est bien définie pour $t > 0$ et que $\lim_{t \rightarrow 0} f^p(t) = 0$. On en déduit que f est p -fois dérivable en 0, et que sa p -ième dérivée est continue. Donc f est de classe C^p pour tout p , et elle est finalement de classe C^∞ . \square

On peut alors construire une fonction g telle que $g(t) = 0$ pour $t \leq 0$ et $g(t) = 1$ pour $t \geq 1$. Il suffit de poser $I = \int_{\mathbb{R}} f(t)f(1-t)dt$. Alors $I > 0$ et $g(t) = \frac{1}{I} \int_{-\infty}^t f(s)f(1-s)ds$.

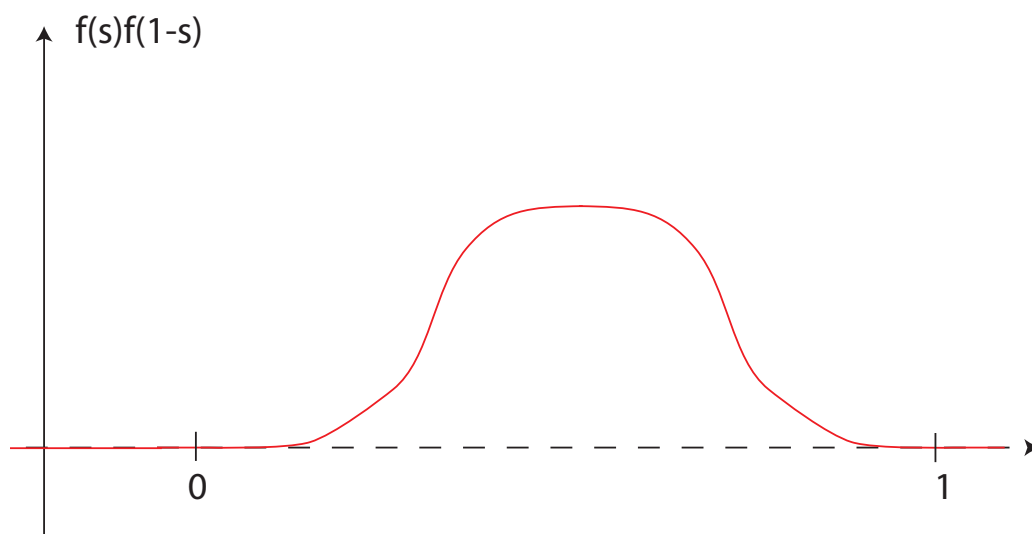


FIGURE 1.1 – La fonction $f(s)f(1-s)$.

Proposition 1.2. *Soit K un compact contenu dans Ω . Il existe une fonction φ de $C_0^\infty(\Omega)$ égale à 1 au voisinage de K .*

Démonstration. Soit δ tel que $B(x, \delta) \subset \Omega$ pour tout x de K (qui existe car $d(x, \mathbb{C}\Omega)$ atteint son minimum > 0 sur le compact K). Alors posant

$$\psi_x(y) = 2g\left(1 - \frac{|y-x|^2}{\delta^2}\right)$$

et $W_x = \{y \mid \psi_x(y) > 1\}$, on a $K \subset \bigcup_{x \in K} W_x$ et en extrayant un sous-recouvrement fini par les W_{x_j} , on pose $\varphi(y) = g(\sum_j \psi_{x_j}(y))$. Alors $\varphi = 1$ sur K et $\varphi = 0$ hors d'un δ -voisinage de K . \square

Corollaire 1.3. *Si F est un fermé contenu dans un ouvert U , il existe une fonction C^∞ à support dans U égale à 1 sur F .*

Démonstration. On écrit $F_j = F \cap \overline{B(0, j) \setminus B(0, j-2)}$ et on voit que F est réunion des compacts F_j . La proposition précédente associe à F_j une fonction φ_j à support dans $U_j = U \cap (B(0, j+1) \setminus B(0, j-3))$, et la somme $\sum_j \varphi_j$ étant localement finie¹, $\varphi = g(\sum_j \varphi_j)$ répond à la question. □

Théorème 1.4. *Soit X un sous-ensemble fermé de \mathbb{R}^n et $(U_j)_{j \in \mathbb{N}}$ un recouvrement localement fini de X . Il existe alors des fonctions χ_j dans $C_0^\infty(U_j)$, à valeurs dans $[0, 1]$ vérifiant*

$$\sum_j \chi_j(x) = 1 \text{ sur } X$$

Démonstration. Il existe un recouvrement de X par des ouverts V_j tels que $\overline{V_j} \subset U_j$ (recouvrement qui est automatiquement localement fini). Supposons en effet avoir défini V_1, \dots, V_m tels que

$$X \subset \bigcup_{1 \leq j \leq m} V_j \cup \bigcup_{k \geq m+1} U_k$$

On pose $F_{m+1} = X \setminus (\bigcup_{1 \leq j \leq m} V_j \cup \bigcup_{k \geq m+2} U_k)$. On a par hypothèse $F_{m+1} \subset U_{m+1}$, on peut alors trouver² un ouvert V_{m+1} tel que $F_{m+1} \subset V_{m+1} \subset \overline{V_{m+1}} \subset U_{m+1}$. On a alors

$$X \subset \bigcup_{1 \leq j \leq m+1} V_j \cup \bigcup_{k \geq m+2} U_k$$

On prend alors φ_j valant 1 sur $\overline{V_j}$ et s'annulant hors de U_j . Alors $\sum_j \varphi_j > 0$ sur $\bigcup_j V_j$ et si $\psi(x) = 1$ sur X et vaut 0 hors de $\bigcup_j V_j$, on a sur X l'égalité $\sum_j \frac{\varphi_j(x)}{(1-\psi(x)) + \sum_j \varphi_j(x)} = 1$. Les fonctions $\chi_j(x) = \frac{\varphi_j(x)}{(1-\psi(x)) + \sum_j \varphi_j(x)}$ répondent donc à la question. □

Théorème 1.5. *Soit K un compact de \mathbb{R}^n contenu dans la réunion d'ouverts $\bigcup_\alpha U_\alpha$. Il existe alors des fonctions χ_α dans $C_0^\infty(U_\alpha)$, à valeurs dans $[0, 1]$ vérifiant*

$$\sum_\alpha \chi_\alpha(x) = 1 \text{ sur } K$$

la somme étant supposée localement finie.

Démonstration. On rappelle le théorème de Lebesgue : pour tout recouvrement de K il existe un δ tel que les boules $B(x, \delta)$ pour x dans K sont toutes contenues dans un U_α . Posant $\psi_x(y) = 2f(\delta^2 - |y-x|^2)$ et $W_x = \{y \mid \psi_x(y) > 1\}$, les W_x pour x dans K forment un recouvrement de K dont on extrait un sous-recouvrement fini par les W_{x_j} . On pose

1. C'est-à-dire que chaque point possède un voisinage sur lequel seul un nombre fini de φ_j sont non nuls.

2. Car un espace métrique est normal : on prend $V_{m+1} = \{x \mid d(x, F_{m+1}) < d(x, \complement U_{m+1})\}$

$\psi_j = \psi_{x_j}$. Alors $\sum_j \psi_j(y) > 1$ sur K et si φ est la fonction associée par la proposition précédente à K , les fonctions

$$\chi_j = \frac{\psi_j}{(1 - \varphi) + \sum_j \psi_j}$$

répondent au problème posé. □

2 Inversion locale et fonctions implicites. Théorème du rang constant

Le théorème d'inversion locale et le théorème des fonctions implicites ont été vus en cours de Topologie et Calcul Différentiel. Nous nous contentons de rappeler les énoncés des théorèmes

Théorème 1.6 (Fonctions implicites). *Soient E_1, E_2, F des espaces de Banach U, V des ouverts respectivement dans E_1, E_2 , et $f : U \times V \rightarrow F$ une application C^k où $k \geq 1$. On suppose $f(x_0, y_0) = 0$ et $\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0)$ inversible dans $\mathcal{L}(E_2, F)$ d'inverse continue. Alors il existe des voisinages U' de x_0 et V' de y_0 et une application $\varphi \in C^k(U', V')$ tels que*

$$\forall (x, y) \in U' \times V' \quad , \quad f(x, y) = 0 \iff y = \varphi(x) .$$

Théorème 1.7 (Théorème d'inversion locale). *Si U, V sont des ouverts dans les espaces de Banach E_1, E_2 , et $\varphi : U \rightarrow V$ est C^k , $k \geq 1$, et $d\varphi(x_0)$ est un isomorphisme, il existe des ouverts U' et V' contenant x_0 et $y_0 = \varphi(x_0)$ et une application $\psi \in C^k(V', U')$ telle que $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi = \text{Id}$. L'application φ est donc un difféomorphisme de U' sur V' .*

Théorème 1.8 (Théorème du rang constant). *Soient U, V des ouverts de \mathbb{R}^m et \mathbb{R}^n et $f : U \rightarrow V$ de classe C^k , $k \geq 1$, et $d\varphi(x)$ est de rang constant r dans U . Alors il existe des ouverts U' et V' contenant x_0 et $y_0 = f(x_0)$ et des difféomorphismes locaux ρ défini sur U' et σ défini sur V' tels que $\sigma \circ f \circ \rho(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_r, 0, 0, \dots, 0)$.*

Démonstration. Quitte à composer avec des changement de coordonnées affine, on peut supposer que $x_0 = 0, y_0 = 0$ et que $df(x_0)$ est la projection $(x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$. Soit alors π la projection $(x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_r)$ et w l'application

$$w(x_1, \dots, x_m) = (\pi \circ f(x_1, \dots, x_m), x_{r+1}, \dots, x_m)$$

Sa différentielle en x_0 est l'identité, il existe donc ρ difféomorphisme local de \mathbb{R}^m telle que $w \circ \rho = \text{Id}$ soit $(\pi(f(\rho(x_1, \dots, x_m)))) = (x_1, \dots, x_r)$, on s'est donc ramené à la situation où

$$f(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_r, g(x_1, \dots, x_m))$$

où $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n-r}$. L'hypothèse que f est de rang r au voisinage de 0 entraîne que pour tout x dans U' , $\frac{\partial g}{\partial x_j} = 0$ pour $j > r$ et donc que $g(x_1, \dots, x_m) = g(x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$. En posant $g = (g_{r+1}, \dots, g_m)$ et composant avec le difféomorphisme

$$\sigma : (y_1, \dots, y_n) \mapsto (y_1, \dots, y_r, y_{r+1} - g_{r+1}(y_1, \dots, y_r), \dots, y_n - g_n(y_1, \dots, y_r))$$

cela conclut la démonstration. □

Deux cas particuliers

Corollaire 1.9 (Forme normale des immersions). *Soient U, V des ouverts de \mathbb{R}^m et \mathbb{R}^n et $\varphi : U \rightarrow V$ de classe C^k , $k \geq 1$, et $d\varphi(x_0)$ est de rang m . Alors il existe des ouverts U' et V' contenant x_0 et $y_0 = \varphi(x_0)$ et des applications $\rho \in C^k(U', U')$ et $\sigma \in C^k(V', V)$ telle que $\sigma \circ \varphi \circ \rho(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m, 0, 0, \dots, 0)$.*

Corollaire 1.10 (Forme normale des submersions). *Soient U, V des ouverts de \mathbb{R}^m et \mathbb{R}^n et $\varphi : U \rightarrow V$ de classe C^k , $k \geq 1$, et $d\varphi(x_0)$ est de rang n . Alors il existe des ouverts U' et V' contenant x_0 et $y_0 = \varphi(x_0)$ et des applications $\rho \in C^k(U', U')$ et $\sigma \in C^k(V', V)$ telle que $\sigma \circ \varphi \circ \rho(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_n)$.*

Démonstration des deux corollaires. Il suffit de remarquer que le rang est semi-continu inférieurement, et que si ce rang est maximal, il reste maximal dans un voisinage. On peut alors appliquer le théorème du rang constant.

□

3 Théorème de Brown-Morse-Sard

Il s'agit du théorème très important suivant

Théorème 1.11 (Morse-Sard). *Soit f une application de classe C^p de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m , avec $p \geq \max\{n - m + 1, 1\}$. Alors l'ensemble des valeurs critiques $C = \{f(x) \in \mathbb{R}^m \mid \text{rang}(df(x)) < n\}$ est de mesure nulle.*

Remarques 3.1. (A) Attention, c'est l'ensemble des **valeurs critiques** qui est de mesure nulle, donc un sous-ensemble de \mathbb{R}^m . L'ensemble des **points critiques** qui est $K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{rang}(df(x)) < m\}$ n'a pas de raison d'être de mesure nulle (exemple : une application constante).

(B) La différentiabilité de l'énoncé est optimale. Voir *A fonction not constant on a connected set of critical points*, par H. Whitney, Duke Math. Journal, 1935, pp. 514-517.

Démonstration pour $n \leq m$. (cf. [deRham]) Nous renvoyons à [Milnor] pour la démonstration générale, nous traitons cependant le cas facile $n \leq m$. Notons que pour $n < m$ le théorème dit que l'image est de mesure nulle, et il n'y a donc pas d'application de Peano en C^1 , mais le cas $m = n$ est déjà intéressant. Il suffit de se limiter à la restriction de f à un compact de \mathbb{R}^n , car \mathbb{R}^n est réunion dénombrable de compacts et une réunion dénombrable d'ensembles de mesure nulle est de mesure nulle. Supposons donc $m = n$. Recouvrons donc $[0, 1]^n$ par N^n cubes dont les côtés sont de taille $1/N$. Considérons le sous-ensemble constitué de cubes contenant au moins un point critique. On note \mathcal{K} l'ensemble de ces cubes, et pour chacun d'entre eux on se donne un point critique x_j . Alors l'image de $df(x_j)$ est contenue dans un sous-espace-vectoriel de codimension > 0 , et on

note H_j le sous-espace affine associé passant par $f(x_j)$. Comme il existe une fonction ε continue et s'annulant en 0 telle que

$$|f(x) - f(x_j) - df(x_j)(x - x_j)| \leq |x - x_j|\varepsilon(|x - x_j|)$$

on a donc que $f(K_j)$ est contenu dans un $1/N \cdot \varepsilon(1/N)$ voisinage de H_j , et notant $C = \|df\|_{C^0([0,1]^n)}$ dans une boule de rayon $(C + 1)/N$, donc dans un ensemble de volume $\frac{(C+1)^{n-1}}{N^{n-1}} \varepsilon(1/N)$. Comme il y a au plus N^n cubes, on trouve que le volume total de l'image des cubes de \mathcal{K} est au plus $C^{n-1}\varepsilon(1/N)$ qui tend vers 0 avec N . On en déduit que $f(K \cap [0, 1]^n)$ est de mesure nulle, et par le même argument $f(K \cap [-R, R]^n)$ est de mesure nulle. On conclut en utilisant le fait que $F(K) = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} f(K \cap [-j, j]^n)$ et qu'une réunion dénombrable d'ensembles de mesure nulle est de mesure nulle. \square

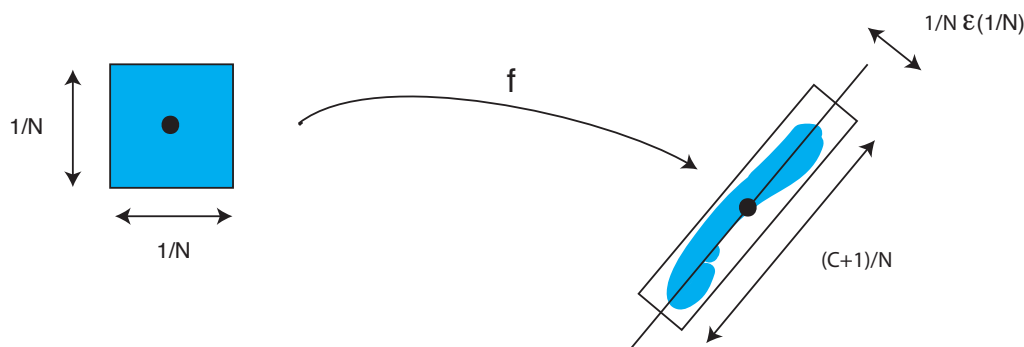


FIGURE 1.2 – Démonstration de Sard d'après deRham

3.0.1 Application

Soit f, g deux applications de classe C^2 de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} . Si $df(x, y) \neq 0$ pour tout $(x, y) \in f^{-1}(t)$ alors le niveau $C(t) = \{(x, y) \mid f(x, y) = t\}$ est localement difféomorphe à \mathbb{R} (théorème de forme normale des submersions). On dit que $C_t(f)$ est une courbe lisse. De même pour $C_s(g)$. On prétend que pour (s, t) hors d'un ensemble de mesure nulle, $C_t(f)$ et $C_s(g)$ sont des courbes lisses qui ne sont pas tangentes aux points d'intersection. Que $C_t(f)$ et $C_s(g)$ soient des courbes lisses pour presque tous (s, t) résulte immédiatement de Sard appliqué à f et g , et du fait que le produit de deux ensembles de mesure nulle est de mesure nulle. La transversalité s'obtient en considérant les valeurs critiques de $(x, y) \mapsto (f(x, y), g(x, y))$ qui sont donnés soit par l'annulation de l'un des vecteurs $(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y))$ ou $(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), \frac{\partial g}{\partial y}(x, y))$ (déjà exclue hors d'un ensemble de mesure nulle par le raisonnement ci-dessus) ou encore par la colinéarité de ces deux vecteurs, tous deux non nuls, correspondant au cas, où $C_t(f)$ et $C_s(g)$ sont des courbes lisses tangentes en (x, y) . Le théorème de Sard dit que pour presque tous (s, t) , $C_t(f)$ et $C_s(g)$ sont des courbes lisses qui ne sont pas tangentes aux points d'intersection.

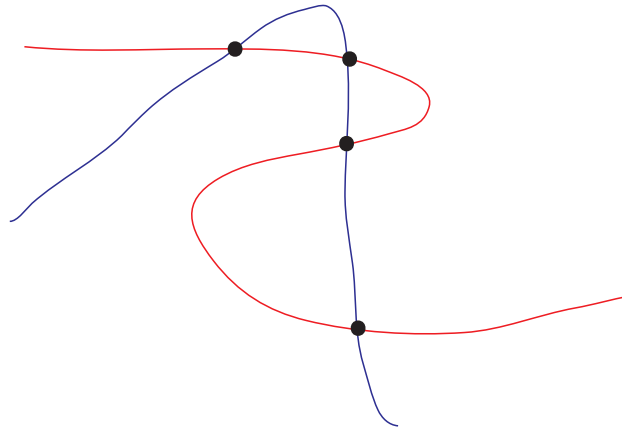


FIGURE 1.3 – Paire de courbes de niveau transverses

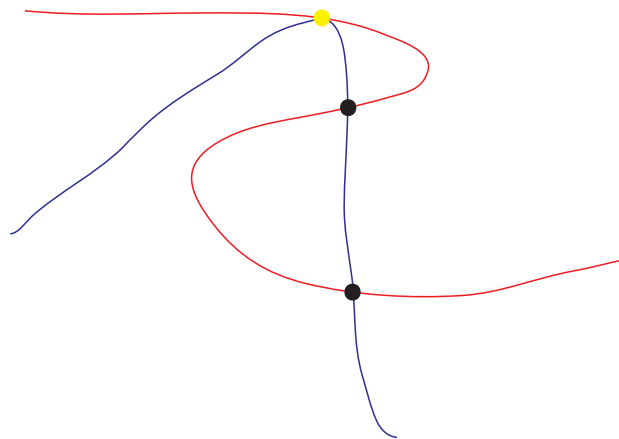


FIGURE 1.4 – Paire de courbes de niveau non-transverses

4 Champs de vecteurs

4.1 Remarques générales sur les équations différentielles

Un système d'équations différentielles d'ordre quelconque se ramène toujours à un système d'équations d'ordre un. En effet l'équation

$$\frac{d^k x}{dt^k} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2 x}{dt^2}, \dots, \frac{d^{k-1} x}{dt^{k-1}}\right) \quad x \in \mathbb{R}^k$$

se réécrit sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots = \vdots \\ \dot{x}_{k-1} = f(t, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}) \end{cases}$$

Cette remarque banale permet d'éviter de répéter les mêmes énoncés pour les équations de degré 2, puis 3, etc. . . alors même qu'il ne s'agit que de transcrire les résultats. Cela ne signifie pas que les équations de degré k ne puissent avoir des spécificités que ne possèdent pas les systèmes de degré un.

Plus généralement, un système d'équations de degrés différents se réduira par le même procédé à un système de degré un, défini sur un espace de dimension plus grande, que l'on écrira en toute généralité :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_k) \\ \vdots = \vdots \\ \dot{x}_k = f_k(x_1, \dots, x_k) \end{cases}$$

et de manière abrégée, sous la forme

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{t}, \mathbf{x})$$

où $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^k)$, et $\mathbf{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$ est au moins continue.

On peut même supposer que \mathbf{f} est une application de $\mathbb{R} \times E$ dans E où E est un espace de Banach

Remarque 4.1. Il est important de noter que les équations différentielles implicites, c'est à dire de la forme $f(t, x, \dot{x}) = 0$, présentent des difficultés qui n'apparaissent pas dans l'étude les équations « ordinaires ». On peut lorsque $\frac{\partial}{\partial v} f(t, x, v)$ est inversible en un point (t_0, x_0, v_0) annulant f , utiliser le théorème des fonctions implicites pour se ramener au voisinage de ce point aux théorèmes du cours. Nous ne ferons pas ici la théorie générale de telles équations.

4.2 Théorème de Cauchy-Lipschitz

Soit $X : I \times \Omega \rightarrow E$ est définie sur le produit d'un intervalle ouvert I de \mathbb{R} et d'un ouvert Ω d'un espace de Banach, E . On veut résoudre l'équation $\dot{x} = X(t, x)$ avec condition initiale $x(t_0) = x_0 \in \Omega$.

Théorème 1.12 (Théorème de Cauchy-Lipschitz). *Supposons X continue en (t, x) , et lipschitzienne en la seconde variable. Alors, pour tous $\tau_0 \in I$, $u_0 \in \Omega$ il existe $\delta > 0$ et $\alpha > 0$ tels que quels que soient u dans $B(u_0, \delta)$ et t_0 dans $]\tau_0 - \delta, \tau_0 + \delta[$, le système*

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x} &= X(t, x) \\ x(t_0) &= u \end{cases}$$

possède une unique solution définie sur $]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$.

Il est souvent utile d'avoir une version à paramètres de ce théorème, la taille de l'intervalle d'existence restant minorée

Théorème 1.13 (Cauchy-Lipschitz à paramètres). *Soit $(\lambda, t, x) \rightarrow X_\lambda(t, x)$ une application C^p , avec $p \geq 0$, définie sur $\Lambda \times I \times \Omega$, lipschitzienne en x . Pour tout (λ_0, τ_0, u_0) , il existe $\delta > 0$ et $\alpha > 0$ tels que quel que soit (λ, t_0, u) dans $B(\lambda_0, \delta) \times]\tau_0 - \delta, \tau_0 + \delta[\times B(u_0, \delta)$, la solution $x_\lambda(t; t_0, u)$ de*

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{x} &= X_\lambda(t, x) \\ x(t_0) &= u \end{cases}$$

soit définie sur $]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$. De plus l'application $(t, \lambda, t_0, u) \rightarrow x_\lambda(t; t_0, u)$ est de classe C^p , et de classe C^{p+1} en t .

Remarque 4.2. Soient $\dot{x} = f(x)$, où $x \in \mathbb{R}^n$ une équation différentielle, alors les solutions $t \mapsto x(t)$ fournissent une famille de courbes remplissant l'espace (puisque pour chaque $x_0 \in \mathbb{R}^n$ il passe une courbe par ce point (i.e. il existe une solution telle que $x(0) = x_0$) et deux courbes de la famille ne se croisent pas (i.e. la solution telle que $x(0) = x_0$ est unique et la solution telle que $y(t_0) = x_0$ est donnée par $y(t) = x(t - t_0)$, c'est donc un reparamétrage de x). Ces familles de courbes doivent satisfaire à des restrictions plus importantes, par exemple absence d'enveloppe de la famille (cf. exercice P du chapitre 2).

On peut se demander pourquoi une solution de (1) peut ne pas être définie sur I tout entier. La proposition suivante montre que l'unique raison est le phénomène d'« explosion en temps fini » :

Proposition 1.14. *Soit $X :]t_-, t_+[\times \Omega \rightarrow E$ vérifiant les hypothèses de Cauchy-Lipschitz, et x une solution maximale, définie sur $J =]\tau_-, \tau_+[$. Alors si $\tau_+ < t_+$, $x(t)$ « sort de tout compact » lorsque t tend vers τ_+ . En d'autres termes : pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $t_0 \in J$, tel que pour tout $t \geq t_0$, $t \in J$ on a $x(t) \notin K$.*

Remarque 4.3. Lorsque E est de dimension finie et $\Omega = E$, la conclusion est équivalente à $\lim_{t \rightarrow \tau_+} |x(t)| = +\infty$, car les boules de rayon R étant compactes, et $x(t)$ sortant de toute boule, on a

$$\forall R > 0 \quad \exists \tau_R \text{ tel que } \tau_- < t < \tau_+ \Rightarrow |x(t)| \geq R$$

c'est-à-dire que $|x(t)|$ tend vers $+\infty$ lorsque t tend vers τ_+ .

Démonstration. Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe une suite $(t_n)_{n \geq 1}$ telle que $x(t_n) \in K$, où K est compact, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = \tau_+$. On peut alors extraire une sous-suite, que l'on note encore $(t_n)_{n \geq 1}$, telle que $x_n = x(t_n)$ converge vers x_∞ .

Le théorème de Cauchy-Lipschitz nous assure l'uniformité de la taille de l'intervalle de définition au voisinage d'un point, ce qui permet d'affirmer qu'il existe α, δ strictement positifs tels que la solution de

$$\begin{cases} \dot{x} &= X(t, x) \\ x(t_n) &= x_n \end{cases}$$

est définie sur $]t_n - \alpha, t_n + \alpha[$ si $d(x_n, x_\infty) < \delta$.

Or pour n assez grand, on aura bien $d(x_n, x_\infty) < \delta$, et comme t_n tend vers τ_+ , on aura que $]t_n - \alpha, t_n + \alpha[$ n'est plus contenu dans J . La solution x est donc définie sur un intervalle strictement plus grand que J , qui n'était donc pas maximal. \square

5 Flots, portrait de phase

5.1 Notions de base

L'une des idées de base de la théorie des systèmes dynamiques, c'est de ne pas regarder une seule solution à la fois, mais de les considérer toutes simultanément. Si ce point de vue demande initialement un important effort conceptuel, on en recueille vite les fruits.

Soit

$$(1) \quad \dot{x} = X(t, x)$$

une équation vérifiant les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz. On suppose pour simplifier que les solutions sont définies pour tout temps.

Définition 1.15. Le flot de l'équation $\dot{x}(t) = X(t, x(t))$ est l'application

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

telle que $\varphi(t, t_0, x_0) = x(t)$ où x est la solution de (1) avec condition initiale $x(t_0) = x_0$.

Dans la suite on utilisera la notation $\varphi_{t_0}^t(x)$ au lieu de $\varphi(t, t_0, x_0)$. Lorsque X est linéaire, le flot n'est rien d'autre que la résolvante : $\varphi_{t_0}^t = R_{t_0}^t$.

Définition 1.16. Si $X(t, x)$ ne dépend pas de t , on dit que l'équation est **autonome**, ou encore que $X(x)$ est un **champ de vecteurs**. Dans le cas contraire, l'équation est dite **non-autonome**.

Le flot a la propriété élémentaire suivante :

Il vérifie

$$(2) \quad \varphi_{t_1}^{t_2} \circ \varphi_{t_0}^{t_1} = \varphi_{t_0}^{t_2}$$

en particulier $\varphi_{t_0}^t \circ \varphi_t^{t_0} = \varphi_t^t = Id$, et le flot est inversible.

Cela permet de montrer

Proposition 1.17. *Soit $(\lambda, t, x) \rightarrow X_\lambda(t, x)$ une application C^p , avec $p \geq 0$, définie sur $\Lambda \times I \times \Omega$, lipschitzienne en x . Supposons que $x_\lambda(t; t_0, u)$ solution de*

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{x}_\lambda & = X_\lambda(t, x) \\ x_\lambda(t_0) & = u \end{cases}$$

soit définie sur $]t_-, t_+[$ quel que soit (λ, t_0, u) dans $\Lambda \times I \times \Omega$. Alors l'application $(t, \lambda, t_0, u) \rightarrow x_\lambda(t; t_0, u)$ est de classe C^p , et de classe C^{p+1} en t .

Démonstration. Tout d'abord il suffit de montrer l'assertion au voisinage de tout point (λ_0, τ_0, u_0) de $\Lambda \times I \times \Omega$. Supposons qu'il existe $t > \tau_0$ (le cas $\tau_0 < t$ se traite de manière analogue) dans I pour lequel la solution de l'équation soit définie, mais ne soit pas de classe C^p . Alors le théorème de Cauchy-Lipschitz à paramètres nous dit que l'ensemble

$\{t \mid \text{il existe un voisinage de } \{\lambda_0\} \times]\tau_0, t] \times \{u_0\} \text{ sur lequel } (\lambda, t, u) \rightarrow x_\lambda(t; t_0, u) \text{ soit de classe } C^p\}$ est non vide et possède une borne supérieure vérifiant, par hypothèse, $t_1 < t$.

Pour $z = x_{\lambda_0}(t_1; t_0, u_0)$ c'est encore le théorème de Cauchy-Lipschitz à paramètres qui va nous fournir un réel δ strictement positif, tel que l'équation

$$(3) \quad \begin{cases} \dot{y}_\lambda & = X_\lambda(t, y) \\ y_\lambda(\tau) & = v \end{cases}$$

ait ses solutions définies sur un intervalle $]t_1 - \alpha, t_1 + \alpha[$ pour $\alpha > 0$ pour (λ, τ, v) dans $B(\lambda_0, \delta) \times]t_1 - \delta, t_1 + \delta[\times B(z, \delta)$. De plus la solution est de classe C^p en (λ, τ, v) .

La continuité de $x_{\lambda_0}(t; \tau_0, x_0)$ en t permet³ de dire qu'il existe $\eta > 0$, que l'on choisira inférieur à α , tel que $x_{\lambda_0}(t_1 - \eta; \tau_0, x_0)$ soit dans $B(z, \delta)$.

La continuité de $(\lambda, t, u) \rightarrow x_\lambda(t; t_0, u)$ en $(\lambda_0, t_1 - \eta, u_0)$ permet de dire qu'il existe un voisinage de (λ_0, τ_0, u_0) tel que $x_\lambda(t_1 - \eta; t_0, u)$ reste dans $B(z, \delta)$. De plus, puisque $t_1 - \eta < t_1$ cette application est de classe C^p .

Mais pour $v = x_\lambda(t_1 - \eta, t_0, u)$, $\tau = t_1 - \eta$ la solution y_λ de (3) coïncide avec x_λ . Au voisinage de $(t_1; \lambda_0, t_0, u)$ l'application

$$(t; \lambda, t_0, u) \rightarrow y_\lambda(t; t_1 - \eta, x_\lambda(t_1 - \eta, t_0, u)) = x_\lambda(t; t_0, u)$$

3. Car $t \rightarrow x_{\lambda_0}(t)$ satisfait (2), et est donc dérivable en t .

est composée d'applications de classe C^p . Elle est donc de classe C^p (λ, t) $\rightarrow x_\lambda(t)$ est la composée de $\lambda \rightarrow x_\lambda(t_1 - \eta)$ qui est C^p et de $(\lambda, t, u) \rightarrow x_\lambda(t; t_1 - \eta, x_\lambda(t_1 - \eta))$

Mais alors

$$(t; \lambda, t_0, u) \rightarrow x_\lambda(t; t_0, u)$$

est de classe C^p au voisinage de $\{\lambda_0\} \times [\tau_0, t_1[\times \{u_0\}$ et de $\{\lambda_0\} \times]t_1 - \eta, t_1 + \eta[\times \{u_0\}$ et donc au voisinage de $\{\lambda_0\} \times [\tau_0, t_1 + \eta[\times \{u_0\}$ ce qui contredit la maximalité de t_1 . \square

Enfin nous obtenons

Proposition 1.18. *Si X est de classe C^k ($k \geq 1$) alors $\varphi_{t_0}^t$ est un difféomorphisme de classe C^k .*

Démonstration. L'application $\varphi_{t_0}^t$ est de classe C^k a été déjà démontré dans la proposition 1.17.

Enfin, c'est bien un difféomorphisme, puisque son inverse, $\varphi_{t_1}^{t_0}$ est aussi de classe C^k . \square

Remarque 5.1.

Si $X(t, x) = X(x)$ est autonome, alors $\varphi_{t_0}^t = \varphi_0^{t-t_0}$ que l'on note souvent φ^{t-t_0} .

La formule (2) devient alors $\varphi^t \circ \varphi^u = \varphi^{t+u}$. On obtient donc un sous-groupe du groupe des difféomorphismes de \mathbb{R}^n isomorphe à un quotient de \mathbb{R} par le sous-groupe fermé $G = \{t \in \mathbb{R} \mid \varphi^t = \text{Id}\}$, c'est-à-dire isomorphe à l'un des groupes $\mathbb{R}, S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}, \{\text{Id}\}$, ce dernier cas n'étant possible que si $X = 0$.

Réciproquement tout sous-groupe de classe C^1 du groupe des difféomorphismes de classe C^1 , isomorphe à \mathbb{R} est engendré par un flot. En effet, si on note φ^t l'image de t , posant $X(x) = \frac{d}{dt}\varphi^t(x) \big|_{t=0}$, on a

$$\frac{d}{dt}\varphi^t(x) \big|_{t=s} = \frac{d}{dt}\varphi^{t+s}(x) \big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\varphi^t\varphi^s(x) \big|_{t=0} = X(\varphi^s(x))$$

Donc φ^t est solution de l'équation (1), pour le champ de vecteurs $X(x)$.

On appelle **groupe à un paramètre** un tel sous-groupe du groupe des difféomorphismes, et le champ X son **générateur infinitésimal**.

Pour un champ de vecteurs $X(x)$ on appelle **orbite** de x ou trajectoire passant par x , la « courbe » :

$$\mathcal{O}_x = \{\varphi^t(x) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

4. On dit que le sous-groupe est de classe C^k si $(t, x) \mapsto \varphi^t(x)$ est de classe C^k en les deux variables.

Deux orbites ne peuvent s'intersecter sauf à être confondues. En effet, si $z \in \mathcal{O}_x \cap \mathcal{O}_y$, on a $z = \varphi^a(x) = \varphi^b(y)$. Donc $\varphi^{a-b}(x) = y$ et $\varphi^t(y) = \varphi^{t+a-b}(x)$: l'orbite de x est contenue dans celle de y et par symétrie ces orbites sont égales.

L'espace est partitionné en orbites dont la représentation est appelé **portrait de phase**. Les orbites sont de trois types topologiques, suivant que le sous-groupe fermé de \mathbb{R}

$$G_x = \{t \mid \phi^t(x) = x\}$$

est égal à \mathbb{R} , $T\mathbb{Z}$ ou $\{0\}$:

- (A) (cas $G_x = \mathbb{R}$) des points, (ceux où $X(x_0) = 0$) appelés **points singuliers**, ou **zéros** du champ de vecteurs.
- (B) (cas $G_x = T\mathbb{Z}$) des **orbites périodiques** (il existe $T > 0$ appelé période, tel que $\varphi^T(x) = x$), diffeomorphes à des cercles.
- (C) (cas $G_x = \{0\}$) des images de \mathbb{R} par une injection continue.

On voit les trois sortes d'orbites sur le portrait de phase du pendule, en coordonnées $(\theta, \dot{\theta})$ dans la figure 1.5.

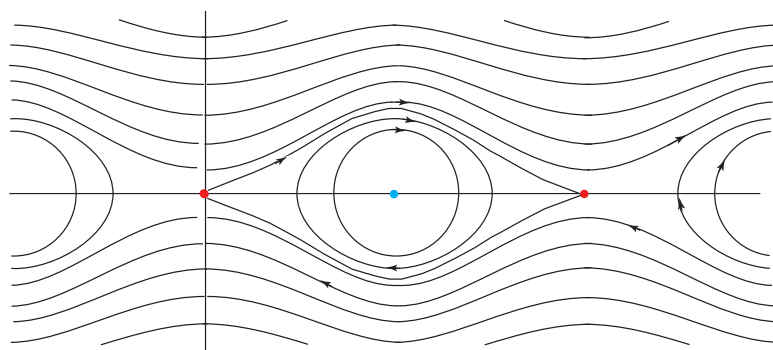


FIGURE 1.5 – Portrait de phase du pendule libre $\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin(\theta) = 0$

Notons que les flots sont un moyen commode de construire des diffeomorphismes que l'on ne sait pas « fabriquer explicitement. On pourra aussi se reporter à l'exercice (B) du chapitre 2.

5.2 Portraits de phase en dimension 2

Un cas simple est celui des systèmes conservatifs, c'est-à-dire du type Hamiltonien

$$\ddot{x} + \nabla V(x) = 0$$

ou encore du type

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases}$$

(Le premier cas s'obtient en posant $H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + V(x)$).

Dans ce cas la quantité $H(x, y)$ est constante sur les trajectoires, car

$$\frac{d}{dt}H(x(t), y(t)) = \frac{\partial H}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial H}{\partial y}\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial x} = 0$$

On trace alors les courbes $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid H(x, y) = c\}$ et les trajectoires sont contenues dans ces courbes. Le lemme suivant est alors utile pour dessiner le portrait de phase, car il permet d'affirmer que les trajectoires ne peuvent être arrêtées que par un zéro du champ de vecteurs.

Lemme 1.19. *Soit $x(t)$ la solution d'une équation différentielle autonome, et supposons que $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_\infty$. Alors x_∞ est un zéro du champ de vecteurs.*

Démonstration. Notons ϕ^t le flot, et $x(t) = \phi^t(x_0)$. Alors si $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi^t(x_0) = x_\infty$ on aura pour tout s , d'une part $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi^{t+s}(x_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \phi^t(x_0) = x_\infty$, d'autre part par continuité du flot, $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi^{t+s}(x_0) = \phi^s(\lim_{t \rightarrow \infty} \phi^t(x_0)) = \phi^s(x_\infty)$. On en déduit que pour tout s , $\phi^s(x_\infty) = x_\infty$ et donc $X(x_\infty) = \frac{d}{ds}\phi^s(x_\infty) = 0$. \square

Ce lemme nous permet d'affirmer que sur un niveau de H sans zéro, les trajectoires coïncident avec les composantes connexes du niveau de H .

Le portrait de phase du pendule s'obtient en prenant $H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \cos(x)$.

Lorsqu'on ajoute à l'équation un terme de frottement, par exemple

$$\ddot{x} + f\dot{x} + \nabla V(x) = 0$$

un calcul analogue montre que

$$\frac{d}{dt}H(x(t), y(t)) = -fy(t)^2$$

Le flot fait donc décroître H , et les orbites se dirigent vers les valeurs décroissantes de H . Par exemple pour un pendule avec frottement, les solutions sont rentrantes par rapport aux courbes $H^{-1}(c)$. On verra plus précisément ce qui se passe près des équilibres dans le chapitre ??.

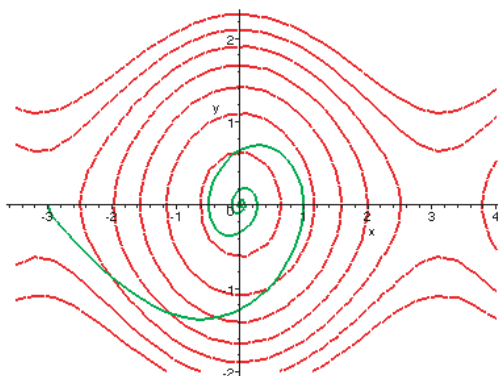


FIGURE 1.6 – En vert : Trajectoire du pendule avec frottement.
En rouge : niveaux de $\frac{1}{2}y^2 - \cos(x)$.

5.3 Conjugaison et changement de coordonnées.

Dans cette section la régularité des champs de vecteurs est au moins de classe C^1 . On souhaite décrire le portrait de phase d'un champ, et dire si deux champs de vecteurs se ressemblent, cette « ressemblance » signifiant qu'il existe un difféomorphisme conjuguant les deux flots, c'est-à-dire $h\varphi^t h^{-1} = \psi^t$ (φ^t et ψ^t sont les flots, h le difféomorphisme). En particulier cela entraîne que les portraits de phase sont difféomorphes.

Définition 1.20. Soit h un difféomorphisme, $X(t, x)$ un système dynamique. On note h_*X le système dynamique Y défini par

$$h_*X(t, x) = Y(t, x) = dh(h^{-1}(x))X(t, h^{-1}(x))$$

Proposition 1.21 (Conjugaison de flots par un difféomorphisme). Si $\varphi_{t_0}^t$ est le flot de X et $\psi_{t_0}^t$ celui de $Y = h_*X$ on a

$$\psi_{t_0}^t = h \circ \varphi_{t_0}^t \circ h^{-1}$$

En particulier si X est autonome, Y l'est aussi, et h envoie les orbites de X sur celles de Y .

Démonstration : Il suffit de vérifier que $\psi_{t_0}^t(x)$ et $h \circ \varphi_{t_0}^t \circ h^{-1}(x)$ vérifient la même équation différentielle avec la même condition initiale en t_0 . Or en $t = t_0$, les deux fonctions prennent la valeur x et on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(h \circ \varphi_{t_0}^t \circ h^{-1}(x)) \Big|_{t=\tau} &= dh(\varphi_{t_0}^t \circ h^{-1}(x)) \frac{d}{dt} \varphi_{t_0}^t \Big|_{t=\tau} (h^{-1}(x)) = \\ &= dh(\varphi_{t_0}^\tau \circ h^{-1}(x)) X(\tau, \varphi_{t_0}^\tau \circ h^{-1}(x)) = \\ dh(h^{-1} \circ (h \circ \varphi_{t_0}^\tau \circ h^{-1})) X(\tau, h^{-1} \circ (h \circ \varphi_{t_0}^\tau \circ h^{-1}(x))) &= \\ (h_* X)(\tau, h \circ \varphi_{t_0}^\tau \circ h^{-1}) & \end{aligned}$$

□

On notera la propriété $(h \circ k)_* X = h_*(k_* X)$ qui résulte de la proposition ci-dessus.

Réécrire un champ de vecteurs dans un nouveau système de coordonnées relève de la même problématique, h étant le difféomorphisme de changement de coordonnées.

Exemple 5.1 (Coordonnées polaires). Soit $h : (r, \theta) \mapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ l'application de $\mathbb{R}^* \times [0, 2\pi[$ dans $\mathbb{R}^2 - \{0\}$. C'est un difféomorphisme d'un ouvert U tel que $\overline{U} \subset \mathbb{R}^* \times [0, 2\pi[$ sur son image⁵. Soit $X(x, y)$ un champ de vecteurs, alors $(h^{-1})_*(X)$ représente ce même champ en coordonnées polaires.

On utilise le fait que $dh^{-1} \circ dh(r, \theta) = Id$ et donc puisque

$$dh(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\text{et donc } dh^{-1}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\frac{1}{r} \sin(\theta) & \frac{1}{r} \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Si (e_x, e_y) est une base du plan, et $X(x, y) = X_x(x, y)e_x + X_y(x, y)e_y$, on aura

$$\begin{aligned} Y(r, \theta) &= dh^{-1}(h(r, \theta))(X(r, \theta)) = \\ dh^{-1}(r \cos(\theta), r \sin(\theta))(X_x(r \cos(\theta), r \sin(\theta))e_x + X_y(r \cos(\theta), r \sin(\theta))e_y) &= \\ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\frac{1}{r} \sin(\theta) & \frac{1}{r} \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_x \\ X_y \end{pmatrix} &= (\cos(\theta)X_x + \sin(\theta)X_y, \frac{-1}{r} \sin(\theta)X_x + \frac{1}{r} \cos(\theta)X_y) \end{aligned}$$

en d'autres termes, si $Y(r, \theta) = Y_r(r, \theta)e_r + Y_\theta(r, \theta)e_\theta$

$$\begin{aligned} Y_r(r, \theta) &= \cos(\theta)X_x(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) + \sin(\theta)X_y(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \\ Y_\theta(r, \theta) &= \frac{-1}{r} \sin(\theta)X_x(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) + \frac{1}{r} \cos(\theta)X_y(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \end{aligned}$$

5. en effet l'application inverse, $(x, y) \rightarrow (\sqrt{(x^2 + y^2)}, \text{Arcsin}(\frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}))$ est bien de classe C^1 sur un tel ouvert.

Le même principe transforme les symétries du champ de vecteur en symétries du flot, puisque si $h_*X = X$ on a $h \circ \phi^t = \phi^t \circ h$.

Exemple 5.2. Si $Z(x, y)$ est le champ de vecteurs associé à l'équation du pendule $\ddot{x} + \cos(x) = 0$, qui se réécrit $\dot{x} = y, \dot{y} = -\sin(x)$, c'est-à-dire $Z(x, y) = (y, -\sin(x))$. Si σ est le difféomorphisme consistant en une symétrie par rapport à l'origine, $\sigma(x, y) = (-x, -y)$ et puisque $Z(\sigma(x, y)) = (-y, \sin(x)) = \sigma(Z(x, y))$, on a $\sigma_*Z = Z$ et donc son flot ψ^t vérifiera $\psi^t(\sigma(x, y)) = \sigma\psi^t(x, y)$. On en déduit en particulier que σ envoie une trajectoire sur une autre trajectoire, le portrait de phase est donc invariant par σ .

Remarque 5.2. Si $h_*X = -X$, h conjugue le flot de X à celui de $-X$, c'est-à-dire ϕ^{-t} . on dit que h renverse le temps, et que le flot est « réversible ». Dans ce cas h envoie une trajectoire sur une autre, mais renverse son sens. A l'orientation près, le portrait de phase est encore invariant.

Exemple 5.3. Si on considère la symétrie d'axe vertical $\rho(x, y) = (-x, y)$, et Z est encore l'équation du pendule, $\rho_*Z(x, y) = (-y, \sin(x)) = -(y, -\sin(x)) = -Z(-x, y) = Z(\rho(x, y))$. Donc la symétrie d'axe vertical retourne les trajectoires du pendule.

6 Appendice : paracompacité et espaces métriques

On rappelle

Définition 1.22. Un espace paracompact est un espace X tel que pour tout recouvrement ouvert $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ on peut trouver un sous-recouvrement $(V_\beta)_{\beta \in B}$ (i.e. pour tout β il existe α tel que $V_\beta \subset U_\alpha$) qui soit localement fini (i.e. tout point possède un voisinage qui ne rencontre qu'un nombre fini de V_β).

Théorème 1.23 (Stone). *Tout espace métrique est paracompact*

Démonstration. Voir l'article de M.E. Rudin reproduit ci-dessous. □

- 7 Appendice : Démonstration de la paracompacité des espaces métriques (d'après M.E. Rudin, Proc. Amer. Math. Soc. 20 (1969), p. 603.

**A NEW PROOF THAT METRIC SPACES
ARE PARACOMPACT**

MARY ELLEN RUDIN

By using a well-ordered open cover, there is a simple proof of the nice theorem [1] that every metric space is paracompact.

Assume that X is a metric space and that $\{C_\alpha\}$ is an open cover of X indexed by ordinals. Let ρ be a metric on X and let $S(x, r)$ be the open sphere with center x and radius r . For each positive integer n define $D_{\alpha n}$ (by induction on n) to be the union of all spheres $S(x, 2^{-n})$ such that:

- (1) α is the smallest ordinal with $x \in C_\alpha$,
- (2) $x \notin D_{\beta j}$ if $j < n$,
- (3) $S(x, 3 \cdot 2^{-n}) \subset C_\alpha$.

Then $\{D_{\alpha n}\}$ is a locally finite refinement of $\{C_\alpha\}$ which covers X ; hence X is paracompact.

Certainly $\{D_{\alpha n}\}$ refines $\{C_\alpha\}$. To see that $\{D_{\alpha n}\}$ covers X , observe that, for $x \in X$, there is a smallest ordinal α such that $x \in C_\alpha$, and an n so large that (3) holds. Then, by (2), $x \in D_{\beta j}$ for some $j \leq n$.

To prove that $\{D_{\alpha n}\}$ is locally finite, assume an $x \in X$ and let α be the smallest ordinal such that $x \in D_{\alpha n}$ for some n , and choose j so that $S(x, 2^{-j}) \subset D_{\alpha n}$. The proof consists of showing that:

- (a) if $i \geq n + j$, $S(x, 2^{-n-i})$ intersects no $D_{\beta i}$,
- (b) if $i < n + j$, $S(x, 2^{-n-i})$ intersects $D_{\beta i}$ for at most one β .

PROOF OF (a). Since $i > n$, by (2), every one of the spheres of radius 2^{-i} used in the definition of $D_{\beta i}$ has its center y outside of $D_{\alpha n}$. And since $S(x, 2^{-j}) \subset D_{\alpha n}$, $\rho(x, y) \geq 2^{-j}$. But $i \geq j + 1$ and $n + j \geq j + 1$, so $S(x, 2^{-n-i}) \cap S(y, 2^{-i}) = \emptyset$.

PROOF OF (b). Suppose $p \in D_{\beta i}$, $q \in D_{\gamma i}$, and $\beta < \gamma$; we want to show that $\rho(p, q) > 2^{-n-i+1}$. There are points y and z such that $p \in S(y, 2^{-i}) \subset D_{\beta i}$, $q \in S(z, 2^{-i}) \subset D_{\gamma i}$; and, by (3), $S(y, 3 \cdot 2^{-i}) \subset C_\beta$ but, by (2), $z \notin C_\beta$. So $\rho(y, z) \geq 3 \cdot 2^{-i}$ and $\rho(p, q) > 2^{-i} \geq 2^{-n-i+1}$.

BIBLIOGRAPHY

1. A. H. Stone, *Paracompactness and product spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **54** (1948), 977-982.

UNIVERSITY OF WISCONSIN

Received by the editors January 30, 1968.

8 Appendice : Le théorème de Sard

THE MEASURE OF THE CRITICAL VALUES OF DIFFERENTIABLE MAPS

ARTHUR SARD

1. **Introduction.** Consider the map

$$(1.1) \quad y^j = f^j(x^1, x^2, \dots, x^m), \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

of a region R of euclidean m -space into part of euclidean n -space. Suppose that each function f^j ($j=1, \dots, n$) is of class C^q in R ($q \geq 1$).¹ A *critical point* of the map (1.1) is a point in R at which the matrix of first derivatives $\mathfrak{M} = \|f^j_i\|$ ($i=1, \dots, m; j=1, \dots, n$) is of less than maximum rank. The *rank* of a critical point x is the rank of \mathfrak{M} at x . A *critical value* is the image under (1.1) of a critical point. If $n=1$, these definitions are the usual definitions of critical point and value of a continuously differentiable function.

We prove the following result: *If $m \leq n$, the set of critical values of the map (1.1) is of m -dimensional measure² zero without further hypothesis on q ; if $m > n$, the set of critical values of the map (1.1) is of n -dimensional measure zero providing that $q \geq m - n + 1$.* Using an example due to Hassler Whitney³ we show that the hypothesis on q cannot be weakened. We prove also that the critical values of (1.1) corresponding to critical points of rank zero constitute a set of (m/q) -dimensional measure zero.

The idea of considering the measure of the set of critical values of one function or of several functions is due to Marston Morse.

The first result stated above reduces, if $n=1$, to the known theorem: The critical values of a function of m variables of class C^m constitute a set of linear measure zero. A. P. Morse⁴ has given a proof of this theorem for all m . In the present paper we make use of one of A. P. Morse's results.

Presented to the Society, January 1, 1941 under the title *The measure of the critical values of differentiable maps of euclidean spaces*; received by the editors February 9, 1942.

¹ A function is of class C^q if all its partial derivatives of order q exist and are continuous.

² In the sense of Hausdorff-Saks. The definition is given in §2.

³ H. Whitney, *A function not constant on a connected set of critical points*, Duke Mathematical Journal, vol. 1 (1935), pp. 514–517.

⁴ A. P. Morse, *The behaviour of a function on its critical set*, Annals of Mathematics, (2), vol. 40 (1939), pp. 62–70. Proofs for the cases $m=1, 2, 3$ had previously been given by M. Morse and for the cases $m=4, 5, 6$ by M. Morse and the author in unpublished papers.

In a study of functional dependence,⁵ A. B. Brown has shown that the set of critical values of (1.1) corresponding to a closed bounded set of critical points is nowhere dense providing that g satisfies certain conditions. The theorems of the present paper imply this particular result.

2. s -dimensional measure. Given a set A and positive quantities s and α . Denote the diameter of A by $\delta(A)$. Let $\{A_1, A_2, \dots\}$ be a covering of A by sets of diameter less than α ; and let $L_s(A; \alpha)$ be the greatest lower bound of the sums $\sum_k [\delta(A_k)]^s$ for all such coverings. The s -dimensional outer measure of A is

$$(2.1) \quad L_s(A) = c_s \lim_{\alpha \rightarrow 0} L_s(A; \alpha), \quad c_s = \pi^{s/2} / 2^s \Gamma[(s + 2)/2],$$

where c_s is, for integral s , the s -dimensional volume of a sphere of unit diameter in s -space.⁶

We shall say that A is an s -null set if $L_s(A) = 0$. The value of c_s in (2.1) is immaterial to this paper as we are concerned with the nullity of sets. An s -null set is a fortiori an $(s + p)$ -null set (p positive). $L_s(A)$ is a regular Carathéodory measure. In n -space $L_n(A) = |A|$, where $|A|$ is the outer Lebesgue measure of A .⁷

3. Critical points of positive rank: change of variables. Consider a critical point x_0 of rank $r > 0$. Suppose (without real loss of generality) that the determinant $\Delta = |f_c^d|$ ($c, d = 1, \dots, r$) is not zero at x_0 . Consider the change of variables from x to u defined by the equations

$$(3.1) \quad u^d = f^d(x), \quad u^{r+\sigma} = x^{r+\sigma}, \quad d = 1, \dots, r; \quad g = 1, \dots, m - r.$$

Let u_0 be the image of x_0 under (3.1); and let J be the Jacobian matrix of (3.1). Since $|J| = \Delta \neq 0$ at x_0 , the inverse of (3.1)

$$x^i = \phi^i(u), \quad i = 1, \dots, m,$$

exists and is of class C^q near u_0 . In terms of the new variables u the map (1.1) is

$$(3.2) \quad \begin{cases} y^d = u^d = F^d(u), & d = 1, \dots, r, \\ (3.3) \quad y^{r+h} = f^{r+h}[\phi(u)] = F^{r+h}(u), & h = 1, \dots, n - r. \end{cases}$$

Let \mathfrak{M}' be the functional matrix $\|F_i^j\|$ ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$).

⁵ A. B. Brown, *Functional dependence*, Transactions of this Society, vol. 38 (1935), pp. 379-394.

⁶ F. Hausdorff, *Dimension und äusseres Mass*, Mathematische Annalen, vol. 79 (1919), pp. 157-179. S. Saks, *Theory of the Integral*, Warsaw, 1937, pp. 53-54.

⁷ We make use of this fact for the case $|A| = 0$ only.

Then $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}'J$ and therefore \mathfrak{M} and \mathfrak{M}' have the same rank since $|J| \neq 0$. Hence we may consider (3.2, 3.3) near u_0 instead of (1.1) near x_0 without changing either critical values or ranks of critical points.

4. **Case I:** $m \leq n$. We prove Theorem 4.1.

THEOREM 4.1. *The critical values of the map (1.1) constitute an m -null set if $m \leq n$.*

PROOF. We consider first the set A of critical points of rank zero. We shall show that there is a neighborhood N of each point of A such that $f(NA)$, the image of NA under (1.1), is an m -null set. As A can be covered by denumerably many such neighborhoods N it will follow that $f(A)$ is an m -null set.

Let N be an open m -cube⁸ whose closure is in R . Suppose that x_1 is a point of NA and x_2 is a point of N . Let $y_e = f(x_e)$ ($e = 1, 2$). Then by the mean value theorem,

$$(4.2) \quad y_2^j - y_1^j = \sum_{i=1}^m \zeta_i^j (x_2^i - x_1^i), \quad j = 1, \dots, n,$$

where $\zeta_i^j \rightarrow 0$ as $x_2 \rightarrow x_1$.

Let $C(\gamma)$ be a closed m -cube of side γ . It follows from (4.2) applied twice and the triangle inequality that if $C(\gamma)$ contains a point of A , then $\delta\{f[NC(\gamma)]\} \leq 2m^2\zeta\gamma$ and $\delta\{f[NC(\gamma)]\}^m \leq (2m^2\zeta)^m |C(\gamma)|$, where ζ is the least upper bound of the functions $|\zeta_i^j|$ for all x_1 in NA , x_2 in N such that $|x_2^i - x_1^i| \leq \gamma$ ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$). Then $\zeta \rightarrow 0$ with γ .

Therefore given $\alpha > 0$ and $\epsilon > 0$, there exists a $G > 0$ such that if $C(\gamma)$ contains a point of A , $\gamma < G$ implies that

$$(4.3) \quad \delta\{f[NC(\gamma)]\} < \alpha, \quad \delta\{f[NC(\gamma)]\}^m < \frac{\epsilon}{|N| + 1} |C(\gamma)|.$$

Consider the set of all cubes $C(\gamma)$ centered at points of NA and such that $\gamma < G$. By a theorem related to Vitali's covering theorem,⁹ there exists a sequence $\{C_1, C_2, \dots\}$ of cubes of this set which covers all of NA and is such that

⁸ By a cube we mean a cube with sides parallel to the axes.

⁹ Hans Rademacher, *Eineindeutige Abbildung und Messbarkeit*, Monatshefte für Mathematik und Physik, vol. 27 (1916), Theorem II, p. 190, with "circles centered at P " replaced by "squares centered at P ." It is not necessary to use the theorem related to Vitali's covering theorem. One may instead consider a network of cubes; or one may give a proof like A. P. Morse's proof of his Theorem 4.3 (loc. cit., pp. 68-69). This remark applies also to our later applications of the theorem related to Vitali's covering theorem. The author is indebted to A. P. Morse for his having suggested the applicability of Vitali's covering theorem.

$$(4.4) \quad \sum_k |C_k| \leq |N| + 1.$$

The sequence $\{f(NC_k)\}$ covers $f(NA)$. Let δ_k be the diameter of $f(NC_k)$. Then (4.3) and (4.4) imply that $\delta_k < \alpha$ ($k=1, 2, \dots$) and

$$\sum_k \delta_k^m < \frac{\epsilon}{|N| + 1} \sum_k |C_k| \leq \epsilon.$$

Hence $f(NA)$ is an m -null set. This completes the first part of the proof.

We consider now the set B of critical points of rank r , where r is any positive integer less than m . To prove that $f(B)$ is an m -null set we shall show that there is a neighborhood N of each point of B such that $f(NB)$ is an m -null set.

Consider a point x_0 of B . Introduce the change of variables of §3 and consider the map (3.2, 3.3) in a closed cube K centered at u_0 . Let D be the set of critical points of (3.2, 3.3) of rank r in K .

Suppose that u_1 is a point of D and u_2 is a point of K . Let $y_e = F(u_e)$ ($e=1, 2$). Then by the mean value theorem,

$$(4.5) \quad \begin{aligned} y_2^d - y_1^d &= u_2^d - u_1^d, & d &= 1, \dots, r, \\ y_2^{r+h} - y_1^{r+h} &= \sum_{c=1}^r F_c^{r+h}(u_1)(u_2^c - u_1^c) + \sum_{i=1}^m \zeta_i^{r+h}(u_2^i - u_1^i), \\ & & h &= 1, \dots, n-r, \end{aligned}$$

where $\zeta_i^{r+h} \rightarrow 0$ as $u_2 \rightarrow u_1$.

Let $C(\gamma)$ be a closed cube of side γ in the space (u^1, \dots, u^m) ; and let $\Pi(\gamma)$ be the projection of $C(\gamma)$ on the space (u^1, \dots, u^r) . Let p be a positive integer. Divide $\Pi(\gamma)$ by bisections into 2^{rp} congruent closed r -cubes each of side $\gamma/2^p$. Each such subcube is the projection of a strip of $C(\gamma)$ in which u^1, \dots, u^r may change by at most $\gamma/2^p$ and u^{r+1}, \dots, u^m may change by at most γ .

Consider any strip S that contains a point of D . Let u_1 and u_2 be any two points of S and let $y_e = F(u_e)$ ($e=1, 2$). Then (4.5) applied twice implies that

$$(4.6) \quad \begin{aligned} |y_2^d - y_1^d| &\leq \gamma/2^p, & d &= 1, \dots, r, \\ |y_2^{r+h} - y_1^{r+h}| &\leq 2rU\gamma/2^p + 2m\zeta\gamma, & h &= 1, \dots, n-r, \end{aligned}$$

where U is the least upper bound of the functions $|F_c^{r+h}(u)|$ for all u in K and ζ is the least upper bound of the functions $|\zeta_i^{r+h}|$ for all u_1 in D, u_2 in K such that $|u_2^i - u_1^i| \leq \gamma$ ($c=1, \dots, r; h=1, \dots, n-r; i=1, \dots, m$). Then $\zeta \rightarrow 0$ with γ .

Let δ be the diameter of $F(S)$. The triangle inequality and (4.6) imply that

$$(4.7) \quad \delta \leq (V/2^p + W\zeta)\gamma,$$

where $V = r + (n-r)2rU$ and $W = (n-r)2m$. V and W are constants, and $V \geq r \geq 1$.

Let α and ϵ be given, $\alpha > 0$, $1 > \epsilon > 0$. Put

$$(4.8) \quad \eta = \epsilon / (|K| + 1).$$

There exists a number G ,

$$(4.9) \quad 0 < G < \alpha / (V + 1),$$

such that $\gamma < G$ implies that

$$(4.10) \quad W\zeta < \eta^{1/(m-r)}(4V)^{-r/(m-r)}/2 < 1.$$

Let p be the positive integer determined by the relation

$$(4.11) \quad 2V(4V)^{r/(m-r)}\eta^{-1/(m-r)} < 2^p \leq 4V(4V)^{r/(m-r)}\eta^{-1/(m-r)}.$$

(Note that the first member of (4.11) is greater than 1, as it should be.)

Then $\gamma < G$ implies that $\delta < \alpha$ by (4.7), (4.9) and (4.10), since $2^p > 1$; and $\gamma < G$ also implies that

$$(4.12) \quad \delta < \eta^{1/(m-r)}(4V)^{-r/(m-r)}\gamma$$

by (4.7), the first half of (4.11) and (4.10). Now consider all strips S containing points of D . There are at most 2^{rp} such strips; for these

$$(4.13) \quad \sum \delta^m < 2^{rp}\eta^{m/(m-r)}(4V)^{-mr/(m-r)}\gamma^m \leq \eta\gamma^m = \eta|C(\gamma)|,$$

by (4.12) and the second half of (4.11). Thus $\gamma < G$ implies that there are sets covering $F[DC(\gamma)]$ each of whose diameters is less than α and the sum of the m th powers of whose diameters is less than $\eta|C(\gamma)|$.

Consider the set of all cubes $C(\gamma)$ centered at points of D and such that $\gamma < G$. As before, a sequence $\{C_k\}$ of these cubes covers D and is such that

$$(4.14) \quad \sum_k |C_k| \leq |K| + 1.$$

Then the covering of $F(D)$ consisting of all the coverings of the sets $F(DC_k)$ is a covering by sets each of whose diameters is less than α and the sum of the m th powers of whose diameters is less than $\eta\sum_k |C_k| \leq \epsilon$, by (4.13), (4.8) and (4.14). Hence $F(D)$ is an m -null set.

Let N be the inverse image under (3.1) of the interior of K . Then N

is a neighborhood of x_0 . Further $f(NB)$ is contained in $F(D)$ and is therefore an m -null set. This completes the proof of Theorem 4.1.

5. A. P. Morse's theorem. We state the following theorem, due to A. P. Morse.¹⁰

THEOREM 5.1. *Given a positive integer q and a set A in the space of the variables x . There exists a sequence A_0, A_1, A_2, \dots of sets with the following properties: (i) $A = \sum_{k=0}^{\infty} A_k$, (ii) A_0 is denumerable, (iii) A_k ($k = 1, 2, \dots$) is bounded, (iv) if $g(x)$ is any function of class C^q whose critical set includes A and if x_1 and x_2 are points of A_k , then*

$$\lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{g(x_2) - g(x_1)}{|x_2 - x_1|^q} = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

6. Critical points of rank zero. We prove Theorem 6.1.

THEOREM 6.1. *Let A be the set of critical points of rank zero of the map (1.1). Then $f(A)$ is an s -null set if $s \geq m/q$.*

PROOF. Decompose A into the subsets of Theorem 6.1. Then $f(A_0)$ is denumerable and hence is an s -null set. We shall prove that $f(A_k)$ is an s -null set ($k = 1, 2, \dots$). It will follow that $f(A)$ is an s -null set.

Consider a non-empty A_k (k fixed and positive). For simplicity put $B = A_k$. Given $\alpha > 0$ and $\epsilon > 0$. Given a point x of B . Let $C(\gamma)$ be the closed cube of side γ centered at x . By continuity and Theorem 5.1 there is a positive $G_x < 1$ such that $\gamma < G_x$ implies that

$$(6.2) \quad \delta\{f[C(\gamma)]\} < \alpha$$

and

$$(6.3) \quad |f^j(x_1) - f^j(x)| < \frac{\epsilon^{1/s} 2^{q-1}}{m^q n (|B| + 1)^{1/s}} |x_1 - x|^q, \quad j = 1, \dots, n,$$

whenever x_1 is in $BC(\gamma)$. Now by the triangle inequality $|x_1 - x| \leq m\gamma/2$ if x_1 is in $BC(\gamma)$. Hence (6.3) twice and the triangle inequality imply that

$$\delta\{f[BC(\gamma)]\} < 2 \frac{\epsilon^{1/s} 2^{q-1}}{m^q (|B| + 1)^{1/s}} \left(\frac{m\gamma}{2}\right)^q = \frac{\epsilon^{1/s} / \gamma^q}{(|B| + 1)^{1/s}},$$

and therefore

$$(6.4) \quad \delta\{f[BC(\gamma)]\}^s < \epsilon \gamma^{qs} / (|B| + 1),$$

providing that $\gamma < G_x$.

¹⁰ Loc. cit., Theorem 4.2. By denumerable we mean denumerably infinite or finite. The sets A_k ($k = 1, 2, \dots$) are condensed; however we do not make use of this property. The symbol $|x_2 - x_1|$ denotes the distance between x_1 and x_2 .

Consider the set of all cubes $C(\gamma)$, $\gamma < G_x$, centered at points x of B . As before, a sequence $\{C_k\}$ of these cubes covers B and is such that

$$(6.5) \quad \sum_k |C_k| \leq |B| + 1.$$

Let γ_k be the side of C_k ($k=1, 2, \dots$).

The sequence $\{f(BC_k)\}$ covers $f(B)$. Further $\delta[f(BC_k)] < \alpha$ by (6.2); and

$$\sum_k \delta[f(BC_k)]^s < \epsilon \sum_k \gamma_k^{qs} / (|B| + 1) \leq \epsilon \sum_k |C_k| / (|B| + 1) \leq \epsilon$$

by (6.4) and (6.5), since $\gamma_k \leq 1$ by construction, $qs \geq m$ by hypothesis and $|C_k| = \gamma_k^m$ ($k=1, 2, \dots$). Hence $f(B)$ is an s -null set.

7. Case II: $m > n$. We prove Theorems 7.1 and 7.2.

THEOREM 7.1. *Let A be the set of critical points of rank r of the map (1.1). Then $f(A)$ is an n -null set if $q \geq (m-r)/(n-r)$, $m > n$.*

PROOF. If $r=0$ the theorem reduces to Theorem 6.1 with $s=n$.

Suppose that $0 < r < n$. To prove that $f(A)$ is an n -null set we shall show that there is a neighborhood N of each point of A such that $f(NA)$ is an n -null set.

Consider a point x_0 of A . Introduce the change of variables of §3 and consider the map (3.2, 3.3) in a closed neighborhood \bar{N} of u_0 . Regard u^1, \dots, u^r as parameters for each permissible set of values of which (3.3) defines a map of the $(m-r)$ -space (u^{r+1}, \dots, u^m) into the $(n-r)$ -space (y^{r+1}, \dots, y^n) . For each (u^1, \dots, u^r) let \mathfrak{M}^* be the functional matrix of (3.3). Then \mathfrak{M}' is of rank r if and only if \mathfrak{M}^* is of rank zero.

Thus if (u^1, \dots, u^m) is a critical point of (3.2, 3.3) of rank r , then (u^{r+1}, \dots, u^m) is a critical point of (3.3) of rank zero for the values u^1, \dots, u^r of the parameters. But for each set of values of the parameters, the critical points of (3.3) of rank zero map into an $(n-r)$ -null set, by Theorem 6.1 and hypothesis.

Let B be the set of critical points of (3.2, 3.3) of rank r in \bar{N} . The cross-section of $F(B)$ for each (y^1, \dots, y^r) is thus an $(n-r)$ -null set. Further $F(B)$ is closed and therefore measurable. Hence $F(B)$ is an n -null set by the theorem of Fubini.

THEOREM 7.2. *If $m > n$ the critical values of the map (1.1) constitute an n -null set providing that $q \geq m-n+1$.*

PROOF. Apply Theorem 7.1 with $r=0, 1, \dots, n-1$. For these values of r , $m-n+1 \geq (m-r)/(n-r)$.

8. **The hypothesis on q in Theorem 7.2 cannot be weakened.** Let $W(x^1, \dots, x^t)$ be a function of t variables, x^1, \dots, x^t , of class C^{t-1} , which takes on every value from 0 to 1 on a Jordan arc of critical points ($t \geq 2$). H. Whitney has constructed such a function.¹¹ Consider the map

$$(8.1) \quad y^1 = W(x^1, \dots, x^{m-n+1}), \quad y^a = x^{m-n+a}, \\ a = 2, 3, \dots, n; m > n,¹²$$

in the unit cube. The map (8.1) is of class C^{m-n} , but the critical values of (8.1) do not constitute an n -null set. Indeed the set of critical values of (8.1) is the unit cube and is thus of n -dimensional measure 1.

QUEENS COLLEGE

¹¹ Loc. cit.

¹² If $n=1$, (8.1) is to consist of the equation for y^1 only.

9 Exercices

- (A) Soit f une fonction définie sur un sous-ensemble fermé A de \mathbb{R}^n . On dit que f est de classe C^p sur A si pour tout point x de A , il existe une fonction f_x de classe C^p définie au voisinage de x telle que $f_x = f$ sur A . Montrer que toute fonction f de classe C^p sur A s'étend en une fonction de classe C^p sur \mathbb{R}^n (voir [Dieudonné], tome 3, 16.4 exercice 6 pour une autre caractérisation).
- (B) Soit f une application de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n . On suppose que f est propre et que $df(x)$ est inversible pour tout x . Montrer que f est un difféomorphisme. On pourra commencer par montrer que $x \mapsto \#f^{-1}(x)$ est constante. On considérera alors une préimage u_0 de 0, et on montrera que pour chaque segment $[0, x]$ il existe un unique relèvement continu $u_x(t)$ tel que $f(u_x(t)) = tx$ et donc $f(u_x(1)) = x$. Montrer que $x \mapsto u_x(1)$ est continu. En déduire qu'il existe une application g inverse continue à droite de f , puis que f est bijective. (voir aussi l'exercice E).
- (C) **Théorème d'Hadamard** (Il s'agit d'une version du théorème précédent où la propriété de f est remplacée par une hypothèse sur $df(z)$. Il nécessite la connaissance du lemme de Gronwall) .

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $f(0) = 0$ et qu'il existe des constantes A, B telle que pour tout z dans \mathbb{R}^n la matrice $df(z)$ satisfait l'inégalité

$$|df(z)^{-1}| \leq A|z| + B$$

- (a) Soit $x \in \mathbb{R}^n$ $\gamma_x(t)$. On cherche un chemin de classe C^1 , $\gamma_x(t), t \in [0, 1]$ tel que $f(\gamma_x(t)) = tx$ Montrer que cela équivaut à $df(\gamma_x(t))\dot{\gamma}_x(t) = x$, soit

$$\dot{\gamma}_x(t) = df(\gamma_x(t))^{-1}x$$

- (b) Montrer que sous l'hypothèse faite sur f , le flot de

$$\dot{\gamma}_x(t) = df(\gamma_x(t))^{-1}x$$

est défini sur $[0, 1]$, et que g est de classe C^1 .

- (c) En déduire que si $g(x)$ est l'image de 0 par le flot au temps 1 de $\dot{\gamma}(t) = df(\gamma(t))^{-1}x$ on a $f(g(z)) = z$.
- (d) Montrer que l'image de g est ouverte.
- (e) Montrer que $z \in \text{Im}(g)$ si et seulement si $g(f(z)) = z$. En déduire que cette image est fermée, puis que g est surjective.
- (f) Montrer que si g vérifie $f \circ g = Id$ on a aussi $g \circ f = Id$.
- (g) Démontrer le théorème suivant

Théorème (Hadamard). Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $f(0) = 0$ et qu'il existe une constante A telle que pour tout z dans \mathbb{R}^n on ait l'inégalité

$$|df(z)^{-1}| \leq A|z| + B$$

Alors f est un difféomorphisme de \mathbb{R}^n

(D) Théorème de d'Alembert-Gauss

Soit $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une application polynomiale. Soit $K = \{P(x) \mid dP(x) = 0\}$.

- (a) Montrer en utilisant le théorème des fonctions implicites que l'application $\nu : \mathbb{C} \setminus K \rightarrow \mathbb{N}$ donnée par $\nu(z) = \text{card}(P^{-1}(z))$ est semicontinue inférieurement, i.e. si $\lim z_n = z$ on a $\lim_n \nu(z_n) \leq \nu(z)$. On montrera en utilisant la propriété de P que ν est localement constante.
- (b) Montrer que $\mathbb{C} - K$ est connexe par arcs. En utilisant que ν ne peut être partout égale à zéro, montrer que P est surjective.
- (c) En déduire que tout polynôme sur \mathbb{C} possède au moins une racine complexe. (Théorème de d'Alembert-Gauss)
- (d) Quelle est la partie de la démonstration qui ne marche pas sur \mathbb{R} ?

(E) Théorème de relèvement

- (a) Soit f une application continue de $[0, 1]$ dans le cercle unité. Montrer qu'il existe $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(t) = e^{i\varphi(t)}$, et que φ est unique une fois fixé $\varphi(0)$.

Indication : On découpera $[0, 1]$ en intervalles assez petits sur lesquels φ est définie facilement, et on recollera convenablement sur l'intersection de ces intervalles.

- (b) Montrer qu'il en est de même pour $[0, 1]^2$ au lieu de $[0, 1]$
Indication : Utiliser a) pour le faire sur $[0, 1] \times \{y\}$ puis étendre aux bandes $[0, 1] \times [y - \varepsilon, y + \varepsilon]$. Terminer en recouvrant $\{0\} \times [0, 1]$ par compacité, et en utilisant le a) pour les intersections des bandes.
- (c) De même pour $[0, 1]^k$ pour k quelconque
- (d) Montrer que si f est de classe C^k alors ϕ est de classe C^k .

- (F) Soit f une application de \mathbb{R} dans S^1 continue (ou de classe C^∞ si on préfère) et périodique de période 2π (i.e. $f(t + 2\pi) = f(t)$).

- (a) Montrer que si $\phi(t)$ est le relèvement défini à l'exercice précédent, $\frac{1}{2\pi}(\phi(t + 2\pi) - \phi(t))$ est un entier appelé degré de f et noté $\text{deg}(f)$. Montrer que cet entier ne dépend pas du choix de ϕ .
- (b) Montrer que si f_s est une famille continue de telles applications, $\text{deg}(f_s)$ ne dépend pas de s .
- (c) Calculer le degré d'une application constante. De l'application $f(x) = e^{2ix}$

(G) Théorème de Peano

Soit $\dot{x}(t) = X(t, x(t))$ une équation différentielle où X est seulement supposé continu. On veut montrer que cette équation a une solution pour $x(t_0) = x_0$.

- (a) Montrer que si X_n est une suite de fonctions C^1 telle que $\lim_n X_n = X$, alors sur tout borné de $I \times \mathbb{R}^n$, les solutions x_n données par Cauchy-Lipschitz sont équicontinues et définies sur un intervalle commun.

- (b) En déduire qu'on peut extraire de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions qui converge uniformément vers x .
- (c) Montrer que x est solution de $\dot{x}(t) = X(t, x(t))$. La solution est-elle unique ?

(H) Méthode de Newton

Soit f une application C^2 définie sur une boule $B(0, r)$ d'un espace de Banach E et $f : B(0, r) \rightarrow E$. On suppose que $|D^2f(x)| \leq C$ et $|(Df(x))^{-1}| \leq C$ sur $B(0, r)$.

- (a) On considère la suite définie par $x_{n+1} = x_n - Df(x_n)^{-1}f(x_n)$.
Montrer que $|x_{n+1} - x_n| \leq C|f(x_n)|$ et que $|f(x_{n+1})| \leq C|x_{n+1} - x_n|^2$
- (b) En déduire que si $|f(x_0)| < \delta$ avec δ convenablement choisi, on a
 $|f(x_n)| \leq C^{3(1+2+\dots+2^n)}\delta^{2^n}$ et $|x_{n+1} - x_n| \leq CC^{3(1+2+\dots+2^n)}\delta^{2^n}$
- (c) En déduire que si $\delta < 1/C^3$, la suite x_n converge vers une solution de $f(x) = 0$. On a donc obtenu une solution de $f(x) = 0$ en partant d'une solution approchée, x_0 . C'est souvent plus utile numériquement que ce que fournit le théorème d'inversion locale (qui lui part d'une solution exacte pour en construire d'autres)
- (d) En déduire que si $f(x_0) = 0$ alors $f(x) = y$ a une solution pour tout y dans $B(0, C^{-3})$.
Cela fournit une estimation de la taille de l'image de $f(B(x_0, r))$ dans le théorème d'inversion locale.
- (e) Montrer que si x est la limite de la suite ci dessus, on a $|x_n - x| \leq K\rho^{2^n}$ avec $\rho < 1$. Comparer avec la vitesse d'approximation donnée par le théorème de Picard.
- (f) Ecrire la méthode de Newton pour calculer \sqrt{a} , (i.e. pour $f(x) = x^2$) où a est un réel positif. Pour quelles valeurs initiales converge-t-il ?
- (g) Comparer la suite x_n avec celle obtenue en itérant $T_y(x)$ où T_y est l'application définie dans la démonstration du théorème des fonctions implicites appliquée à $f(x, y) = y - f(x)$.
- (a) Montrer que si X_n est une suite de fonctions C^1 telle que $\lim_n X_n = X$, alors sur tout borné de $I \times \mathbb{R}^n$, les solutions x_n données par Cauchy-Lipschitz sont équicontinues et définies sur un intervalle commun.
- (b) En déduire qu'on peut extraire de la suite (x_n) une suite de fonctions qui converge uniformément vers x .
- (c) Montrer que x est solution de $\dot{x}(t) = X(t, x(t))$. La solution est-elle unique ?

(I) (Problème de perturbation singulière) On considère l'équation

$$\varepsilon \dot{x} = f(t, x)$$

pour $x \in \mathbb{R}$.

Que dire des solutions lorsque ε tend vers 0 ? Tendent-elles (et en quel sens) vers une solution de $f(t, x) = 0$? Quel rôle jouent les conditions initiales ?

On pourra traiter des exemples, comme

$$\varepsilon \dot{x} = x(e^x - 2)$$

$$\varepsilon \dot{x} = (x - t)^2$$

Le théorème de Cauchy à paramètres permet-il d'étudier la limite en $\varepsilon = 0$ de ces équations ?

- (J) (a) Utiliser le principe de Bernoulli⁶ pour montrer que la hauteur d'eau d'un réservoir dont le fond est percé d'un orifice, vérifie une équation du type $\dot{h}(t) = -C\sqrt{h(t)}$, où C est une constante dépendant des paramètres physiques (densité du liquide, taille du trou, etc....).
- (b) Montrer qu'une telle équation a plusieurs solutions, et en particulier une solution telle que $h(t) = \frac{C^2}{4}(t - T)^2$ pour $t \leq T$ et $h(t) = 0$ si $t \geq T$. Quel est le sens physique de la non-unicité de la solution ? Connaissant l'état du réservoir à l'instant t_0 , peut-on en déduire son état à n'importe quel autre instant ?
- (K) Montrer que l'espace des immersions (i.e. les applications de différentielle inversible) de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n est ouvert pour la topologie dont les ouverts sont donnés par $\|f - g\|_{C^1(B_j)} < \varepsilon_j$ (B_j est la boule de centre 0 et de rayon j , et la suite ε_j est une suite quelconque de réels > 0).

Montrer qu'il en est de même pour l'espace des difféomorphismes de \mathbb{R}^n . Montrer par contre que l'espace des homéomorphismes C^0 n'est pas ouvert.

6. Ce principe affirme que pour un fluide, si P est la pression, ρ la densité, g l'accélération de la pesanteur, v la vitesse du fluide, h sa hauteur, $P + \frac{1}{2}\rho v^2 + gh$ est la même en tous points du fluide. Il se démontre aisément en considérant que le travail effectué par la pression sur une volume infinitésimal de fluide égale la somme des variations de son énergie cinétique et de son énergie potentielle.

Chapitre 2

Sous-variétés

La géométrie différentielle a pour objet l'étude locale et globale d'objets géométriques appelés **variétés différentielles** et leurs transformations. Ces objets interviennent dans de nombreux domaines des mathématiques, allant des systèmes dynamiques, équations aux dérivées partielles, géométrie algébrique ou arithmétique et probabilités.

Avant de définir la notion de variété différentielle, nous allons définir et étudier les **sous-variétés différentielles de \mathbb{R}^n** qui en sont un exemple remarquable, généralisation naturelle des courbes et surfaces « régulières ».

Au voisinage de chacun de ses points, une sous-variété « ressemble » à un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n , si l'on décide que deux objets se “ressemblent” lorsqu'ils sont difféomorphes- au moins localement.

L'une des principales difficultés de la Géométrie différentielle est la diversité des points de vue possibles, qui correspondent aux différentes manières dont elles interviennent naturellement. Il est indispensable de savoir passer d'un point de vue à l'autre, et le géomètre différentiel est un sorte de jongleur, qui pour chaque problème sait prendre en compte les différents points de vue appropriés qui constituent la première étape de sa résolution.

1 Définition, premières propriétés.

Dans ce chapitre, on supposera tous les difféomorphismes sont de classe C^∞ .

Définition 2.1. Soit M un sous-ensemble de \mathbb{R}^n . On dit que M est une sous-variété, si et seulement si en chaque point x_0 de M il existe un voisinage U de x_0 et un difféomorphisme local φ tel que l'on ait

$$\varphi(U \cap M) = \mathbb{R}^p \times \{0\} \cap \varphi(U)$$

L'entier p est appelé dimension de M en x_0 .

- Remarques 1.1.* (A) Le difféomorphisme φ s'appelle une « carte locale » de M en x_0 . On va voir (Proposition 2.2) que p est bien défini et ne dépend pas du choix de φ
- (B) Être une sous-variété est une propriété « locale », ce qui signifie qu'elle se vérifie en se restreignant au voisinage de chaque point.

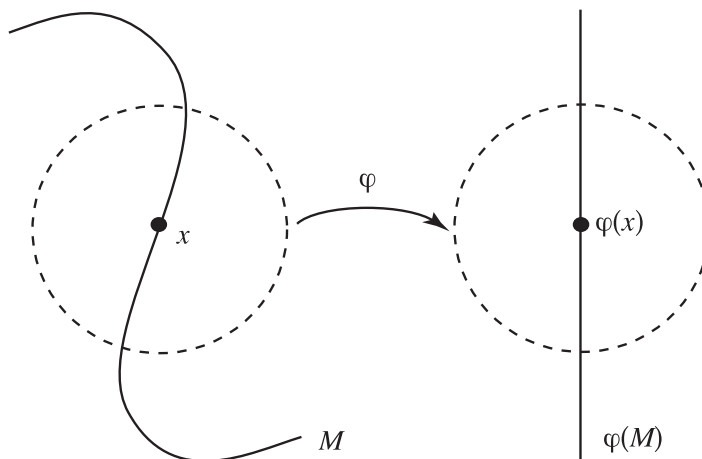


FIGURE 2.1 – Carte pour une sous-variété de dimension 1 du plan

L'unicité de la dimension en x et son indépendance de x pour une variété connexe résultent de la proposition suivante :

Proposition 2.2. *La dimension en un point x d'une variété est définie de manière unique, et notée $\dim_x M$. Si la variété M est connexe, cette dimension ne dépend pas du point choisi.*

Démonstration. En effet, si on avait deux difféomorphismes φ_1, φ_2 tels que $\varphi_1(U \cap M) = \varphi_1(U) \cap \mathbb{R}^p \times \{0\}$ et $\varphi_2(U \cap M) = \varphi_2(U) \cap \mathbb{R}^q \times \{0\}$, alors $\psi = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ serait un difféomorphisme local défini sur un voisinage de 0 envoyant $\mathbb{R}^p \times \{0\}$ sur $\mathbb{R}^q \times \{0\}$. On en déduit que $d\psi(0)$ envoie $\mathbb{R}^p \times \{0\}$ dans $\mathbb{R}^q \times \{0\}$. Or $d\psi(0)$ est une application linéaire bijective donc injective, ce qui entraîne $p \leq q$. Par symétrie on voit que $p = q$.

Maintenant si $\varphi : U \rightarrow V$ est une carte en x , et y est un point de U , φ donne par translation une carte en y : le difféomorphisme ψ donné par $\psi(z) = \varphi(z) - \varphi(y)$ est une carte en y . On en déduit que $\dim_x M = \dim_y M$ et donc $D_p = \{x \in M \mid \dim_x M = p\}$ est un ouvert. Son complémentaire est réunion d'ouverts $M - D_p = \bigcup_{j \neq p} D_j$, il est donc ouvert, ce qui entraîne que D_p est à la fois ouvert et fermé. On en conclut que si D_p est non vide et M connexe, $M = D_p$. \square

Utiliser la définition ci-dessus pour démontrer qu'un ensemble est une sous-variété est parfois peu commode. Il vaut mieux connaître le plus grand nombre de définitions équivalentes pour utiliser chaque fois celle qui est la mieux adaptée. En voici quelques unes :

Proposition 2.3. *Soit M un sous-ensemble de \mathbb{R}^n . Alors M est une sous-variété si et seulement si pour chaque point x_0 de M , il existe un voisinage W de x_0 dans \mathbb{R}^n , tel que l'une de ces propriétés soit vérifiée*

(A) (**graphe**) *Il existe un changement linéaire de coordonnées, $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, et une application C^∞ , $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ telle que*

$$W \cap M = W \cap \{A(z, f(z)) \mid z \in \mathbb{R}^p\}$$

(B) (**équation**) *Il existe une application C^∞ , $F : W \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ telle que $dF(x_0)$ soit surjective, et $W \cap M = F^{-1}(0)$.*

(C) (**nappe paramétrée**) *Il existe $j : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$, C^∞ et définie sur un voisinage U de 0 , telle que $j(0) = x_0$, $dj(0)$ est injective et j est une bijection bicontinue¹*

$$j : U \rightarrow M \cap W$$

Remarque 1.1. La condition (B) signifie que si on pose $F(x) = (F_1(x), \dots, F_{n-p}(x))$, les formes linéaires $dF_1(x), \dots, dF_{n-p}(x)$ sont linéairement indépendantes.

Exemples 1.1. Pour $p = 0$ une variété est simplement un ensemble de points isolés. Pour $p = 1$ on retrouve la notion de courbe plane régulière injective et propre du plan ($n = 2$) ou de l'espace ($n = 3$). Pour $p = n$ une sous-variété de dimension n de \mathbb{R}^n est un ouvert de \mathbb{R}^n .

Démonstration. – On note (DEF) la propriété de la définition (2.1). Montrons que (DEF) entraîne la propriété (B).

Soit $\varphi : M \cap W \rightarrow \mathbb{R}^p \times \{0\}$. On note $(u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_{n-p})$ les coordonnées sur \mathbb{R}^n et $F : x \mapsto (v_1(\varphi(x)), \dots, v_{n-p}(\varphi(x)))$

Alors il est clair que

$$x \in M \cap W \iff F(x) = 0 \text{ et } x \in W$$

or $dF(0)$ est surjective car c'est la composée de la différentielle de $(u, v) \mapsto v$ et de $d\varphi$.

– Montrons que (B) \implies (A)

Soit en effet $(u, v) \in W$. Alors

$$F(u, v) = 0 \iff (u, v) \in M \cap W$$

Quitte à faire un changement linéaire de variables et à restreindre W , on peut supposer que $\frac{\partial F}{\partial v}$ est inversible. Par le théorème des fonctions implicites, il existe $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$

$$(u, v) \in W \text{ et } F(u, v) = 0 \iff v = f(u) \text{ et } u \in U$$

Donc M est localement le graphe de f .

1. Ce qui signifie qu'elle est continue, d'inverse continue, ou encore que l'image d'un ouvert est un ouvert de M (c'est à dire intersection d'un ouvert de \mathbb{R}^n et de M). On verra en exercice (Q) que la bicontinuité peut être remplacée par la propreté.

– (A) \implies (DEF)

Quitte à faire un changement linéaire de variables, on peut supposer que $M \cap W$ est le graphe de $f : U \rightarrow V$. Alors $\varphi : (u, v) \mapsto (u, v - f(u))$ envoie $M \cap W$ sur $\mathbb{R}^p \times \{0\} \cap (U \times V)$

– (A) \implies (C)

Soit $M \cap (U \times V)$ le graphe de $f : U \rightarrow V$. Et soit $j : x \mapsto (x, f(x))$ définie sur U . Alors j a sa différentielle injective. De plus l'image d'un ouvert U' contenu dans U est égale à $(U' \times V) \cap M$ qui est donc un voisinage de x_0 dans M . L'application j est donc bicontinue.

– (C) \implies (A)

Soit $j(x) = (u(x), v(x))$ définie sur U , et telle que $j(U) = M \cap W$. On peut supposer après changement linéaire de variables, que l'image de $dj(0)$ est $\mathbb{R}^p \times \{0\}$, c'est-à-dire que $dv(0) = 0$ et $du(0)$ est un isomorphisme. Le théorème d'inversion locale permet alors de trouver des ouverts $U' \subset U$ et $V' \subset V$ et une application C^∞ , $\rho : U' \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\}) \rightarrow V'$ telle que pour $(x, y) \in U' \times V'$

$$u(x) = y \iff x = \rho(y)$$

Alors $f : x \mapsto v \circ \rho(x)$ a pour graphe $\{(x, v \circ \rho(x)) \mid x \in U'\} = \{u(x), v(x) \mid x \in U'\}$. Par bicontinuité de j , on peut affirmer que $j(U') = M \cap W'$ pour un voisinage W' de x_0 . Alors $M \cap W'$ est bien le graphe de f au dessus de U' .

□

Notons qu'une sous-variété n'est pas a priori fermée. Par exemple la spirale, image de $s \mapsto (\exp(-s) \cos(s), \exp(-s) \sin(s))$ est une sous-variété, d'après le critère (C). De même une droite privée d'un point est une sous-variété du plan. Si on veut exclure ces exemples (mais on exclut du même coup les ouverts de \mathbb{R}^n), on peut se restreindre aux sous-variétés fermées. La plupart des sous-variétés que nous utiliserons sont fermées.

Exemples 1.2. (A) La sphère

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^n &\longmapsto \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto \sum_{i=1}^n x_i^2 - 1 \end{aligned}$$

Si $(x_1, \dots, x_n) \in F^{-1}(0)$, on a

$$dF(x_1, \dots, x_n) = 2x_1 dx_1 + \dots + 2x_n dx_n$$

qui est non nulle (car $(x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$) donc $dF(x)$ est surjective si $x \in F^{-1}(0)$, et $F^{-1}(0)$, est une sous-variété.

On voit de même que les autres quadriques

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i^2 - 1 = 0, \quad \varepsilon_i = \pm 1$$

sont des sous-variétés.

(B) Le tore

$$j : (\theta, \varphi) \mapsto ((r - \rho \cos(\theta)) \cos(\varphi), (r - \rho \cos(\theta)) \sin(\varphi), \rho \sin(\theta))$$

où $\rho < r$. C'est une sous-variété car les vecteurs

$$\frac{\partial j}{\partial \theta}(\theta, \varphi) = (\rho \cos(\varphi) \sin(\theta), \rho \sin(\varphi) \sin(\theta), \rho \cos(\theta))$$

$$\frac{\partial j}{\partial \varphi}(\theta, \varphi) = (-(r - \rho \cos(\theta)) \sin(\varphi), (r - \rho \cos(\theta)) \cos(\varphi), 0)$$

sont linéairement indépendants. De plus j est localement bicontinue. Soit en effet $j(\theta_0, \varphi_0) = (x_0, y_0, z_0)$. Si z est dans un intervalle de longueur inférieure à $1/2$, il existe une unique détermination continue de $\theta(z) = \arcsin(\frac{z}{\rho})$ égale à θ_0 en z_0 . Comme $\rho < r$, on a $r - \rho \cos(\theta(z)) > 0$ et en choisissant une détermination continue de $\varphi(y, z) = \arcsin(\frac{y}{(r - \rho \cos(\theta(z)))})$ telle que $\varphi(y_0, z_0) = \varphi_0$, on obtient une application continue $(x, y, z) \mapsto (\theta(z), \varphi(y, z))$ qui envoie un voisinage de (x_0, y_0, z_0) du tore sur un voisinage de (θ_0, φ_0) .

Remarque 1.2. Attention : Si $j : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une application dont la différentielle est injective, il n'en résulte pas que $j(U)$ soit une sous-variété. Une telle application j s'appelle une **immersion**. Par abus de langage un sous-ensemble de \mathbb{R}^n tel que tout point a un voisinage qui soit image d'une application de différentielle injective est appelé **sous-variété immergée**. Mais ce n'est pas une sous-variété. En particulier si j n'est pas injective, $j(u_0) = j(u_1) = x_0$, on peut avoir la situation suivante ($p = 1, n = 2$)

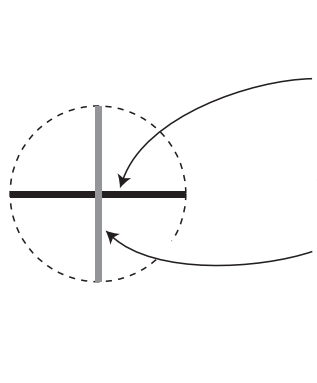


FIGURE 2.2 – Image d'une immersion qui n'est pas une sous-variété

On voit alors que $M = j(U)$ n'est pas une sous-variété, car une carte enverrait les deux vecteurs tangents à chaque branche de la courbe (qui sont linéairement indépendants) sur des vecteurs de \mathbb{R} , donc liés. Un autre cas, plus subtil se présente si j n'est pas bicontinue, comme sur le dessin suivant

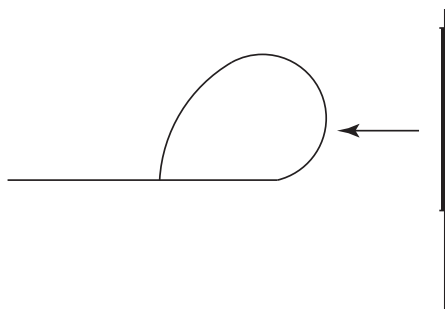


FIGURE 2.3 – Image d’une immersion injective qui n’est pas une sous-variété

On utilisera donc la caractérisation des sous-variétés comme nappes paramétrées avec une certaine prudence. Et dans ce cas il est souvent préférable d’utiliser le fait que **la bijectivité et la propriété de j entraînent sa bicontinuité.**

2 Espaces tangents

On suppose dorénavant que M^p est une variété de dimension p .

Lorsque $t \mapsto c(t)$ est une courbe paramétrée, sa tangente en $c(t_0)$ est dirigée par le vecteur $c'(t_0)$, si celui-ci est non nul. Pour une nappe paramétrée $j(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, le plan tangent en $j(u_0, v_0)$ est engendré par les vecteurs $\frac{\partial j}{\partial u}(u_0, v_0)$, $\frac{\partial j}{\partial v}(u_0, v_0)$, qui sont linéairement indépendants si dj est injective.

La notion d’espace tangent à une sous-variété généralise ces situations.

Définition 2.4. Soit M^p une sous-variété de \mathbb{R}^n , et x_0 un point de M^p , φ une carte en x_0 . L’espace tangent (vectoriel) à M en x_0 est l’espace vectoriel $d\varphi^{-1}(0)(\mathbb{R}^p \times \{0\})$, noté $T_{x_0}M$. L’espace affine tangent à M en x_0 est l’unique espace affine passant par x_0 et dirigé par $T_{x_0}M$. On le note $\tilde{T}_{x_0}M$.

Remarque 2.1. On peut montrer directement que l’espace tangent ne dépend pas du choix de la carte. En effet si φ, ψ sont deux cartes en x_0 , $\varphi \circ \psi^{-1}$ envoie $\mathbb{R}^p \times \{0\}$ sur lui-même et donc sa différentielle aussi. Cela signifie que

$$d\varphi(x_0)d\psi^{-1}(0)(\mathbb{R}^p \times \{0\}) = \mathbb{R}^p \times \{0\}$$

en d’autres termes que

$$d\psi^{-1}(0)(\mathbb{R}^p \times \{0\}) = d\varphi^{-1}(0)(\mathbb{R}^p \times \{0\})$$

On remarquera que la proposition 2.5 donne une autre démonstration de cette indépendance.

D’un point de vue pratique,

a) si M est définie localement comme l'image par j de \mathbb{R}^p , avec $j(0) = x_0$, $dj(0)$ injective, on a

$$T_{x_0}M = dj(0)\mathbb{R}^p$$

b) si M est définie localement comme le graphe $\{(z, f(z)) | z \in \mathbb{R}^p\}$

$$T_{x_0}M = \{(h, df(z_0)h) | h \in \mathbb{R}^p\}$$

où $x_0 = (z_0, f(z_0))$

Dans ce cas $T_{x_0}M$ est le graphe de $df(z_0)$.

c) si M est définie localement comme le lieu des zéros de $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ telle que $dF(x_0)$ soit surjective. Alors $T_{x_0}M = \ker dF(x_0)$.

La caractérisation suivante de l'espace tangent est parfois utile

Proposition 2.5. *Soit M une sous-variété. L'espace tangent T_xM est l'ensemble des vecteurs vitesse en $t = 0$ des chemins C^∞ tracés sur M passant par x à l'instant $t = 0$.*

Démonstration. Soit φ une carte en x , et c une courbe tracée sur M telle que $c(0) = x$. Alors pour t assez proche de 0 $\varphi(c(t))$ est définie, tracée sur $\mathbb{R}^p \subset \mathbb{R}^n$ et passe par 0 en $t = 0$. Donc la tangente en 0 de $\varphi(c(t))$ est dans \mathbb{R}^p c'est-à-dire que $d\varphi(c(0))c'(0)$ est dans \mathbb{R}^p , ce qui par définition équivaut à $c'(0) \in T_xM$.

Inversement soit $\xi \in T_xM$ alors $d\varphi(x)\xi$ est dans \mathbb{R}^p . Soit $t \rightarrow \gamma(t)$ une courbe paramétrée de \mathbb{R}^p tangente à $d\varphi(x)\xi$ en $t = 0$. Alors quitte à restreindre γ à un voisinage de 0, on peut supposer son image contenue dans $V = \varphi(U)$. Alors $c(t) = \varphi^{-1}(\gamma(t))$ est une courbe tracée sur M , et le calcul précédent montre qu'elle est tangente à ξ en $t = 0$. \square

Exemples 2.1. (A) Soit $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x|^2 = 1\}$. C'est une sous-variété définie par $F(x) = 0$ où $F(x) = |x|^2 - 1$. Vu que $dF(x)h = 2\langle x, h \rangle$, l'espace tangent en x à la sphère, T_xS^2 , est le plan orthogonal à x , et \tilde{T}_xS^2 le plan orthogonal à x passant par x .

(B) Soit I un intervalle et $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée. Si $\gamma'(t)$ ne s'annule jamais et γ est injective et propre, $\Gamma = \gamma(I)$ est une courbe lisse, son espace tangent en $\gamma(t_0)$ est donnée e par $\mathbb{R}\gamma'(t_0)$.

(C) Soit $V = O(3) = \{M \in Mat(3, 3) \mid {}^tM \cdot M = Id\}$. Il suffit de montrer que $F : Mat(3, 3) \rightarrow Sym(3, 3)$ donnée par $F(M) = {}^tM \cdot M - Id$ à valeurs dans l'espace des matrices symétriques a sa différentielle surjective sur $F^{-1}(0)$. Or $dF(M)H = {}^tM \cdot H + {}^tH \cdot M$ et si S est symétrique, $H = \frac{1}{2}({}^tM)^{-1}S$ vérifie bien $dF(M)H = S$. Donc $O(3)$ est une sous-variété, et son espace tangent en Id est donné par $\ker(dF(Id)) = \{H \mid {}^tH + H = 0\}$, ensemble des matrices antisymétriques. Or si

$$H = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}$$

est une matrice antisymétrique, l'endomorphisme associé est donné par le produit vectoriel avec $u_H = (x, y, z)$.

Si $M(t)$ décrit le mouvement d'un solide, on a $M(t) = R(t)M(0)$ où $R(t) \in SO(3)$. Donc si $R(0) = \text{Id}$, les vecteurs vitesse de chaque point sont donnés par $\frac{d}{dt}R(t) \in T_{\text{Id}}O(3)$ qui est une matrice antisymétrique, H . Alors u_H détermine l'axe instantané de rotation $\mathbb{R}u_H$ et la vitesse de rotation instantanée autour de cet axe est $|u_H|$.

- (D) Soit C le cône $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$. Alors C n'est pas une sous-variété. En effet, on montre aisément que C est connexe (utiliser le fait que tout point est sur un segment de droite contenue dans C et passant par 0 pour montrer que C est connexe par arcs), et d'après le (B) de la proposition 2.3, un voisinage de $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ est une sous-variété de dimension 2, vu qu'en un tel point $dF(x, y, z)(u, v, w) = x \cdot u + y \cdot v + z \cdot w$ n'est pas identiquement nulle. Donc si C est une sous-variété, elle sera partout de dimension 2.

Mais en $(0, 0, 0)$ les courbes $t \rightarrow (t \cdot \cos(\theta), t \cdot \sin(\theta), t)$ tracées sur C , ont pour vecteur vitesse en 0 le vecteur $(\cos(\theta), \sin(\theta), 1)$. L'ensemble de ces vecteurs n'est contenu dans aucun plan vectoriel de \mathbb{R}^3 . L'ensemble C ne peut donc être une sous-variété.

Exercice 2.1. Montrer que C n'est pas une sous-variété en utilisant la méthode suivante :

1) Montrer que C est connexe par arcs, et si C est une sous-variété elle est nécessairement de dimension 2

2) Montrer que si M est une sous-variété connexe par arcs de dimension 2, et x une point de M , alors $M \setminus \{x\}$ est encore connexe

3) Montrer que $C - (0, 0, 0)$ n'est pas connexe. On pourra montrer que la fonction $f(x, y, z) = z$ prend des valeurs positives et négatives sur $C - \{(0, 0, 0)\}$, mais ne s'y annule pas.

2.1 Faisceaux associés à une sous-variété

2.1.1 Fonctions sur une sous-variété

Soit M une sous-variété **fermée** de \mathbb{R}^N . On note $C^\infty(M, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions C^∞ sur M . D'après l'exercice A du chapitre 1 il est équivalent de définir cela comme l'espace des restrictions de fonctions C^∞ sur \mathbb{R}^N et l'espace des fonctions qui s'étendent au voisinage de chaque point en une fonction C^∞ . Il en résulte la

Proposition 2.6. *Soit M une sous-variété fermée de \mathbb{R}^N . Soit $C^\infty(M, \mathbb{R})$ l'espace des restrictions de fonctions $C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ à M . Alors $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ si et seulement si pour toute carte (U, φ) l'application $f \circ \varphi_{|\varphi(U) \cap \mathbb{R}^p}^{-1}$ est C^∞ .*

Démonstration. Par l'exercice ci-dessus mentionné (exercice A du chapitre 1), il suffit de montrer que quel que soit $x_0 \in M$, f s'étend en une fonction C^∞ définie sur un voisinage de x_0 dans \mathbb{R}^N . Or prenons (U, φ) une carte autour de x_0 . On sait que $g = f \circ \varphi_{|\varphi(U) \cap \mathbb{R}^p}^{-1}$

est C^∞ . Outre à restreindre le voisinage de 0, on peut étendre g en une fonction C^∞ définie sur un voisinage de 0 dans \mathbb{R}^N : si π est la projection de \mathbb{R}^N sur $\mathbb{R}^p \times \{0\}$, on pose $\tilde{g} = g \circ \pi$. Alors \tilde{g} est définie et C^∞ au voisinage de $\varphi(x_0)$ et $\tilde{f} = \tilde{g} \circ \varphi^{-1}$ est l'extension cherchée. \square

Si M, N sont deux sous variétés, on note $C^k(M, N)$ l'espace des applications $C^k(M, \mathbb{R}^N)$ à valeurs dans N . Un élément de $C^k(M, N)$ est une classe d'équivalence de fonctions C^k de \mathbb{R}^n à valeurs dans N , pour la relation $f \simeq g$ définie par $f \simeq g$ si et seulement si $(f - g)|_M = 0$. Si $f \in C^k(M, N)$, on note $df(x) : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ l'application linéaire, restriction de $df(x)$ à $T_x M$. Notons que si $f \simeq g$ on a $(f - g)$ s'annule sur M et donc $df(x) - dg(x)$ s'annule sur $T_x M$. On peut en effet, si $c(t)$ est un chemin tracé sur M tel que $c(0) = x, c'(0) = v$, définir $df(x)v = \frac{d}{dt} f(c(t))|_{t=0}$. On note $X^\infty(M)$ l'espace des champs de vecteurs tangents à M . C'est le sous ensemble des $X \in C^\infty(M, \mathbb{R}^n)$ tel que pour tout $x, X(x) \in T_x M$.

2.2 Sous-variétés à bord.

Nous allons définir la notion de variété à bord. On note \mathbb{H}^n le demi-espace $\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \leq 0\}$.

Définition 2.7. Soit M un sous-ensemble de \mathbb{R}^n . On dit que M est une sous-variété à bord, si et seulement si en chaque point x_0 de M il existe un voisinage U de x_0 et un difféomorphisme local φ de \mathbb{R}^n envoyant x_0 sur 0 tel que l'on ait

soit

$$(a) \quad \varphi(U \cap M) = (\mathbb{R}^p \times \{0\}) \cap \varphi(U)$$

soit

$$(b) \quad \varphi(U \cap M) = (\mathbb{H}^p \times \{0\}) \cap \varphi(U)$$

L'entier p est appelé dimension de M en x_0 . On appelle bord de M et on note ∂M l'ensemble des points x_0 correspondant au cas (b).

Remarque 2.2. (A) Comme dans le cas de l'invariance de la dimension, les cas (a) et (b) ne peuvent se présenter simultanément pour un même point x_0 , car il n'existe pas de difféomorphisme local préservant l'origine et envoyant $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$ sur \mathbb{R}^n : en effet, l'image d'un ouvert contenant 0 par un difféomorphisme est encore un ouvert contenant 0, mais $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$ ne contient pas de tel ouvert.

(B) Le sous-ensemble ∂M n'est en général pas la frontière de M au sens topologique : pour la topologie induite de M , la frontière de M est vide (!), et comme sous-ensemble de \mathbb{R}^N , si $p < N$, M est d'intérieur vide, donc $Fr(M) = M$. Dans le

cas particulier où M est une sous-variété fermée de dimension N dans \mathbb{R}^N , le sous-ensemble M de \mathbb{R}^n a en effet pour frontière ∂M .

- (C) On définit l'espace tangent comme dans le cas sans bord. Pour les points de $M \setminus \partial M$ cela ne pose pas de problème. Pour les points de ∂M , on définit $T_x M = d\varphi(0)^{-1}(\mathbb{R}^p)$.
- (D) Attention, en un point x_0 du bord l'espace tangent en x_0 n'est plus l'ensemble des vecteurs vitesse d'une courbe tracée sur M passant par x_0 . En effet, si $c : [0, \varepsilon[\rightarrow M$ est un chemin de classe C^1 , $c'(0)$ est dans le demi-espace

$$d\varphi(x_0)^{-1}(0)((\mathbb{R}^{p-1} \times \{\mathbb{R}_+\} \times \{0\})$$

que l'on note $T_{x_0}^+ M$.

On vérifie que si on regarde l'ensemble des $c'(0)$ tels que $c :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M$

Exemple 2.1. La demi-sphère,

$$S^+ = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$$

est une variété à bord, dont le bord est le cercle

$$\Gamma = \{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

et dont l'espace tangent en (x, y, z) est donné par

$$T_{(x,y,z)} S^+ = \{(u, v, w) \mid xu + yv + zw = 0\}$$

et

$$T_{(x,y,z)}^+ S^+ = \{(u, v, w) \mid xu + yv + zw = 0, z \geq 0\}$$

Les sous-variétés définies précédemment sont telles que ∂M est vide. On les appelle, lorsqu'une confusion est possible, sous-variétés sans bord.

Il y a bien entendu l'analogie à bord de la Proposition 2.3. Nous allons nous contenter du cas des équations. On pose $\pi : \mathbb{R}^{N-p} \rightarrow \mathbb{R}^{N-p-1}$ la projection parallèlement à $\mathbb{R} \times \{0\}$.

Proposition 2.8. *Soit M un sous-ensemble de \mathbb{R}^N et soit une fonction $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N-p}$ telle que $M = F^{-1}(\mathbb{R}_+ \times \{0\})$, et que sur $F^{-1}(0)$, $dF(x)$ soit surjective, et sur $F^{-1}(\mathbb{R}_+^* \times \{0\})$ l'application $d(\pi \circ F)(x)$ soit surjective. Alors M est une sous-variété à bord de \mathbb{R}^N de bord $F^{-1}(0)$.*

Démonstration. En effet, posant $G = \pi \circ F$, en un point x de $F^{-1}(\mathbb{R}_+^* \times \{0\})$, M coïncide avec $G^{-1}(0)$ et nous sommes dans la situation d'une sous-variété ordinaire (x est un point de $M \setminus \partial M$), la forme normale des submersions ramène F à l'application $F(x_1, \dots, x_N) = (x_1, \dots, x_{N-p})$ et donc M se ramène localement à $\{(x_1, \dots, x_N) \mid x_1 \geq 0, x_{N-p+1} = \dots = x_N = 0\}$.

□

3 Applications

3.1 Points critiques de fonctions définies sur une sous-variété

Soit S la surface de \mathbb{R}^3 définie par

$$F(x, y, z) = x^4 + x^2z^2 + y^4 + 2z^2 - 1 = 0$$

C'est une sous-variété de \mathbb{R}^3 , car en chaque point, les dérivées partielles

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 4x^3 + 2xz^2 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 4y^3 \\ \frac{\partial F}{\partial z} = 2x^2z + 4z \end{cases}$$

ne s'annulent pas simultanément sur S (exercice).

Soit f la restriction à S de $x^2 + y^2 + z^2$. Comment caractériser les maxima et minima de f ? Lorsque S est une sous-variété compacte, on sait que f atteint son maximum et son minimum, et ce problème donne lieu aux conditions nécessaires classiques d'extrema liés que l'on va énoncer. En effet, grâce aux cartes locales, la recherche des extréma locaux de f_S se ramène au problème analogue sur \mathbb{R}^p . Une fonction réelle de classe C^1 définie sur un ouvert de \mathbb{R}^p ne peut avoir d'extremum local en 0 que si sa différentielle en 0 s'annule. Plus généralement si g est définie sur \mathbb{R}^n , et sa restriction à \mathbb{R}^p possède en 0 un extremum local, alors $dg(0)|_{\mathbb{R}^p} = 0$, ou encore $dg(0)(\mathbb{R}^p) = 0$.

Soit alors M une sous-variété, et supposons qu'une fonction g de classe C^1 définie sur \mathbb{R}^n admette un extremum en x_0 . Considérons une carte locale : $\varphi : U \cap V \rightarrow \varphi(U) \cap \mathbb{R}^p \times \{0\}$. Alors φ^{-1} envoie un voisinage de 0 de \mathbb{R}^p sur un voisinage de x_0 dans V , et $g = f \circ \varphi|_{\mathbb{R}^p}^{-1}$ a un extremum local en 0 seulement si $f|_V$ en a un en x_0 .

La condition nécessaire usuelle d'extremum local, $dg(0) = 0$ devient $df(x_0) \circ d\varphi^{-1}(0)(\mathbb{R}^p \times \{0\}) = 0$. Or $d\varphi^{-1}(0)(\mathbb{R}^p \times \{0\}) = T_{x_0}M$, et on a donc

Proposition 2.9. *Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une application C^1 , et V une sous-variété. Si $f|_V$ a un extremum local en x_0 alors $T_{x_0}V \subset \ker df(x_0)$.*

Définition 2.10. Si la condition nécessaire de la proposition précédente est vérifiée en x_0 , c'est à dire si $df(x_0)|_{T_{x_0}V} = 0$, on dit que x_0 est un **point critique** de $f|_V$.

Voyons comment s'exprime cette condition lorsque V est définie comme nappe, comme graphe ou par une équation :

a) Dans le cas d'une nappe, puisque $T_{x_0}V = \text{Im } dj(u_0)$ on doit vérifier $df(j(u_0))dj(u_0) = 0$.

b) Pour le graphe de $u : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$, vu que $T_{x_0}V$ est le graphe de $du(x_0)$ il faut vérifier que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, u(x_0)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, u(x_0))\frac{\partial u}{\partial x}(x_0) = 0$.

c) Dans le cas d'une équation $V = \{x|F(x) = 0\}$, vu que $T_{x_0}V = \ker dF(x_0)$, nous obtenons le théorème des extrema liés. La condition

$$\ker dF(x_0) \subset \ker df(x_0)$$

c'est-à-dire que la forme linéaire $df(x_0)$ doit s'annuler sur le noyau de $dF(x_0)$. Or si $F(x) = (F_1(x), \dots, F_{n-p}(x))$ $\ker dF(x_0)$ est l'intersection du noyau des formes linéaires $dF_j(x_0)$. Pour que la forme linéaire $df(x_0)$ s'annule sur l'intersection du noyau des $dF_j(x_0)$ il faut et il suffit que $df(x_0)$ soit combinaison linéaire des $dF_j(x_0)$. Cette condition équivaut encore à l'existence de réels w_j tels que

$$df(x_0) = \sum_{j=1}^{n-p} w_j dF_j(x_0) = \langle w, dF(x_0) \rangle$$

On a donc

Corollaire 2.11 (Extrema liés). *Soit $V = \{x|F(x) = 0\}$ où $F \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n-p})$ a sa différentielle surjective sur V . Alors, pour que la restriction de $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ à V ait un point critique en x_0 , il faut et il suffit qu'il existe $w \in \mathbb{R}^{n-p}$ tel que*

$$df(x_0) = \langle w, dF(x_0) \rangle$$

Remarque 3.1. Le vecteur w (ou ses composantes) s'appelle multiplicateur de Lagrange.

Interprétation géométrique :

En les points où $df(x_0)$ est non nulle, $\ker df(x_0)$ est l'espace tangent à la sous-variété de niveau $\Sigma_\lambda = \{f(x) = \lambda\}$. Donc les points critiques de $f|_V$ sont les points où les Σ_λ sont tangentes² à V .

Exemples 3.1. Soient $q_1(x) = \frac{1}{2}\langle A_1x, x \rangle$ une forme quadratique définie positive sur \mathbb{R}^n , et $V = \{q_1(x) = 1\}$. Comme $dq_1(x).h = \langle A_1x, h \rangle$, $dq_1(x)$ est non nulle sur V qui est donc une sous-variété : c'est un ellipsoïde!

Si $q_2(x) = \frac{1}{2}\langle A_2x, x \rangle$ est une autre forme quadratique, les points critiques de la restriction de q_2 à V sont les x tels que

$$A_2x = \lambda A_1x$$

Ce sont les vecteurs propres de $A_1^{-1}A_2$.

En particulier si $A_2 = I$ (on peut toujours s'y ramener par changement de base) les extrema de $\|x\|^2$ sur V correspondent aux axes de la quadrique V . D'après notre

2. c'est-à-dire que l'espace tangent de Σ_λ contient l'espace tangent de V .

interprétation géométrique, ces axes correspondent aux points où les sphères centrées à l'origine sont tangentes à la quadrique.

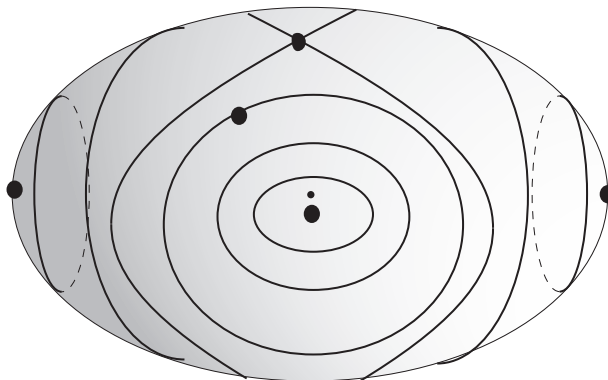


FIGURE 2.4 – Courbes d'intersection de deux ellipsoïdes

Reprenons le problème des extrema de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sur $F^{-1}(0)$ où $F(x, y, z) = x^4 + x^2z^2 + y^4 + 2z^2 - 1$. L'ensemble $F^{-1}(0)$ étant fermé et borné, on sait que f y atteint son maximum et son minimum. On doit résoudre les équations

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial F}{\partial x} - \lambda x = 4x^3 + 2xz^2 - \lambda x \\ 0 = \frac{\partial F}{\partial y} - \lambda y = 4y^3 - \lambda y \\ 0 = \frac{\partial F}{\partial z} - \lambda z = 2x^2z + 4z - \lambda z \\ x^4 + x^2z^2 + y^4 + 2z^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Les solutions (réelles) sont ³

$(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$, $((\pm \frac{1}{2})^{1/4}, \pm (\frac{1}{2})^{1/4}, 0)$, $(0, 0, \pm (\frac{1}{2})^{1/2})$ et le maximum de f est atteint en quatre points $(\pm (\frac{1}{2})^{1/4}, \pm (\frac{1}{2})^{1/4}, 0)$, et est égal à $\sqrt{2}$ le minimum en les deux points $(0, 0, \pm (\frac{1}{2})^{1/2})$, et vaut $\frac{1}{2}$. Les quatre points $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$ ne sont ni des minima ni des maxima.

Exemple 3.1 (Exemple pratique). Nous sommes en mesure de résoudre le problème général suivant :

Soit F une fonction réelle de classe C^1 définie sur \mathbb{R}^n , telle que le domaine $\Omega = \{x \mid F(x) \leq 0\}$ soit compact, et $dF(x)$ soit surjective pour x dans $F^{-1}(0)$. Soit f une autre fonction de classe C^1 sur \mathbb{R}^n . On cherche le maximum (ou le minimum) de f dans le domaine Ω .

La compacité de Ω nous permet d'affirmer qu'un tel maximum existe, et il y a deux possibilités, suivant qu'il est réalisé dans l'intérieur de Ω ou sur son bord $F^{-1}(0)$. Dans le premier cas, on doit avoir $df(x_0) = 0$. Dans le second cas on a un problème d'extrema liés, et on doit résoudre

$$df(x_0) = \lambda dF(x_0), \quad F(x_0) = 0$$

3. Obtenues encore une fois en utilisant Maple, et les commandes `solve` et `evalf`

Le maximum de f sur Ω appartient à l'un des deux ensembles ainsi déterminés (voir l'exercice (J)).

4 Exercices

- (A) Trouver des conditions suffisantes pour qu'une courbe paramétrée, $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ soit une sous-variété.
- (B) Montrer que si une courbe de niveau de $\frac{1}{2}y^2 - \cos(x)$ ne contient pas de zéro, la trajectoire de $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -\nabla V(x)$ partant d'un point de cette courbe, coïncide avec une composante connexe de la courbe de niveau.
- (C) Démontrer que la réunion de deux plans non parallèles n'est pas une sous-variété. Indication : montrer que son espace tangent en un point d'intersection doit avoir des propriétés contradictoires.
- (D) Montrer que l'image de la courbe $t \rightarrow (t^2, t^3)$ n'est pas une sous-variété.
- (E) Montrer qu'en tout point x_0 , une sous-variété M est localement un graphe au dessus de son espace tangent $T_{x_0}M$. En déduire une nouvelle démonstration de l'exercice précédent.
- (F) Montrer que si $p \neq 1$, \mathbb{R}^p ne peut être homéomorphe à \mathbb{R} (utiliser la non connexité de $\mathbb{R} - \{0\}$).
Utiliser le théorème de Jordan pour montrer que si $p \neq 2$, \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^p ne sont pas homéomorphes.
- (G) Lire et comprendre dans [Milnor] la démonstration du fait qu'une variété de dimension 1 compacte et connexe est difféomorphe à un cercle.
- (H) Soit f une fonction définie au voisinage de la sous-variété M . On suppose que pour toute carte (U, φ) la restriction de $f \circ \varphi^{-1}$ à \mathbb{R}^k est C^∞ . Montrer que f est la restriction d'une fonction C^∞ sur \mathbb{R}^n (utiliser une partition de l'unité pour se ramener au cas local).
- (I) Définir une sous-variété de classe C^k pour $k \geq 0$. Remarquer que pour $k \geq 1$ la Proposition 2.2 se démontre comme pour $k = +\infty$. Lorsque $k = 0$ cette proposition porte le nom de théorème d'invariance du domaine. Il équivaut à dire qu'il n'existe pas d'homéomorphisme d'un ouvert de \mathbb{R}^p sur un ouvert de \mathbb{R}^q .
- (J) Soit $F : E \rightarrow G$ une application C^k ($k \geq 1$) entre espaces de Banach, telle que $dF(x)$ soit surjective pour tout $x \in F^{-1}(0)$. Soit $\varphi : E \rightarrow H$ une autre application, de classe C^k telle que $\ker d\varphi(x) \cap \ker dF(x) = \{0\}$ pour tout $x \in F^{-1}(0)$. Montrer que l'image de $F^{-1}(0)$ par φ est une sous variété immergée, et que son espace tangent en $\varphi(x)$ est $d\varphi(x) \ker dF(x)$.
- (K) Soit V une sous-variété de dimension n de \mathbb{R}^{n+1} . On suppose V donnée par l'équation $F \leq 0$, où dF ne s'annule pas sur V , et F est minorée et tend vers $+\infty$ à l'infini.
- (a) Soit $\nu(x) = \frac{dF(x)}{|dF(x)|}$. Montrer que $\nu(x)$ est orthogonal à $T_x V$.

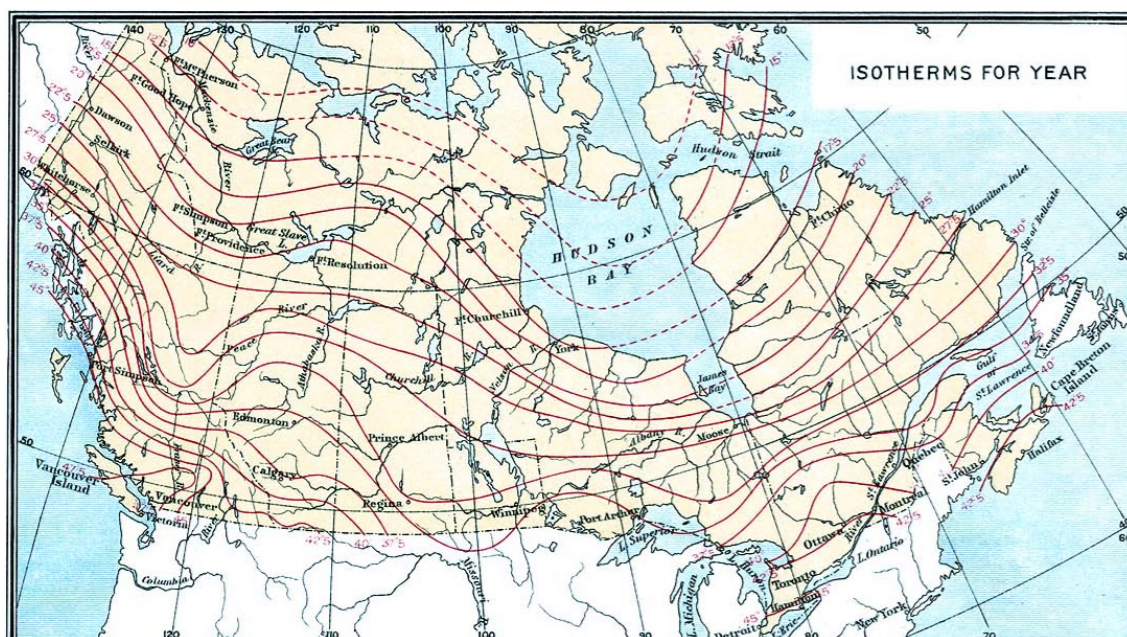


FIGURE 2.5 – Isothermes annuelles du Canada.

(b) $\varphi : V \times]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ donnée par $\varphi(v, t) = v + t\nu(x)$ où ν est la normale extérieure de V .

Montrer que pour ε assez petit, φ est une difféomorphisme sur son image.

(L) Trouver le maximum de $\sum_{j=1}^n x_j^2$ avec la contrainte $\sum_{j=1}^n x_j = 1, x_j \geq 0$

(M) Soit D un domaine du plan bordé par une courbe C^1 . Montrer que les extrema de f sur D sont à chercher parmi

- les points où $df(x)$ s'annule

- les points où $df(x)|_{T_x \partial D} = 0$

Décrire graphiquement ces points. Montrer que la restriction de f à ∂D et la direction de $\nabla f(x)$ (supposé non nul) en un point x de ∂D permettent de savoir si x est un minimum ou un maximum local de f .

Expliquer comment, en utilisant une carte météorologique des isothermes, on trouve le point le plus chaud et le plus froid d'un pays (ou d'une région) de la carte, dont la frontière est supposée de classe C^1 . Le faire pour la carte des températures moyennes annuelles du Canada (cf. Figure 2.5).

Indication : décrire l'allure des isothermes au voisinage d'un un tel point.

Que deviennent les conditions d'extrema liés si le bord de la région est seulement C^1 par morceaux ?

(N) Sur le graphe suivant, on a tracé les courbes

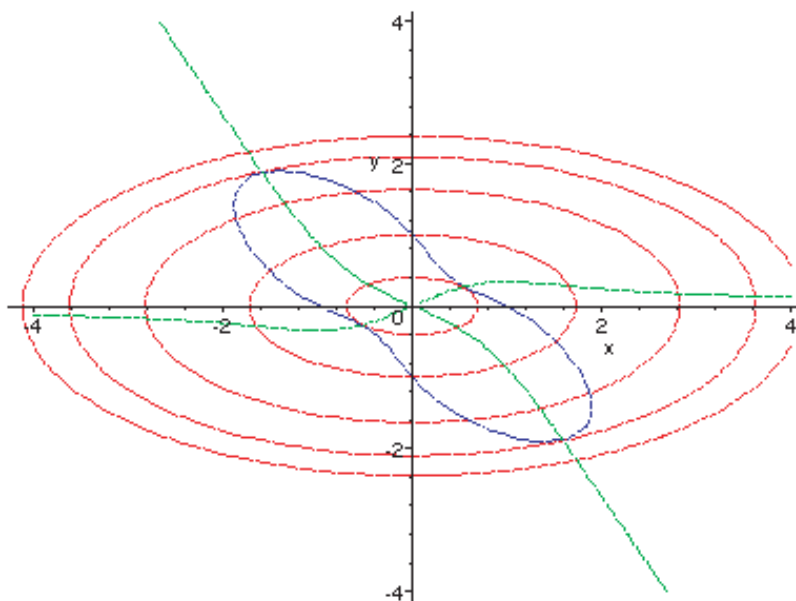


FIGURE 2.6 – Exercice (N)

- en bleu : $F(x, y) = 0$ où $F(x, y) = x^4 + y^4 + 6xy - 1$
- en rouge : les niveaux de $G(x, y)$ où $G(x, y) = x^2 + 3y^2$
- en vert : la courbe $D(x, y) = 0$ où

$$D(x, y) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial G}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial G}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}$$

[D'après Maple, $D(x, y) = 24yx^3 + 36y^2 - 8xy^3 - 12x^2$]

Indiquer sur le dessin les extrema de la restriction de G à $F = 0$.

(O) Soit Γ une sous-variété connexe compacte de dimension 1 du plan (i.e. une courbe fermée). On admettra qu'il existe une application $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ injective, telle que $\dot{\gamma}(t)$ ne s'annule pas, et telle que $\Gamma = \gamma(S^1)$. On identifie dans la suite S^1 à Γ via γ . On note $\|\bullet\|$ la norme canonique sur le plan.

(a) Montrer que l'application de d_2 de Γ^2 dans \mathbb{R} donnée par

$$d_2 : (t_1, t_2) \rightarrow \|\gamma(t_1) - \gamma(t_2)\|$$

atteint son maximum en un point où $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ et que $\dot{\gamma}(t_1)$ et $\dot{\gamma}(t_2)$ sont orthogonaux à $\gamma(t_1) - \gamma(t_2)$.

(b) Montrer que l'application d_3 de Γ^3 dans \mathbb{R} donnée par

$$d_3 : (t_1, t_2, t_3) \rightarrow \|\gamma(t_1) - \gamma(t_2)\| + \|\gamma(t_2) - \gamma(t_3)\| + \|\gamma(t_3) - \gamma(t_1)\|$$

atteint son maximum en un point où $\gamma(t_i) \neq \gamma(t_j)$ si $i \neq j$ et qu'en un tel point

$$\frac{\gamma(t_1) - \gamma(t_2)}{\|\gamma(t_1) - \gamma(t_2)\|} - \frac{\gamma(t_2) - \gamma(t_3)}{\|\gamma(t_2) - \gamma(t_3)\|} \perp \dot{\gamma}(t_2)$$

et de même en effectuant une permutation circulaire de t_1, t_2, t_3)

- (c) Il existe donc des trajectoires à 3 rebonds sur tout billard dont le bord est convexe. Que dire pour k rebonds ($k > 3$) ?

(P) (Théorie des enveloppes)

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ une famille de fonctions C^∞ définies sur le plan que l'on écrira $f(\lambda, x, y)$. On suppose que pour tout (λ, x, y) annulant f , l'une des dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial x} f(\lambda, x, y)$, $\frac{\partial}{\partial y} f(\lambda, x, y)$ est non nulle.

- (a) Montrer que l'ensemble $C_\lambda = \{(x, y) \mid f(\lambda, x, y) = 0\}$ est une sous-variété de dimension 1 (i.e. une courbe régulière plongée).
 (b) Montrer que la tangente à C_λ en (x_0, y_0) est donné par l'équation

$$(x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} f(\lambda, x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} f(\lambda, x_0, y_0) = 0$$

- (c) Écrire des hypothèses suffisantes pour que l'ensemble

$$\{(x, y) \mid \exists \lambda, f(\lambda, x, y) = \frac{\partial}{\partial \lambda} f(\lambda, x, y) = 0\}$$

définisse une courbe C^∞ notée Γ

- (d) Montrer sous les hypothèses précédentes, qu'en chacun de ses points, la courbe Γ est tangente à une des courbes C_λ . On appelle Γ l'**enveloppe** de la famille de courbes C_λ .
 (e) La famille de cubiques

$$y = (x - \lambda)^3$$

vérifie-t-elle les hypothèses des questions précédentes. Existe-t-il une équation différentielle,

$$\dot{x} = a(x, y), \dot{y} = b(x, y)$$

avec a, b Lipschitziens, dont les solutions sont les paraboles en question ?

- (Q) Montrer que l'image d'une immersion injective propre est une sous-variété (propre signifie que l'image réciproque d'un compact est compacte).

Chapitre 3

Variétés

1 Définitions et propriétés de base

Il apparaît au cours de l'étude des sous-variétés, que l'espace ambiant est souvent une "graisse inutile" qui alourdit la démarche. C'est notamment le cas lorsque l'on veut considérer l'opération de quotient d'une sous-variété. Par exemple la sphère S^2 est une sous-variété de \mathbb{R}^3 , mais son quotient par l'application antipodale $x \mapsto -x$ est homéomorphe à l'espace projectif, qui ne peut se voir comme sous-variété de \mathbb{R}^3 (on verra pourquoi ultérieurement).

On pose alors

Définition 3.1. Soit M un espace métrisable, réunion dénombrable de compacts¹

On appelle structure de variété C^k sur M la donnée d'une famille $(U_j, \varphi_j)_{j \in \Lambda}$, telle que

- (A) les U_j sont des ouverts qui forment un recouvrement de M
- (B) les $\varphi_j : U_j \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont des homéomorphismes sur l'ouvert $\varphi_j(U_j)$ tels que $\varphi_j \circ \varphi_k^{-1} : \varphi_k(U_k \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_k \cap U_j)$ soit une application de classe C^k .

On appelle (U_j, φ_j) cartes définissant la sous-variété. Il est clair que si (U, φ) est telle que pour tout j , on ait $\varphi \circ \varphi_j^{-1} : \varphi(U \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U \cap U_j)$ soit une application de classe C^k , alors on peut ajouter (U, φ) à l'ensemble des cartes de M . En prenant tous les (U, φ) ayant cette propriété, on obtient un **atlas** de M . Lorsque $k = 0$ on appelle M une variété topologique. Bien entendu une même variété topologique peut avoir différentes structures de variété C^k ($k \geq 1$), cependant la vraie question est de savoir si celle-ci sont isomorphes.

1. En général les conditions topologiques imposées à une variété sont plutôt la paracompacité, c'est à dire que l'on demande que M soit séparé (deux points ont des voisinages disjoints) et tout recouvrement ouvert possède un sous-recouvrement localement fini. Mais comme l'existence de cartes locales entraîne que M sera automatiquement localement compact, localement connexe et localement métrisable, cela entraîne que M est métrisable (th. de Smirnov). On préfère donc le déclarer d'emblée. On suppose souvent aussi que M est réunion dénombrable de compacts, mais c'est automatiquement le cas pour chaque composante connexe d'un espace métrisable localement compact.

On appelle n la dimension de M en $x \in U_j$ et on la note $\dim_x(M)$. Clairement n ne dépend pas du choix de la carte contenant x , car il n'existe pas d'homéomorphisme de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m pour $m \neq n$. Ce fait est non trivial et s'appelle le **théorème de l'invariance du domaine**. Il devient par contre trivial (comme dans le cas des sous-variétés) lorsqu'on suppose $k \geq 1$

Enfin notons qu'une sous-variété de \mathbb{R}^N est une variété. En effet à une carte (U, φ) de la sous-variété on peut associer $(U \cap M, \varphi_{U \cap M})$ qui est une carte de la variété M .

On peut aussi considérer le cas des variétés à bord, qui jouent un rôle important :

Définition 3.2. Soit M un espace métrisable. On appelle structure de **variété à bord** de classe C^k sur M la donnée d'une famille $(U_j, \varphi_j)_{j \in \Lambda}$, telle que

- (A) les U_j sont des ouverts qui forment un recouvrement de M
- (B) φ_j est soit une application $\varphi_j : U_j \rightarrow \mathbb{R}^n$ soit une application $\varphi_j : U_j \mapsto \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$ qui soit un homéomorphisme sur un ouvert, tel que $\varphi_j \circ \varphi_k^{-1} : \varphi_k(U_k \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_k \cap U_j)$ soit une application de classe C^k .

Remarques 1.1. (A) On rappelle qu'un ouvert de $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$ est l'intersection d'un ouvert de \mathbb{R}^n et de $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$. On note dans la suite $H_+^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$.

- (B) Les points envoyés sur $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ sont appelés points du bord, et on note leur ensemble ∂M . Ces points sont bien définis car il n'y a pas d'homéomorphisme $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$. Ce résultat n'est pas évident en dimension > 1 (enlever le point et regarder la connexité) mais le devient dès que $k \geq 1$ (exercice!).

- (C) Si on ne suppose pas l'espace métrisable, mais seulement l'existence de cartes, il existe des "pathologies", essentiellement de deux types :

- $\mathbb{R} \cup \{0^*\}$ où les ouverts sont les ouverts de \mathbb{R} et les ensembles de la forme $U \setminus \{0\} \cup \{0^*\}$ où U est un ouvert contenant 0. C'est un espace non-séparable, donc non métrique.
- $\bigcup_{\alpha \in A} [0, 1 \setminus \{(0, 0)\}]$ où A est le premier ordinal non-dénombrable, muni de la topologie induite par l'ordre lexicographique. L'espace n'est pas métrisable car il est localement compact mais n'est pas réunion dénombrable de compacts.

Exemple 1.1. Soit \mathbb{R} muni des cartes $(] - \infty, -1[, \text{Id})$, $(] - 1, 1[, c)$, $(]1, \infty[, \text{Id})$, où $c(x) = x^3$. Parce que c n'est pas un difféomorphisme, cette structure C^1 diffère de la structure usuelle. En effet, une fonction f est C^∞ sur cette variété, si et seulement si $f(x^{1/3})$ est C^∞ au sens usuel. Cependant l'homéomorphisme $x \rightarrow x^3$ définit un isomorphisme entre les deux structures C^1 .

- (A) Toute variété possédant une structure C^k possède en fait une structure C^∞ unique : cela résulte du fait que grâce au théorème d'inversion locale, en topologie C^1 , les difféomorphismes C^k forment un sous-ensemble C^1 -dense (alors qu'en topologie C^0 , les difféomorphismes C^1 ne sont pas C^0 -denses, sauf en petite dimension). Ceci est démontré dans la section 1.4. On parlera donc désormais de **structure différentiable**.
- (B) En fait, les variétés topologiques de dimension 1 ou 2 possèdent une structure différentiable unique (quel que soit k). Ceci est encore vrai en dimension 3, faux en

dimension 4, l'espace \mathbb{R}^4 ayant plusieurs structures différentiables (et même une infinité) distinctes, mais la dimension 4 est dans ce cas une exception : en dimension différente de 4, \mathbb{R}^n possède une unique structure de variété différentiable et la dimension 4 est la seule pour laquelle une variété (compacte) peut avoir une infinité de structures différentiables. Par ailleurs en dimension 7, la sphère possède 28 structures différentiables distinctes (résultat dû à Kervaire et Milnor, cf. [Kervaire-Milnor]) et il existe des variétés topologiques n'ayant pas de structure différentiable (Thom)

Notons qu'il résulte de la définition que M est localement compact.

Proposition 3.3. *Soit $f : M \rightarrow N$ une application différentiable entre variétés, On suppose N sans bord B une sous-variété à bord de N et $A = f^{-1}(B)$. On suppose que $f^{-1}(\partial B)$ ne rencontre pas ∂M et que f restreint à ∂M soit transverse à B et à ∂B , c'est-à-dire que*

(A) *pour $x \in f^{-1}(B)$ on a $df(x)(T_x(\partial M)) + T_{f(x)}B$.*

(B) *pour $x \in f^{-1}(\partial B)$ on a $df(x)(T_x(\partial M)) + T_{f(x)}(\partial B)$*

Alors, A est une sous-variété à bord de M , et $\partial M = A \cap \partial M \cup f^{-1}(\partial B)$.

Démonstration. Commençons par le cas sans bord. Si B est de codimension k , localement $B = F^{-1}(0)$ où $dF(y)$ est surjective de $T_y N$ sur \mathbb{R}^k . Alors $A = (F \circ f)^{-1}(0)$, et on doit vérifier que $d(F \circ f)(x)$ est surjective si $f(x) = y$. Mais cela équivaut à $dF(y) \circ df(x)$ surjective, et donc que $dF(y)$ restreinte à $df(x)T_x M$ est surjective. Comme $T_y B = \ker(dF(y))$ il suffit pour cela que $T_y B + df(x)T_x M = T_y N$. Maintenant supposons B à bord. Si $y = f(x) \in \partial B$, B se décrit au voisinage de y par $F^{-1}(H_+^n)$ où F est comme ci-dessus. Alors il faut vérifier que $(F \circ f)^{-1}(H_+^n)$ décrit localement une sous-variété à bord,

□

1.1 Faisceaux sur les variétés, partitions de l'unité, plongements et immersions

Définition 3.4. Soit M une variété. On appelle $C^k(M, \mathbb{R})$ l'espace des applications f de $C^0(M, \mathbb{R})$ telles que pour toute carte (U, φ) la fonction $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$ soit de classe C^k .

Définition 3.5. Soient M, N deux variétés. On note $C^k(M, N)$ l'ensemble des applications telles que pour toute paire de cartes (U, φ) et (V, ψ) de M et N respectivement, $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est C^k sur son ensemble de définition (qui est donné par $\varphi^{-1}(\varphi(U \cap f^{-1}(V)))$).

1.2 Espace tangent et fibrés vectoriels

Parmi les définitions de l'espace tangent pour une sous-variété, on peut en retenir une dans le cas des variétés

Définition 3.6 (Vecteur tangent en x). Soit M une variété, x un point de M , γ_1, γ_2 deux courbes paramétrées par $] - 1, 1[$ telles que $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = x$. On dit que γ_1, γ_2 sont tangentes en x si quelle que soit la carte (U, φ) telle que $x \in U$ on ait $\frac{d}{dt}(\varphi(\gamma_1(t)))_{t=0} = \frac{d}{dt}(\varphi(\gamma_2(t)))_{t=0}$. Si cette égalité est vérifiée pour une carte, elle l'est par toutes. On note parfois $j^1\gamma_1(0) = j^1\gamma_2(0)$. L'ensemble des classes d'équivalences de telles courbes pour cette relation d'équivalence est appelé espace tangent en x de M . On le note $T_x M$.

L'un des inconvénients de cette définition est que la structure d'espace vectoriel de $T_x M$ n'est pas évidente. De même, il n'est pas tout à fait clair ce qu'est une famille continue (ou de classe C^k) de champs de vecteurs (Exercice : proposer une telle définition).

Notons par contre une naturalité de cette définition : si $f : M \rightarrow N$ est une application différentiable entre variétés, on définit $df : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ par $[\gamma] \mapsto [f \circ \gamma]$

Définition 3.7 (Fibré vectoriel). On appelle fibré vectoriel sur M la donnée d'un espace E et d'une projection $\pi : E \rightarrow M$ telle que les $\pi^{-1}(x) = E_x$ possèdent une structure d'espace vectoriel ayant les propriétés suivantes. Il existe un recouvrement de M par des ouverts U_j et des cartes $\psi_j : \pi^{-1}(U_j) \rightarrow U_j \times \mathbb{R}^n$ telles que

- (A) $p_1 \circ \psi_j = \pi$ où $p_1 : U_j \times \mathbb{R}^n$ est la première projection
- (B) On ait $\psi_j \circ \psi_i^{-1} : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n \rightarrow (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n$ soit de la forme $(x, v) \mapsto (x, g_{i,j}(x)v)$ où $x \mapsto g_{i,j}(x)$ est une application C^∞ de $U_i \cap U_j$ dans $GL(n, \mathbb{R})$.

Remarque 1.1. (A) Les propriétés (A) et (B) suffisent pour définir un fibré vectoriel. En effet, les ψ_j donnent par transport une structure d'espace vectoriel sur les E_x pour $x \in U_j$, et la propriété (B) garantit que cette structure ne dépend pas du choix de la carte.

- (B) On peut même définir un fibré simplement en se donnant une famille $g_{i,j} : (U_i \cap U_j) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ où mes U_i forment un recouvrement de M et $g_{i,j}$ vérifie
 - (a) $g_{i,i} = \text{Id}$ et
 - (b) $g_{i,j} \cdot g_{j,k} \cdot g_{k,i} = \text{Id}$ (en particulier $g_{i,j} = g_{j,i}^{-1}$)

On pose alors $E = \bigcup (U_i \times \mathbb{R}^n) / \simeq$ où $(x, v) \in U_i \times \mathbb{R}^n, (y, w) \in U_j \times \mathbb{R}^n$ satisfont $(x, v) \simeq (y, w)$ si et seulement si $x = y$ et $g_{i,j}(x)v = w$. On a alors $\pi(x, v) = x$ et $\psi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{R}^n$ est l'identité de $U_i \times \mathbb{R}^n$. On dit que les $g_{i,j}$ sont les applications de recollement, ou les **cocycles** définissant le fibré. De même on peut parler, lorsque G est un groupe agissant sur F de G -fibré de fibre F , par la donnée de cocycles $(g_{i,j}(x))$ à valeurs dans G vérifiant (a) et (b). On pose alors $E = \bigcup (U_i \times F) / \simeq$ où $(x, v) \in U_i \times F, (y, w) \in U_j \times F$ satisfont $(x, v) \simeq (y, w)$ si et seulement si $x = y$ et $g_{i,j}(x)v = w$.

- (C) La définition donne automatiquement à E une structure de variété dont les ψ_j sont des cartes. Il est facile de vérifier que la projection π est une application C^∞ pour cette structure, puisque dans une «carte de fibré» c'est une projection.
- (D) Si E_1, E_2 sont des fibrés vectoriels, on note $E_1 \oplus E_2$ le fibré défini sur $E_1 \times_M E_2 = \{(\xi_1, \xi_2) \in E_1 \times E_2 \mid \pi_1(\xi_1) = \pi_2(\xi_2)\}$ par les cartes $(\psi_1)_i \oplus (\psi_2)_i : (E_1 \times_M E_2)_{|U_i} \rightarrow U_i \times (\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^m)$ par $(p_{i_1})_i \oplus (\psi_2)_i(\xi_1, \xi_2) = (x, p_1(\psi_1(\xi_1)) + p_2(\psi_2(\xi_2)))$. Il est donné par les cocycles $g_{i,j}^1 \oplus g_{i,j}^2$.

Proposition 3.8. *L'espace tangent à M , $TM = \bigcup_{x \in M} T_x M$ muni de la projection naturelle telle que $\pi(T_x M) = \{x\}$ est un fibré vectoriel. Si $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une carte, on définit $\psi = d\varphi$ par*

$$\psi([\gamma]) = (\gamma(0), \frac{d}{dt}\varphi(\gamma(t))|_{t=0}) \in U \times \mathbb{R}^n$$

On a alors associée aux cartes φ_i, φ_j , les cartes $\psi_j \circ \psi_i^{-1}(x, v) = (x, d(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(v))$ vu que $d(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})$ est l'application qui envoie $\frac{d}{dt}\varphi_i(\gamma(t))|_{t=0}$ sur $\frac{d}{dt}\varphi_j(\gamma(t))|_{t=0}$

Démonstration. Si les (U_j, φ_j) sont des cartes de M , les applications $T_{U_j} M \rightarrow U_j \times \mathbb{R}^n$ données par $[\gamma] \mapsto (\gamma(0), \frac{d}{dt}\varphi_j(\gamma(t))|_{t=0})$ fournissent les cartes de fibré. En effet, $\psi_j \circ \psi_i^{-1}(x, v) = (x, d(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(v))$ est bien du type $(x, v) \rightarrow (x, g_{i,j}(x)v)$. Il est facile de vérifier que ψ est bijective. □

Notons que si f est une application C^1 , df (parfois aussi notée $T_x f$ ou $Df(x)$) est bien définie, et $df(x) : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ est linéaire. C'est un exemple de ce qu'on appelle un morphisme de fibrés

Définition 3.9. Soit E_1 un fibré vectoriel sur M_1 , E_2 un fibré vectoriel sur M_2 . On appelle morphisme de fibrés la donnée d'une application $\psi : E_1 \rightarrow E_2$ telle que ψ envoie les fibres $(\pi_1)^{-1}(x)$ sur $(\pi_2)^{-1}(f(x))$ par une application linéaire, et ψ est C^∞ . On représente un tel morphisme de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\psi} & F \\ \downarrow \pi_E & & \downarrow \pi_F \\ M & \xrightarrow{\varphi} & N \end{array}$$

En particulier si on a une application $f : M \rightarrow N$ sa différentielle df est un morphisme de fibrés $TM \rightarrow TN$.

Une conséquence de ce qui précède est que deux variétés difféomorphes ont des espaces tangents isomorphes. Par exemple la propriété de posséder ou non un champ de vecteurs (C^∞ ou en tous cas au moins C^0 !) sans zéros est une propriété de l'espace tangent. Cela signifie qu'il existe une application $s : M \rightarrow TM$ telle que $\pi \circ s = \text{Id}_M$, et $s(x) \neq 0$ quel que soit x . Il est clair que cette propriété se conserve par isomorphisme de fibrés. Cela permet de voir que S^2 et T^2 ne sont pas difféomorphes - à condition de savoir que S^2 ne possède pas de champ de vecteurs sans zéro (cf. théorème 5.9 du chapitre 5).

Remarque 1.2. Si M, N sont deux variétés, leur produit est évidemment une variété, les cartes étant les cartes $(U_i \times V_j, \varphi_i \times \psi_j)$ si les (U_i, φ_i) et (V_j, ψ_j) sont les cartes de M et N . Le fibré tangent $T(M \times N)$ est donné par $TM \times TN$, tel que $T_{(x,y)}(M \times N) = T_x M \oplus T_y N$.

1.3 Immersions, plongements, partitions de l'unité

Soit $f : M \rightarrow N$ une application.

Définition 3.10. On dit que $f \in C^0(M, N)$ est de classe C^k si pour toute cartes (U, φ) de M et (V, ψ) de N on a que

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \rightarrow \psi(V \cap f(U))$$

est de classe C^k . Ceci n'a bien entendu de sens que si la variété est de classe C^r avec $k \leq r$. On note $C^k(M, N)$ l'ensemble des applications de classe C^k de M dans N . On note alors df la différentielle de f . On dit que f est une **immersion** si $df(x)$ est injective pour tout x . On dit que f est un plongement si c'est une immersion injective qui est un homéomorphisme sur son image.

Proposition 3.11. *Une immersion injective propre est un plongement. L'image d'un plongement dans \mathbb{R}^N est une sous-variété de \mathbb{R}^N . Si M est compacte, l'espace des plongements de M dans N est ouvert pour la topologie C^1 .*

Démonstration. Cela résulte immédiatement de la définition par nappes des sous-variétés. En effet, si f est un plongement, $x \in M$, (U, φ) est une carte au voisinage de x , il existe V voisinage de $f(x)$ dans \mathbb{R}^N tel que f soit un homéomorphisme de U sur $V \cap f(U)$. Alors $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow f(U) \cap V$ est une application de différentielle injective qui est bicontinue sur son image (par définition du plongement). L'ouverture est claire pour les immersions. Montrons là pour un plongement dans le cas compact. En effet, si $\lim f_n = f$ et f_n n'est pas injective, on a $f_n(x_n) = f_n(y_n)$. On peut par extraction supposer que les suites x_n, y_n convergent, et vers la même limite, sinon f ne serait pas injective. Alors $f_n(x_n) - f_n(y_n) - df(x_n)(x_n - y_n) = \varepsilon_n(|x_n - y_n|)|x_n - y_n|$ et divisant par $|x_n - y_n|$ et posant $v_n = \frac{x_n - y_n}{|x_n - y_n|}$ on voit que $df(x_n)v_n \rightarrow 0$ d'où en notant x_∞, v_∞ des valeurs d'adhérence de x_n, v_n on a $df(x_\infty)v_\infty = 0$. \square

On peut alors étendre aux variétés le théorème des partitions de l'unité. On notera qu'une somme convergente n'a qu'un nombre dénombrable de termes non nuls.

Théorème 3.12 (Partition de l'unité sur une variété (cas à support quelconque)). *Soit M une variété et $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ un recouvrement ouvert de M . Il existe alors une famille $(\rho_j)_j$ de fonctions de classe C^∞ telles que*

- (A) pour tout j $\text{supp}(\rho_j) \subset U_\alpha(j)$
- (B) $\forall x \in M, 0 \leq \rho_j(x) \leq 1$
- (C) $\forall x \in M, \sum_{j=1}^{+\infty} \rho_j(x) = 1$
- (D) Chaque point x de M a un voisinage qui ne rencontre qu'un nombre fini des supports de φ_j

Démonstration. On peut passer à un recouvrement plus fin, localement fini, dont chaque ouvert est contenu dans une carte. Soit $(U_j)_{j \in \mathbb{N}}$ un tel recouvrement, et V_j un sous recouvrement tel que $V_j \subset \bar{V}_j \subset U_j$. Via les cartes $\varphi_j : U_j \rightarrow \mathbb{R}^n$, on peut trouver des fonctions

f_j à support dans U_j telles que $f_j = 1$ sur V_j (cf. Corollaire 1.3 du chapitre 1). Alors $\varphi_j = \frac{f_j}{\sum_j f_j}$ vérifie les conditions du théorème.

□

Théorème 3.13 (Théorème de plongement de Whitney). *Soit M une variété de dimension n . Il existe alors un plongement de M dans un espace euclidien \mathbb{R}^N .*

Démonstration dans le cas compact. Soient (U_j, φ_j) des cartes telles que les ouverts U_j forment un recouvrement de M . On considère un sous-recouvrement V_j par des ouverts tels que $V_j \subset \bar{V}_j \subset U_j$ et une partition de l'unité χ_j subordonnée aux U_j . On pose alors $F(x) = (\chi_1(x), \dots, \chi_N(x), \chi_1(x)\varphi_1(x), \dots, \chi_N(x)\varphi_N(x))$. Cette application est bien définie, car le prolongement de $\chi_j \cdot \varphi_j$ par la fonction nulle en dehors de U_j est une fonction C^∞ . Maintenant en chaque point x , l'un des $\chi_j(x)$ est non nul, et l'image de $(d\chi_j(x), \varphi_j(x)d\chi_j(x) + \chi_j(x)d\varphi_j(x))$ est de rang n car si $d\chi_j(x)h = 0$ et $\varphi_j(x)d\chi_j(x)h + \chi_j(x)d\varphi_j(x)h = 0$ on en déduit $d\chi_j(x)h = 0$ pour $x \in V_j$ ce qui est impossible. Elle est injective, car si $F(x) = F(y)$ on doit avoir $\chi_j(x) = \chi_j(y)$, donc ils sont dans la même carte U_j et $\varphi_j(x) = \varphi_j(y)$, donc $x = y$. Maintenant une immersion injective dans le cas compact est un plongement, puisqu'elle est nécessairement propre.

□

Remarque 1.3. Dans le cas non compact, soit on plonge dans \mathbb{R}^N puis on projette sur un sous-espace de dimension finie, soit on utilise le théorème suivant

Proposition 3.14. *Soit M une variété de dimension n . Alors à tout recouvrement de M par des ouverts, il existe un sous-recouvrement plus fin $(V_j)_{j \in \mathbb{N}}$ tel que les intersections $\bigcap_{j \in J} V_j$ sont vides dès que $\text{card}(J) \geq n + 1$.*

1.4 Régularisation des variétés

Bien que cela ne semble pas évident à première vue, seules les notions de variété C^0 et de variété C^∞ sont à distinguer. En effet

Théorème 3.15. *Soit M une variété de classe C^r avec $r \geq 1$. Il existe alors une structure de variété C^∞ sur M unique à difféomorphisme C^∞ près, et compatible avec la structure C^r . En d'autres termes si $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ est une famille de cartes C^r et (V_β, ψ_β) est la famille de cartes C^∞ , les $(\psi_\beta \circ \varphi_\alpha)^{-1}$ sont de classe C^r , c'est-à-dire telle que toutes les cartes de la structure C^∞ sont aussi de classe C^r .*

Démonstration. D'après le résultat précédent, il suffit de considérer le cas où M est une sous-variété de classe C^r de \mathbb{R}^N . On va montrer qu'en bougeant un tout petit peu M , on peut la rendre C^∞ . La démonstration est basée sur le lemme d'approximation suivant

Lemme 3.16. Soient $U \subset \bar{U} \subset V$ et W des ouverts d'espace euclidiens et f une fonction C^r sur V . Soient $C_{(f,U)}^\infty(V,W)$ l'espace des fonctions qui coïncident avec f hors d'un voisinage de \bar{U} et sont C^∞ sur U . Alors $C_{(f,U)}^\infty(V,W)$ est dense dans $C_{(f,U)}^r(V,W)$ espace des fonctions C^r qui coïncident avec f hors d'un voisinage de \bar{U} .

Démonstration. La démonstration du lemme peut se faire par exemple par convolution avec une fonction plateau χ . On obtient une fonction g qui ne coïncide pas avec f hors d'un voisinage de \bar{U} , mais si ρ vaut 1 sur U et 0 hors d'un voisinage de \bar{U} , il suffit de prendre $g_\rho = \rho(x)f(x) + (1 - \rho(x))g(x) = f(x) + (1 - \rho(x))(g(x) - f(x))$. Comme $\|f - g\|_{C^r} \leq \varepsilon$ on a

$$\|g_\rho - f\|_{C^r} \leq \|(1 - \rho)(g - f)\|_{C^r} \leq C(\rho)\|g - f\|_{C^r}$$

□

Soit alors M^m une sous-variété C^r de \mathbb{R}^N . On la recouvre par des pavés, $(U_j, \varphi_j)_{j \in \{1, \dots, q\}}$, telles que sur chaque ouvert U_j , on a $U_j \cap M$ est le graphe d'une application C^r $f_j : V_j \rightarrow F_j^\perp$ où $V_j \subset F_j$, et F_j est un sous-espace vectoriel de dimension m . On suppose que M est écrit comme réunion croissante des K_j avec $K_j \subset K_{j-1} \cup U_j$. On raisonne alors par récurrence, en demandant que la modification M_{j-1} de M sur un voisinage de K_{j-1} vérifie

- (A) $M_{j-1} \subset \bigcup_l U_l$
- (B) M_{j-1} est suffisamment C^r petite (et ici il faut $r \geq 1$) pour que $M_{j-1} \cap U_k$ soit encore le graphe de \tilde{f}_k au dessus de V_k
- (C) M_{j-1} est C^∞ au voisinage de K_{j-1}

Si M_{j-1} est construite, on construit M_j comme suit. Comme $K_j \subset K_{j-1} \cup U_j$ et que $M_{j-1} \cap U_j$ est le graphe de \tilde{f}_j , le lemme permet de perturber \tilde{f}_j en une fonction g_j qui soit C^∞ sur V_j

Cette fonction est de classe C^∞ au voisinage de K_{j-1} et on peut donc l'approcher C^r par une fonction g_j qui coïncide avec \tilde{f}_j sur $\{x \mid (x, \tilde{f}_j(x)) \in K_{j-1}\}$ qui est C^∞ sur un voisinage de K_j et coïncide avec f_j hors de $\bigcup_{i=1..j} V_i$. Le graphe de g_j coïncide alors avec M_{j-1} et définit un

□

Remarque 1.4. Ne rêvons pas, cela ne signifie pas que toute fonction C^1 est C^∞

Soit maintenant $f \in C^0(M, N)$. On prétend que f s'approche par une application g de classe C^∞ , et que deux telles applications g_0, g_1 sont différentiablement homotopes, i.e. il existe une famille continue $g_t \in C^\infty(M, N)$ telle que $(x, t) \mapsto g_t(x)$ soit C^∞ .

Proposition 3.17. Soit $f \in C^0(M, N)$. Quel que soit $\varepsilon > 0$ il existe une application g de classe C^∞ , telle que $\|g - f\|_{C^0} \leq \varepsilon$ et que pour ε assez petit, deux telles applications g_0, g_1 sont différentiablement homotopes, i.e. il existe une famille $g_t \in C^\infty(M, N)$ telle que $(x, t) \mapsto g_t(x)$ soit C^∞ .

Démonstration. On suppose d'abord $N = \mathbb{R}$ auquel cas l'homotopie des applications sera évidente. Soit f à support dans une carte (U, φ) de M . Alors $\tilde{f} = f \circ \varphi^{-1}$ est définie sur $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$. On pose alors

$$\tilde{g}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x - y) \tilde{f}(\varphi^{-1}(y)) dy$$

où ρ est une fonction à support dans $B(0, \varepsilon)$ d'intégrale 1. En effet pour ε assez petit, le support de \tilde{g} est encore dans $\varphi(U)$ et donc $g(y) = g \circ \varphi(y)$ est bien défini de U dans V . Maintenant si f est quelconque, on écrit $f(x) = \sum_j \rho_j(x) f(x)$ et on applique le résultat précédent à $\rho_j(x) f(x)$. Maintenant si g_0, g_1 sont deux approximations de f , on a $g_t(x) = (1 - t)g_0(x) + tg_1(x)$. Si N est une variété

□

1.5 Exemples de variétés

Outre les sous-variétés, un exemple important de variété s'obtient en quotientant par l'action d'un groupe.

Proposition 3.18. *Soit G un sous-groupe discret du groupe des difféomorphismes de la variété M , agissant proprement et librement sur M . En d'autres termes*

- (A) (action libre) si $g \neq e$, on a $\forall x \in M, gx \neq x$
- (B) (action propre) Pour tout K compact de M , l'ensemble $\{g \in G \mid gK \cap K \neq \emptyset\}$ est fini

Alors le quotient de M par G a une structure de variété qui rend l'application $p : M \rightarrow M/G$ un difféomorphisme local.

Démonstration. Soit U un ouvert d'adhérence compacte, contenu dans une carte contenant x_0 . Quitte à restreindre U , on peut supposer que $gU \cap U = \emptyset$ pour tout g . On en déduit que $p : M \rightarrow M/G$ est un difféomorphisme de U sur $p(U)$ (seule l'injectivité est à vérifier, et elle résulte de ce que $p(x) = p(y) \Leftrightarrow \exists g, gx = y$) □

Soit G un groupe muni d'une structure de variété.

Définition 3.19. On dit que G est un groupe de Lie si l'application $(x, y) \mapsto x \cdot y^{-1}$ est C^∞ .

Proposition 3.20. *Soit G un groupe de Lie agissant librement sur M . On suppose que $\{(x, gx) \in M \times M \mid g \in G\}$ soit fermé, ce qui est en particulier le cas si G est compact. Alors le quotient de M par G a une structure de variété.*

Exemples 1.1. $SO(n, \mathbb{R}), U(n), GL(n, \mathbb{R}), SU(n)$ sont des groupes de Lie.

Exemple 1.2. (A) L'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ espace des droites vectorielles de \mathbb{R}^{n+1} peut être vu comme le quotient de S^n par l'action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ engendrée par $x \rightarrow -x$. L'espace tangent à D peut s'identifier D^\perp . En effet, une droite proche de D est caractérisée par son point d'intersection avec un espace affine de direction D^\perp ne passant pas par 0. On associe alors un chemin de droites, un chemin sur D^\perp passant par un point x_0 , et donc le vecteur tangent à ce chemin, contenu dans D^\perp . Choisir une autre carte, c'est choisir un autre supplémentaire de D , que l'on notera H et l'application $D^\perp \rightarrow H$ obtenue par projection de centre 0 est linéaire.

(B) La même construction fonctionne pour $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ (mais $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est remplacé par S^1). Alternativement on peut se donner des cartes de la manière suivante. Si D a pour vecteur directeur (z_0, \dots, z_n) et $z_j \neq 0$ il en sera de même pour les droites voisines, et on prend pour carte (U_j, φ_j)

$$(z_0, \dots, z_n) \longrightarrow \left(\frac{z_0}{z_j}, \frac{z_1}{z_j}, \dots, \frac{\widehat{z_j}}{z_j}, \dots, \frac{z_n}{z_j} \right) \in \mathbb{C}^j \times \{1\} \times \mathbb{C}^{n-j} \simeq \mathbb{C}^n$$

Les U_j recouvrent $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, et les changements de carte sont donnés par

$$(u_1, \dots, u_n) \longrightarrow \left(\frac{u_1}{u_k}, \dots, \frac{1}{u_k}, \dots, \frac{u_n}{u_k} \right)$$

où $\frac{1}{u_k}$ est en j -ème position.

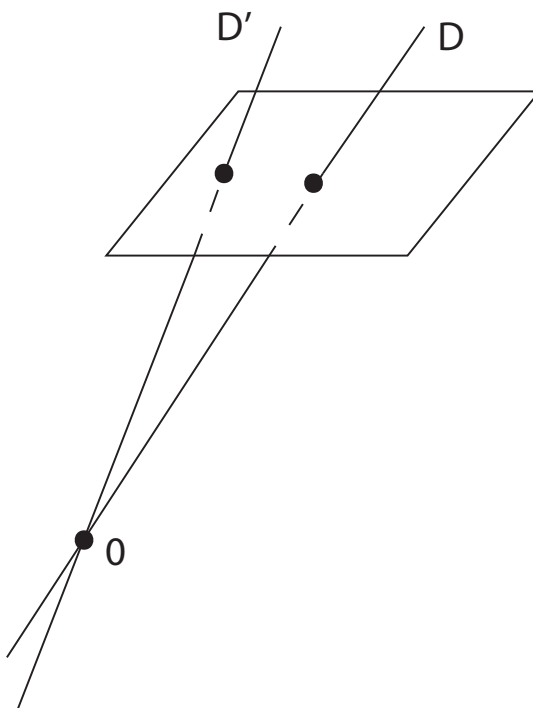


FIGURE 3.1 – Une carte de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$

- (C) Soit $G_k(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des k -sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n . Comme dans le cas du projectif, on prend pour carte au voisinage de L le point d'intersection de L' avec un espace affine ne passant pas par 0 de direction L^\perp .
- (D) $SO(3) \simeq \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$. En effet, à une rotation R d'angle $\theta \in [0, \pi]$ autour de l'axe D on associe le vecteur $v(R)$ de D tel que vu de $v(R)$ la rotation soit de θ dans le sens trigonométrique. Le seul cas d'ambiguïté est le cas où l'angle est π , auquel cas, la rotation dans le sens trigonométrique ou anti-trigonométrique d'angle π coïncident. On peut donc identifier $SO(3)$ à $B^3(0, \pi)/\simeq$ où on identifie les vecteurs de norme π à son opposé.
- (E) On considère l'ensemble des quaternions $a+bi+cj+dk$. La norme d'un tel quaternion est $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ et on considère l'ensemble des quaternions de norme 1. C'est bien entendu une sous-variété difféomorphe à S^3 . On considère alors l'action de ces quaternions unitaires sur \mathbb{R}^3 , identifié aux quaternions imaginaires, i.e. $\mathbb{R}^3 = \{bi+cj+dk \mid (b, c, d) \in \mathbb{R}^3\}$. Les quaternions de norme 1 agissent sur les quaternions imaginaires par $(x, u) \mapsto x^{-1} \cdot u \cdot x$. Cette action est par isométries, car $|x^{-1}ux| = |x^{-1}| \cdot |u| \cdot |x| = |u|$ et on vérifie que deux éléments induisent la même action si et seulement s'ils coïncident au signe près.

On obtient donc une action de $S^3/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ par isométries sur \mathbb{R}^3 . Pour montrer que l'on obtient tout $SO(3)$, on peut utiliser le fait que l'on a un morphisme de groupes $F : S^3 \rightarrow SO(3)$ dont le noyau est $\{\pm 1\}$. Si on montre qu'il contient un voisinage de 0, l'exercice (C) permet de conclure qu'il est surjectif. Notons que T_1S^3 s'identifie aux quaternions imaginaires et rappelons que $T_e(SO(3))$ est l'ensemble des applications antisymétriques de \mathbb{R}^3 .

Soit donc $dF(1)h = u \mapsto -hu + uh$ et l'application $u \mapsto uh - hu$ n'est nulle que si h commute à tous les quaternions imaginaires, donc si h est réel, mais comme h est imaginaire, on a $h = 0$. Donc l'image de F contient un voisinage de l'indemnité dans $SO(3)$ et comme c'est un morphisme de groupes, il doit contenir $SO(3)$ tout entier (cf. exercice (C))

1.6 Classification des variétés

Deux variétés sont dites équivalentes s'il existe un difféomorphisme global envoyant l'une sur l'autre. L'un des objectifs de la topologie différentielle était la classification des variétés, à difféomorphisme près. Une classification explicite est possible dans les cas suivants :

- (A) Dimension 1 : la seule variété compacte connexe de dimension 1 est le cercle. Il existe une seule autre variété connexe, non compacte de dimension 1 : \mathbb{R} .
- (B) Dimension 2 : la classification des surfaces compactes connexes est donnée par la sphère, le tore à g trous, le plan projectif, le plan projectif recollé avec un tore à g trous. Le cas non-compact est plus compliqué, car on peut avoir une infinité de trous, ainsi que des « pointes ».

- (C) Dimension 3 : G. Perelman a reçu la médaille Fields² en 2006 pour avoir montré que la seule variété compacte connexe de dimension 3 qui soit simplement connexe (c'est-à-dire que tout lacet se déforme continument en un lacet constant) est difféomorphe à la sphère de dimension 3, i.e.

$$S^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}$$

2 Exercices

- (A) Soit M une variété compacte de dimension n plongée dans \mathbb{R}^N avec $N > 2n + 1$. Considérons l'image $D(M)$ de l'application $M \times M \setminus \Delta \rightarrow \mathbb{P}^{N-1}(\mathbb{R})$ qui associe à (x, y) la droite passant par x et y . Soit $D'(M)$ l'ensemble des droites de contenues dans TM .
- (a) Montrer en utilisant le théorème de Sard que $D(M) \cup D'(M) \neq \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$
 - (b) Montrer que si D n'est pas dans $D(M) \cup D'(M)$, la projection sur \mathbb{R}^{N-1} parallèlement à D est un plongement.
 - (c) Montrer que M possède toujours un plongement dans \mathbb{R}^{2n+1} et une immersion dans \mathbb{R}^{2n} .

Un théorème de Whitney montre que M possède toujours un plongement dans \mathbb{R}^{2n} . Une conjecture affirme que toute variété de dimension $n \geq 2$ possède une immersion dans $\mathbb{R}^{2n-p(n)}$ où $p(n)$ est le nombre de 1 de l'écriture dyadique de n . Par exemple $n = 7$ s'écrit 111 en dyadique, et donc toute variété de dimension 7 s'immerge dans $\mathbb{R}^{14-3} = \mathbb{R}^{11}$.

- (B) Soit $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ l'espace projectif, c'est-à-dire l'espace des droites de \mathbb{R}^{n+1} . Montrer qu'il peut être muni d'une structure de variété en associant à une droite D dans un voisinage de la droite D_0 , le point d'intersection de D avec un hyperplan affine orthogonal à D_0 ne passant pas par 0.
- (C) Soit G un groupe topologique connexe qui est un espace métrique. Montrer que si U est un voisinage quelconque de l'identité, G est engendré par les éléments de U . Indication : montrer que l'ensemble des éléments s'écrivant comme produit (fini !) d'éléments de U est à la fois ouvert et fermé. En déduire que si G, H sont des groupes de Lie connexes, et $F : G \rightarrow H$ un morphisme de groupes C^∞ la surjectivité de $dF(e)$ entraîne celle de F .
- (D) Soit M une variété à bord. Définir le double de M , noté $D(M) = M \cup \overline{M}$, comme la réunion de deux copies de M identifiées le long de ∂M et définir dessus une structure de variété.

2. qu'il a refusée.

Chapitre 4

Formes différentielles, Formule de Stokes et Applications

Les formes différentielles interviennent dans plusieurs aspects des mathématiques et tout particulièrement en géométrie et systèmes dynamiques. Intuitivement, une forme différentielle a pour vocation de s'intégrer sur une sous-variété. Le lecteur a sans doute déjà vu de manière plus ou moins explicite les formes de degré 1 à l'occasion de l'étude des fonctions holomorphes (intégrale sur les chemins de $f(z)dz$). L'objet que l'on intègre doit avoir une intégrale ne dépendant pas de la paramétrisation du chemin.

Après avoir introduit le formalisme des formes différentielles, et de la différentielle extérieure, nous démontrons la formule de Stokes qui joue un rôle crucial, autant en mathématiques qu'en mécanique et en physique. Les applications sont alors nombreuses, mais nous insistons particulièrement sur celles de caractère topologique.

1 Formes différentielles

1.1 Algèbre extérieure

On note δ_j^k le symbole de Kroenecker, égal à 1 si $j = k$ et 0 sinon. On note $\mathfrak{S}(p)$ le groupe des permutations de p objets. On rappelle que ce groupe de cardinal $p!$ est engendré par les transpositions (i.e. permutation de $[1, \dots, p]$ échangeant deux éléments), et que la parité du nombre de transpositions nécessaire pour engendrer la permutation σ est un invariant de la permutation. La signature de σ , notée $\varepsilon(\sigma)$, vaut -1 si ce nombre est impair, $+1$ s'il est pair. L'application $\sigma \rightarrow \varepsilon(\sigma)$ est un morphisme du groupe $\mathfrak{S}(p)$ sur le groupe $(\{-1, +1\}, \times)$.

Soit E un espace vectoriel de dimension n sur \mathbb{R} . On note $(E^*)^{\otimes k}$ l'espace des formes k -linéaires, c'est-à-dire telle que pour tout $j \in [1, k]$, et quels que soient les vecteurs

$v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_k$ de E , l'application $v \longrightarrow \alpha(v_1, \dots, v_{j-1}, v, v_{j+1}, \dots, v_k)$ soit linéaire

Définition 4.1. On appelle forme extérieure de degré k une forme k -linéaire alternée sur E , c'est-à-dire une application $\alpha : E^k \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

(A) pour tout $j \in [1, k]$, et quels que soient les vecteurs $v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_k$ de E , l'application $v \longrightarrow \alpha(v_1, \dots, v_{j-1}, v, v_{j+1}, \dots, v_k)$ soit linéaire

(B) quels que soient les vecteurs v_1, \dots, v_k de E ,

$$\alpha(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, \dots, v_k) = -\alpha(v_1, \dots, v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_i, v_{j+1}, \dots, v_k).$$

On note $\Lambda^k(E^*)$ l'espace de ces formes.

Notons que la seconde condition entraîne que pour toute transposition τ ,

$$\alpha(v_{\tau(1)}, \dots, v_{\tau(k)}) = -\alpha(v_1, \dots, v_k)$$

Il en résulte que pour toute permutation σ

$$\alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = \varepsilon(\sigma)\alpha(v_1, \dots, v_k)$$

et que

$$\alpha(v_1, \dots, v_k) = 0$$

dès qu'il existe $i \neq j$ tels que $v_i = v_j$.

Pour un élément α de $(E^*)^{\otimes k}$ et une permutation σ on pose $\sigma^*(\alpha)(v_1, \dots, v_k) = \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})$. On obtient ainsi une représentation du groupe $\mathfrak{S}(k)$ sur $(E^*)^{\otimes k}$. Les formes alternées constituent le sous-espace sur lequel $\mathfrak{S}(k)$ agit comme la multiplication par $\varepsilon(\sigma)$.

Exemples 1.1. (A) Par convention, on pose $\Lambda^0(E^*) = \mathbb{R}$, ce qui est cohérent avec la convention $E^0 = \mathbb{R}$.

(B) Les formes linéaires (ou 1-linéaires) forment l'espace vectoriel dual de E noté E^* qui s'identifie à $\Lambda^1(E^*)$. Si (e_1, \dots, e_n) est une base de E on note (e_1^*, \dots, e_n^*) sa base duale, définie par

$$\forall j, k \in [1..n], e_j^*(e_k) = \delta_j^k$$

(C) Le déterminant de n vecteurs dans la base $e = (e_1, \dots, e_n)$ c'est-à-dire le déterminant de la matrice des coordonnées de ces vecteurs dans cette base, induit une forme n -linéaire alternée. On note \det_e cet élément de $\Lambda^n(E^*)$.

(D) Enfin si α est une forme multilinéaire non nécessairement alternée, il existe un opérateur de projection, P qui lui associe sa partie alternée. Il est naturellement donné par la formule

$$P(\alpha)(v_1, \dots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(k)} \varepsilon(\sigma) \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})$$

On vérifie aisément que $P(\alpha)$ est alternée, car si τ est une transposition,

$$P(\alpha)(v_{\tau(1)}, \dots, v_{\tau(k)}) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(k)} \varepsilon(\sigma) \alpha(v_{\sigma\tau(1)}, \dots, v_{\sigma\tau(k)})$$

et en faisant le changement de variable dans $\mathfrak{S}(k)$ donné par $\rho = \sigma\tau$ on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{k!} \sum_{\rho \in \mathfrak{S}(k)} \varepsilon(\rho\tau^{-1}) \alpha(v_{\rho(1)}, \dots, v_{\rho(k)}) &= \varepsilon(\tau^{-1}) \frac{1}{k!} \sum_{\rho \in \mathfrak{S}(k)} \varepsilon(\rho) \alpha(v_{\rho(1)}, \dots, v_{\rho(k)}) = \\ &= -\frac{1}{k!} \sum_{\rho \in \mathfrak{S}(k)} \varepsilon(\rho) \alpha(v_{\rho(1)}, \dots, v_{\rho(k)}) \end{aligned}$$

Définition 4.2. Le produit extérieur de deux formes extérieures α, β de degrés respectifs k, l est le produit de $\frac{(k+l)!}{k!l!}$ par la projection par P de leur produit usuel. C'est donc la forme de degré $k+l$ donnée par la formule

$$(\alpha \wedge \beta)(v_1, \dots, v_{k+l}) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(k+l)} \varepsilon(\sigma) \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \beta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)})$$

On verra ultérieurement la raison de cette normalisation étrange. Notons tout de même que l'on peut aussi écrire

$$(\alpha \wedge \beta)(v_1, \dots, v_{k+l}) = \sum_A \varepsilon(\sigma) \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \beta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)})$$

où A est l'ensemble des permutations vérifiant $\sigma(1) < \dots < \sigma(k), \sigma(k+1) < \dots < \sigma(k+l)$. Notons que toute permutation se ramène à un élément de A par composition avec une permutation de $\{1, \dots, k\}$ et une permutation de $\{k+1, \dots, k+l\}$.

Proposition 4.3 (Structure de l'algèbre des formes alternées).

Soit $\alpha \in \Lambda^k(E^*), \beta \in \Lambda^l(E^*)$

(A) (Anti-commutativité) On a

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{k \cdot l} \beta \wedge \alpha$$

(B) (Associativité)

$$\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$$

(C) L'espace vectoriel $\Lambda^p(E^*)$ est engendré par les éléments $e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_p}^*$ où $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$. En particulier sa dimension est égale au coefficient binomial C_n^p (elle est nulle pour $p > n$).

(D) L'algèbre $\Lambda^\bullet(E^*) = \sum_p \Lambda^p(E^*)$ munie de l'addition et du produit extérieur est une algèbre engendrée par les e_i^* .

Remarques 1.1. (A) Attention : dire qu'une algèbre est engendrée par des éléments e_i^* signifie que tout élément est somme de produits des e_i^* .

(B) L'espace des formes de degré n est de dimension un. Il est engendré par le déterminant associé à une base donnée, $e = (e_1, \dots, e_n)$. On appellera **forme déterminant** une telle forme non-nulle.

L'application $\det_e(v_1, \dots, v_n)$ s'écrit avec les notations précédentes

$$\det_e = e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^*$$

qui résulte de la formule

$$\det_e(v_1, \dots, v_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(n)} e_1^*(v_{\sigma(1)}) \dots e_n^*(v_{\sigma(n)})$$

Pour vérifier que deux formes volumes sont égales, il suffit de vérifier qu'elle prennent la même valeur sur une base bien choisie.

Démonstration. Tout d'abord on voit aisément, en écrivant chaque vecteur dans la base, que la forme α est déterminée par les nombres $\alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$. Puisque α s'annule sur un p -uplet de vecteurs dont deux sont égaux, et $\alpha(e_{i_{\sigma(1)}}, \dots, e_{i_{\sigma(p)}}) = \varepsilon(\sigma)\alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$, la donnée des $\alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$ pour $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$ détermine α , car on peut toujours trouver une permutation ordonnant les indices.

La forme $e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_p}^*$ vaut $\varepsilon(\sigma)$ sur $e_{i_{\sigma(1)}}, \dots, e_{i_{\sigma(p)}}$ pour σ dans $\mathfrak{S}(p)$ et 0 sur les autres p -uplets de vecteurs de base. Si α est une p -forme et on note $c_{i_1, \dots, i_p} = \alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$ pour $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$ on aura

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} c_{i_1, \dots, i_p} e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_p}^*$$

puisque les deux formes coïncident sur les p -uplets $(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$ pour $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$.

Cela démontre la propriété (C) et il suffit de vérifier (A) et (B) pour des formes du type $e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_p}^*$, ce qui est laissé au lecteur.

□

Nous pouvons maintenant définir la notion de forme induite par une application linéaire. Il est clair que si f est une application linéaire et α une forme multilinéaire (pas nécessairement alternée) on peut définir $f^*(\alpha)$ par $f^*(\alpha)(v_1, \dots, v_k) = \alpha(f(v_1), \dots, f(v_k))$. Cette opération envoie les formes alternées sur des formes alternées. On a donc

Définition 4.4. Si $f : E \rightarrow F$ est une application linéaire, elle induit une application linéaire

$$\Lambda^k f : \Lambda^k(F^*) \rightarrow \Lambda^k(E^*)$$

(attention, $\Lambda^k f^*$ va dans le sens inverse de celui de f) aussi notée f^* , donnée par la formule

$$f^*(\alpha)(v_1, \dots, v_k) = \alpha(f(v_1), \dots, f(v_k))$$

On notera que la forme induite sur un sous-espace de dimension k par une forme de degré k est soit nulle, soit une forme volume¹ de dimension k . C'est sa principale propriété. On a aussi que si f est bijective,

$$f^* \det_{f(e)} = \det_e$$

(si f n'est pas bijective, $f^* \det_e = 0$). Si f est un endomorphisme, vu que l'application $\Lambda^n f$ est un endomorphisme d'un espace de dimension un, il existe un unique réel noté $\det(f)$ tel que

$$f^* \det_e = \det(f) \det_e$$

Notons que $\det(f)$ ne dépend pas du choix d'une base.

Remarque 1.1. (A) Dans un espace vectoriel on dit de deux bases définissent la même orientation si le déterminant de l'une dans l'autre base est positif. Sinon, elles définissent des orientations opposées. Une orientation de l'espace est le choix d'une des deux classe d'équivalence pour la relation « avoir même orientation ». Lorsque l'espace est muni d'un produit scalaire, on peut choisir une base orthonormée orientée, et on note \det la forme multilinéaire donnée par le déterminant dans cette base. Il est défini de manière unique. Par exemple dans \mathbb{R}^n on choisit l'orientation associée à la base canonique.

(B) Dans un espace euclidien de dimension 3, à tout vecteur v on associe la 1-forme $\alpha_v = \langle v, \bullet \rangle$ et la 2 forme $\Omega_v = \det(v, \bullet, \bullet)$. Les applications $v \rightarrow \alpha_v$ et $v \rightarrow \Omega_v$ sont injectives, donc par raison de dimension bijectives. Les formes de degré 1 ou 2 se paramètrent donc par des vecteurs.

Proposition 4.5. *On a les propriétés suivantes*

(A)

$$f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*(\alpha) \wedge f^*(\beta)$$

(B)

$$(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$$

Démonstration. Pour la première propriété, il suffit de montrer que $f^*P(\alpha) = P(f^*(\alpha))$ car alors

$$f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*\left(\frac{(k+l)!}{k!l!}P(\alpha \cdot \beta)\right) = \frac{(k+l)!}{k!l!}P(f^*(\alpha \cdot \beta)) = \frac{(k+l)!}{k!l!}P(f^*(\alpha) \cdot f^*(\beta)) = f^*(\alpha) \wedge f^*(\beta)$$

Mais on voit que

1. i.e. si $f : V \rightarrow E$ est linéaire injective et $\dim(V) = k$, $f^*(\alpha)$ est une forme volume.

$$f^*P(\alpha)(v_1, \dots, v_k) = f^* \left(\frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(k)} \varepsilon(\sigma) \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \right) =$$

$$\frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(k)} \alpha(f(v_{\sigma(1)}), \dots, f(v_{\sigma(k)})) = P(f^*(\alpha))(v_1, \dots, v_k)$$

La seconde n'est rien d'autre qu'une réécriture. □

Exercice 1.1. (A) Montrer que $f^*(\alpha_v) = \alpha_{t_{f(v)}}$ et $f^*(\Omega_v) = \det(f)\Omega_{f^{-1}(v)}$ (si f est inversible, et 0 sinon).

(B) Montrer que si on note $v \wedge w$ le produit vectoriel usuel² dans \mathbb{R}^3 , on a

$$\alpha_v \wedge \alpha_w = \Omega_{v \wedge w}$$

et que

$$\alpha_v \wedge \Omega_w = \langle v, w \rangle \det$$

(il suffit de vérifier les deux égalités avec des vecteurs choisis parmi $v, w, v \wedge w$).

1.2 Formes différentielles sur les variétés

De même que le déterminant de n vecteurs mesure le volume (n dimensionnel) du parallélépipède engendré par ces vecteurs dans l'espace de dimension n , et intervient crucialement dans la formule des changements de variable en théorie de l'intégration, les formes de degré k vont jouer le même rôle lorsqu'on voudra intégrer sur une sous-variété de dimension k .

Pour cela il faut d'abord définir les formes différentielles. On se contentera ici de formes de classe C^∞ , le cas C^r ne présentant pas de difficultés. Commençons par le cas d'un ouvert d'un espace vectoriel.

Définition 4.6. [Forme différentielle sur un ouvert de \mathbb{R}^n]

(A) Une forme différentielle de degré k et de classe C^∞ sur un ouvert U de E est une application de classe C^∞ de U dans $\Lambda^k(E^*)$. On note $\Omega^k(U)$ l'espace des formes différentielles C^∞ de degré k définies sur U .

(B) Si φ est une application C^∞ , définie sur un ouvert U de E à valeurs dans un ouvert V de F , on lui associe une application $\varphi^* : \Omega^k(V) \rightarrow \Omega^k(U)$ donnée par

$$\varphi^*(\alpha)(x)(\xi_1, \dots, \xi_k) = \alpha(\varphi(x))(d\varphi(x)\xi_1, \dots, d\varphi(x)\xi_k)$$

2. Ce produit est uniquement déterminé dans un espace euclidien de dimension 3 par la formule $\det(u, v, w) = \langle u, v \wedge w \rangle$.

Définition 4.7 (Formes différentielles sur une variété). Soit M une variété. Une forme différentielle de degré k sur M est une application qui à chaque point x de M associe un élément de $\Lambda^k(T_x^*(M))$. On dit qu'une telle forme est de classe C^∞ si pour chaque carte locale, la forme $(\varphi^{-1})^*(\alpha)$ est de classe C^∞ . On note $\Omega^k(M)$ l'espace des formes différentielles C^∞ de degré k .

Enfin nous pouvons définir :

Définition 4.8 (Forme induite par une application différentiable). Si $\varphi : M \rightarrow N$ est une application C^∞ entre variétés, on note φ^* l'application de $\Omega^*(N)$ vers $\Omega^*(M)$ donnée par

$$\varphi^*(\alpha)(x)(\xi_1, \dots, \xi_k) = \alpha(\varphi(x))(d\varphi(x)\xi_1, \dots, d\varphi(x)\xi_k)$$

Remarque 1.2. Dire que α est une k -forme de classe C^∞ signifie donc que si φ est une carte locale, la forme

$$(\varphi^{-1})^*(\alpha)(\xi_1, \dots, \xi_k) = \alpha(\varphi^{-1}(x))(d\varphi^{-1}(x)\xi_1, \dots, d\varphi^{-1}(x)\xi_k)$$

est une forme de degré k de classe C^∞ (i.e. ses coefficients sont de classe C^∞) sur \mathbb{R}^n .

Enfin il suffit de vérifier la régularité, avec une carte locale : si $(\varphi^{-1})^*(\alpha)$ est à coefficients C^∞ , et si ψ est une autre carte, $\psi^{-1}(\alpha)$ sera aussi C^∞ , car

$$(\psi^{-1})^*(\alpha) = (\varphi \circ \psi^{-1})^*(\varphi^{-1})^*(\alpha)$$

Exemples 1.2. (A) Si ω est une k -forme différentielle sur \mathbb{R}^n et M une sous-variété de \mathbb{R}^n , alors ω induit de manière évidente une k -forme sur M , qui est égale à $i^*(\omega)$, où $i : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ est l'injection de M dans \mathbb{R}^n .

(B) Soit \tilde{f} une fonction de classe C^∞ sur \mathbb{R}^n . Soit f sa restriction à la sous-variété M . Alors $d\tilde{f}(x)$ est une forme linéaire sur \mathbb{R}^n , dont la restriction à $T_x M$ ne dépend que de f et non du choix de l'extension \tilde{f} . En effet, il suffit de vérifier que si f est identiquement nulle, alors $d\tilde{f}(x)$ s'annule sur $T_x M$ pour tout x de M . Mais une carte nous ramène au cas $M = \mathbb{R}^k \times \{0\}$, auquel cas cela revient à vérifier que si \tilde{f} est nulle sur $x_{k+1} = \dots = x_n = 0$ alors $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) = 0$ pour tout j inférieur à k , ce qui est évident. On note $df(x)$ la 1-forme différentielle ainsi définie.

(C) Si $\alpha = f(x)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ et φ est un difféomorphisme de \mathbb{R}^n , on a

$$\varphi^*(\alpha) = f(\varphi(x)) \det(d\varphi(x)) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

2 Orientation, différentielle, Formule de Stokes

2.1 Variétés orientées

La différentielle extérieure, dont la définition peut sembler étrange, est faite pour vérifier la formule de Stokes. Celle-ci joue le rôle, en dimension supérieure, de la formule

d'intégration par parties. Avant d'énoncer la formule de Stokes, nous devons définir la notion de variété orientée.

Afin d'intégrer une forme différentielle sur une variété, nous aurons besoin de la notion d'orientation d'une variété.

Définition 4.9. Soit M une variété. On dit que M est une variété (à bord), orientable, si et seulement si on peut choisir un sous ensemble de l'ensemble des cartes tel que pour deux cartes φ, ψ définies sur des voisinages de x_0 , $U \cap M$ et $V \cap M$, $d(\varphi \circ \psi^{-1})(x_0)$ a un déterminant positif. Le choix d'un tel sous-ensemble de cartes s'appelle une **orientation** de M .

Remarque 2.1. Si M est orientable, il est clair qu'elle possède (au moins) deux orientations. Ces deux orientations sont dites opposées. Si M est connexe elle en possède exactement deux, sinon, elle en possède 2^c où c est le nombre de composantes connexes.

Une définition équivalente de l'orientabilité est la possibilité de choisir en chaque point de M une orientation de $T_x M$ de manière à ce que cette orientation « varie de manière continue ». En d'autres termes

Définition 4.10. Une orientation des espaces $T_x M$ est dite « continue » si la condition suivante est vérifiée. Pour chaque n -uplet de champs de vecteurs définis au voisinage de x_0 et linéairement indépendants en x_0 tels que $(X_1(x_0), \dots, X_n(x_0))$ définisse une base positivement orientée de $T_{x_0} M$ alors pour x voisin de x_0 , les $(X_1(x), \dots, X_n(x))$ définissent encore une base positivement orientée pour $T_x M$.

Proposition 4.11. *La variété M possède une orientation continue de son espace tangent, si et seulement si elle est M orientable.*

Démonstration. Soit t une symétrie hyperplane (donc renversant l'orientation) de \mathbb{R}^n . Soit φ une carte définie sur un ouvert connexe. Alors soit φ soit $t \circ \varphi$ ont la propriété suivante :

$d\varphi(x_0) : T_x M \rightarrow \mathbb{R}^n$ envoie une base positivement orientée de $T_x M$ sur une base positivement orientée de \mathbb{R}^n .

Cela est clair pour un point x_0 , et comme $\det(d\varphi(x)X_1(x), \dots, d\varphi(x)X_n(x))$ varie continûment sur un ouvert connexe sans s'annuler, son signe est constant.

Cela donne pour chaque ouvert de carte une application φ , il reste à vérifier que si φ est définie sur U et ψ sur V , alors $\varphi \circ \psi^{-1}$ a un déterminant positif. Mais en $x_0 \in U \cap V$, $d\varphi(x_0)$ et $d\psi(x_0)$ envoient une base positivement orientée de $T_{x_0} M$ sur une base positivement orientée de \mathbb{R}^n . On en déduit que le déterminant de $d(\varphi \circ \psi^{-1})(\psi(x_0)) = d\varphi(x_0) \circ d\psi(x_0)^{-1}$ est positif. \square

Exemple 2.1. (A) On peut montrer qu'une hypersurface compacte sans bord de \mathbb{R}^n possède toujours un intérieur et un extérieur (mais ce théorème requiert des bases de la théorie de l'homologie). Elle est donc orientable. En effet, soit $\nu(x)$ la normale extérieure en x . Une base de $T_x M$ sera dite positivement orientée si la base de \mathbb{R}^n

donnée par $(\nu(x), X_1(x), \dots, X_{n-1}(x))$ est positivement orientée dans \mathbb{R}^n . On vérifie aisément que cela fournit une orientation continue de $T_x M$ en utilisant la continuité du déterminant et le fait qu'une base est positivement orientée si et seulement si $\det((\nu(x), X_1(x), \dots, X_{n-1}(x))) > 0$.



FIGURE 4.1 – Un exemple de surface non-orientable : le ruban de Möbius

- (B) Si $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ est un chemin, et si on se donne une orientation de $T_{\gamma(0)}M$ il existe une unique manière de prolonger cette orientation à $T_{\gamma(t)}M$.
- (C) Le ruban de Möbius est une variété à bord non orientable. En effet posons

$$F(r, \theta) = ((1 + r \cos(\theta/2)) \cos(\theta), (1 + r \cos(\theta/2)) \sin(\theta), r \sin(\theta/2))$$

soit

$$M = \{F(r, \theta) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, -1/2 \leq r \leq 1/2\}$$

Il est facile de construire une base de $T_z M$ dépendant continûment de θ le long de $z = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0)$ qui change d'orientation lorsque θ varie de 0 à 2π . En effet les vecteurs $\frac{\partial F}{\partial \theta}(0, \theta), \frac{\partial F}{\partial r}(0, \theta)$ forment une base de $T_{F(0, \theta)}M$ mais $\frac{\partial F}{\partial \theta}(0, 0) = \frac{\partial F}{\partial \theta}(0, 2\pi)$, alors que $\frac{\partial F}{\partial r}(0, 0) = -\frac{\partial F}{\partial r}(0, 2\pi)$.

Proposition 4.12. *Si M est une variété à bord orientée, ∂M est une variété (sans bord) orientée.*

Démonstration. On voit en utilisant une carte locale que si x est un point du bord, $T_x M$ est divisé en deux demi-espaces. On appelle demi-espace intérieur (resp. extérieur) le demi-espace $d\varphi(x)^{-1}(\mathbb{R}^{p-1} \times \mathbb{R}_- \times \{0\})$ (resp. $d\varphi(x)^{-1}(\mathbb{R}^{p-1} \times \mathbb{R}_+ \times \{0\})$). Cela permet de diviser les vecteurs non tangents à ∂M en deux classes : les vecteurs pointant vers l'extérieur et ceux pointant vers l'intérieur de M . Les seconds sont par exemple vecteurs

tangents en 0 à une courbe $c(t)$ telle que $c(0) = x$ et $c(t) \in M$ pour $t > 0$. Soit alors v un vecteur sortant. On dira d'une base (e_1, \dots, e_{n-1}) de $T_x \partial M$ qu'elle est positivement orientée si la base (v, e_1, \dots, e_{n-1}) de $T_x M$ l'est aussi. Cela fournit une orientation continue de $T_x \partial M$, qui d'après la proposition 4.11 est donc orientable. \square

2.2 Intégration des formes différentielles, formule de Stokes

Commençons par intégrer des formes à support compact sur \mathbb{R}^n .

Définition 4.13. Soit α une forme de degré n sur \mathbb{R}^n à support compact. Elle peut s'écrire

$$\alpha = f(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

On pose alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} \alpha = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

Ici $dx_1 \dots dx_n$ est la mesure de Lebesgue³ pour laquelle le parallélépipède de côtés e_j a volume 1.

La formule du changement de variable devient alors

Proposition 4.14. Soit φ un difféomorphisme de \mathbb{R}^n préservant l'orientation, et α une forme de degré n sur \mathbb{R}^n . Alors on a la formule de changement de variable

$$\int_{\mathbb{R}^n} \alpha = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^*(\alpha)$$

Démonstration. La formule n'est rien d'autre que la traduction de la formule du changement de variable dans les intégrales multiples.

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\varphi(x_1, \dots, x_n)) |\det(d\varphi(x_1, \dots, x_n))| dx_1 \dots dx_n = \int_{\mathbb{R}^n} f(y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n$$

En effet si φ préserve l'orientation, le déterminant de $d\varphi$ est positif, et donc

$$\begin{aligned} \varphi^*(\alpha) &= f(\varphi(x_1, \dots, x_n)) \det(d\varphi(x_1, \dots, x_n)) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \\ &= (\varphi(x_1, \dots, x_n)) |\det(d\varphi(x_1, \dots, x_n))| dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \end{aligned}$$

\square

L'intégration sur une variété orientée peut alors se définir en utilisant le théorème d'existence des partitions de l'unité (théorème 3.12 du chapitre 3)

3. Notons que l'on n'intégrera que des fonctions C^∞ à support compact. La question de la mesurabilité ou de l'intégrabilité de f ne se pose donc pas.

Définition 4.15. Soit M une variété orientée de dimension k et ω une k -forme. On se donne une partition de l'unité ρ_j subordonnée à un recouvrement par des cartes φ_j , préservant l'orientation. On pose

$$\int_M \omega = \sum_{j=1}^q \int_{\varphi_j(U_j)} (\varphi_j^{-1})^*(\rho_j \omega)$$

Bien entendu il faut vérifier que cette définition ne dépend ni du choix des cartes ni de la partition de l'unité. Nous omettons ici cette vérification. Elle résulte immédiatement du fait que si ρ_j est une partition de l'unité subordonnée à U_j et σ_k subordonnée à V_k , alors $\rho_j \cdot \sigma_k$ est subordonnée à $U_j \cap V_k$.

On a

$$\sum_j \int_{\varphi_j(U_j)} (\varphi_j^{-1})^*(\rho_j \omega) = \sum_j \sum_k \int_{\varphi_j(U_j \cap V_k)} \sigma_k \circ \varphi_j^{-1} (\varphi_j^{-1})^*(\rho_j \omega)$$

car $\sum_j \sigma_k \circ \varphi_j^{-1} = 1$ sur $\varphi_j(U_j)$. La somme ci-dessus égale

$$\begin{aligned} \sum_j \sum_k \int_{\varphi_j(U_j \cap V_k)} (\varphi_j^{-1})^*(\sigma_k \rho_j \omega) &= \sum_j \sum_k \int_{\psi_k(U_j \cap V_k)} (\psi_k^{-1} \circ \varphi_j)^*(\varphi_j^{-1})^*(\sigma_k \rho_j \omega) = \\ &= \sum_j \sum_k \int_{\psi_k(U_j \cap V_k)} (\psi_k^{-1})^*(\sigma_k \rho_j \omega) = \sum_k \int_{\psi_k(V_k)} (\psi_k^{-1})^*(\sigma_k \omega) \end{aligned}$$

Exemples 2.1. (A) Une forme de degré 1 sur le plan est donnée par $\alpha = f(x, y)dx + g(x, y)dy$. Son intégrale le long d'un chemin $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, défini par $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ est l'intégrale sur $[0, 1]$ de

$$\gamma^* \alpha = [f(x(t), y(t))x'(t) + g(x(t), y(t))y'(t)]dt$$

2.3 Différentielle extérieure

On utilise désormais sur \mathbb{R}^n la notation classique dx_j pour e_j^* . Ceci se justifie par le fait que la différentielle de la coordonnée x_j est la forme linéaire e_j^* . Une forme linéaire α sur \mathbb{R}^n s'écrira donc sous la forme d'une combinaison linéaire de termes de la forme $f(x)dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$.

Définition 4.16 (Différentielle extérieure). Si $\alpha = f(x)dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ on pose

$$d\alpha = df(x) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = \sum_{j \neq i_1, \dots, i_k}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

Proposition 4.17. La définition ci-dessus définit de manière cohérente et unique l'opérateur d . Cet opérateur vérifie les propriétés suivantes

(A) d est une application linéaire de $\Omega^p(\mathbb{R}^n)$ dans $\Omega^{p+1}(\mathbb{R}^n)$

(B) $d \circ d = 0$

(C)

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg(\alpha)} \alpha \wedge d\beta$$

(D) Pour toute paire d'ouverts de \mathbb{R}^n , U, V et toute application C^∞ , $\varphi : U \rightarrow V$ on a $d(\varphi^*(\alpha)) = \varphi^*(d\alpha)$.

Démonstration. L'unicité est évidente, car prenant pour φ une permutation des coordonnées, on définit la différentielle de $f(x)dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ et par linéarité cela définit de manière unique la différentielle de toute forme. La propriété (A) est évidente. Les autres propriétés sont linéaires et invariantes par permutation des coordonnées et il suffit de les vérifier sur les formes du type $f(x)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$. Pour (B)

$$d(f(x)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k) = \sum_{j=k+1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) dx_j \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$$

(car les autres termes sont nuls) Donc

$$\begin{aligned} d(d(f(x)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k)) &= d\left(\sum_{j=k+1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) dx_j \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k\right) = \\ &= \sum_{l=k+1}^n \sum_{j=k+1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_l}(x) dx_l \wedge dx_j \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k \end{aligned}$$

Dans cette somme les termes contenant $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_l}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_j}$, qui sont égaux d'après le lemme de Schwarz apparaissent avec des signes opposés. Leur somme est donc nulle.

Il suffit de vérifier le point (C) pour des formes du type $\alpha = f(x)dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$ et $\beta = g(x)dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_q}$. Or

$$d\alpha = df(x) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

$$d\beta = dg(x) \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_q}$$

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge \beta) &= d(fg)(x) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_q} = \\ &= (f(x)dg(x) + g(x)df(x)) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_q} = \\ &= df(x) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \wedge g(x)dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_q} + (-1)^p f(x)dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \wedge dg(x) \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_q} = \\ &= \alpha \wedge d\beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta \end{aligned}$$

Pour le point (D), il suffit de le vérifier pour les 0-formes (i.e. les fonctions) auquel cas

$$d(\varphi^*(f))(x)(\xi) = d(f \circ \varphi)(\xi) = df(\varphi(x))d\varphi(x)\xi = (\varphi^*(df))(x)(\xi)$$

Dans le cas général, on utilise la propriété que toute forme ω sur \mathbb{R}^n est somme de termes du type $\alpha \wedge d\beta$ avec α, β de degré strictement inférieur à celui de ω : par exemple $f(x)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k = f(x)dx_1 \wedge (d(x_2dx_3 \wedge \dots \wedge dx_k))$.

Maintenant

$$\varphi^* d(\alpha \wedge d\beta) = \varphi^* d(\alpha) \wedge \varphi^*(d\beta) = d\varphi^*(\alpha) \wedge d\varphi^*(\beta)$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence. Ce dernier terme est égal à

$$d\varphi^*(\alpha) \wedge d\varphi^*(\beta) = d(\varphi^*(\alpha) \wedge \varphi^*(d\beta)) = d(\varphi^*(\alpha \wedge d\beta))$$

□

On étend d en une application linéaire de $\Omega^k(M)$ dans $\Omega^{k+1}(M)$ en utilisant une partition de l'unité subordonnée à des cartes. Si (U_j, φ_j) est un recouvrement par des cartes, et ρ_j une partition de l'unité subordonnée aux U_j , on pose

$$d\alpha = \sum_j d(\rho_j \alpha) = \sum_j (\varphi_j)^* d((\varphi_j^{-1})^*(\rho_j \alpha))$$

Proposition 4.18. *La définition ci-dessus définit de manière cohérente et unique l'opérateur d . Cet opérateur vérifie les propriétés suivantes*

(A) *d est une application linéaire de $\Omega^p(M)$ dans $\Omega^{p+1}(M)$*

(B) *$d \circ d = 0$*

(C)

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg(\alpha)} \alpha \wedge d\beta$$

(D) *Si M, N sont des variétés, pour toute application C^∞ , $\varphi : M \rightarrow N$ on a $d(\varphi^*(\alpha)) = \varphi^*(d\alpha)$.*

On aurait alternativement pu définir d comme l'unique opérateur linéaire qui correspond à la différentielle sur $\Omega^0(M)$ et vérifie $d^2 = 0$ et $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg(\alpha)} \alpha \wedge d\beta$.

Remarque 2.2. On a vu que dans un espace de dimension 3 muni d'un produit scalaire, à tout champ de vecteurs X on peut associer la 1-forme $\alpha_X(v) = \langle X(x), v \rangle$ et la 2-forme $\Omega_X(v, w) = \det(X(x), v, w)$. Alors notant Ω la forme volume, on a

$$d\alpha_X = \Omega_{\nabla \wedge X}, d\Omega_X = (\nabla \cdot X)\Omega$$

où $\nabla \wedge, \nabla \cdot$ sont respectivement les opérateurs de rotationnel et de divergence. La propriété (D) de la proposition, fort simple pour les formes différentielles, devient compliquée pour les opérateurs définis sur les champs de vecteurs, car $d\varphi$ ne préserve en général pas le produit scalaire. C'est ce qui explique le comportement délicat du rotationnel et de la divergence par changement de coordonnées.

Exercice 2.1. Retrouver les formules sur $\operatorname{div} \operatorname{rot}(X)$, $\operatorname{rot} \operatorname{grad}(f)$, $\operatorname{grad}(fg)$, $\operatorname{div}(fv)$, $\operatorname{rot}(fw)$ où f, g sont des fonctions et v, w des champs de vecteurs en utilisant la propriété (C) de la proposition 4.17.

Les formes différentielles fournissent un moyen compact de réécrire les équations de Maxwell. Si $E = (E_x, E_y, E_z)$ sont les composantes du champ électrique, $B = (B_x, B_y, B_z)$ celles du champ magnétique, on associe au champ électromagnétique la 2-forme F , définie sur l'espace-temps en coordonnées (x, y, z, t)

$$F = \frac{1}{c}(E_x dx \wedge dt + E_y dy \wedge dt + E_z dz \wedge dt) + B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy$$

Les équations de Maxwell dans le vide entraînent que

$$dF = 0$$

puisque

$$\begin{aligned} dF = & \frac{1}{c} \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} - c \frac{\partial B_z}{\partial t} \right) dy \wedge dx \wedge dt + \frac{1}{c} \left(\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} - c \frac{\partial B_x}{\partial t} \right) dz \wedge dy \wedge dt + \\ & \frac{1}{c} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} - c \frac{\partial B_y}{\partial t} \right) dx \wedge dz \wedge dt + \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned}$$

Ce qui se réécrit

$$-\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{1}{c} \nabla \wedge E ; \quad \nabla \cdot B = 0$$

les autres équations de Maxwell peuvent s'écrire sous la forme $d\star F = 0$ où \star est l'opérateur qui échange d'une part $dx \wedge dy$ et $dz \wedge dt$, et d'autre part $dx \wedge dz$ et $dy \wedge dt$, etc. (opérateur qui dépend du choix du produit scalaire).

Enfin, si on note A le potentiel vecteur du champ magnétiques, V le potentiel scalaire du champ électrique, et $\Phi = A_x dx + A_y dy + A_z dz + \frac{1}{c} V dt$ on a $d\Phi = F$.

Nous pouvons maintenant démontrer

Théorème 4.19 (Formule de Stokes). *Soit ω une forme différentielle de degré $n - 1$ définie sur la variété orientée M de dimension n . Alors*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

Démonstration. Tout d'abord le théorème est linéaire : si $\omega = \sum_{j=1}^r \omega_j$ il suffit de démontrer le théorème pour chaque ω_j . On peut donc, par partition de l'unité et changement de variable, se ramener au cas où ω est à support compact soit dans \mathbb{R}^n soit dans \mathbb{H}^n . On peut toujours ramener le premier cas au second par translation. Nous allons donc nous limiter au second cas.

La forme ω est soit du type $f(x_1, \dots, x_n) dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$ soit du type

$$f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \dots \wedge dx_n$$

Dans le premier cas,

$$d\omega = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$$

et

$$\begin{aligned} \int_{\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}} \omega &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) dx_1 \dots dx_n = \\ \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^0 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) dx_1 \right) dx_2 \dots dx_{n-1} dx_n &= \int_{\mathbb{H}^n} d\omega \end{aligned}$$

Dans le second cas,

$$d\omega = (-1)^j \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1} \wedge dx_n$$

$$\int_{\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}} \omega = 0$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{H}^n} d\omega &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) dx_1 \right) dx_2 \dots dx_n = \\ \int_{\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{n-2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_n) dx_j \right) dx_1 \dots dx_{j-1} dx_{j+1} \dots dx_n \end{aligned}$$

Comme f est à support compact, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_n) dx_j$ s'annule, et l'intégrale ci-dessus est nulle.

On a donc vérifié la formule de Stokes dans les deux cas, ce qui termine la démonstration. \square

Remarque 2.3. La régularité demandée à ω ou M est souvent trop importante pour les applications. Il suffit par exemple que M soit réunion finie de variétés à bord.

Exercice 2.2. Montrer que si K est l'intérieur du cube de dimension n (i.e. $K = [0, 1]^n$ et ∂K son bord (i.e. $\partial K = \bigcup_{j=1}^n I^{j-1} \times \{0, 1\} \times [0, 1]^{n-j-1}$), la formule de Stokes est encore vérifiée sur K , i.e.

$$\int_{\partial K} \omega = \int_K d\omega$$

3 Applications de la formule de Stokes

Lorsque $n = 2$ la formule de Stokes est connue sous le nom de formule de Green-Riemann. Elle a pour conséquence directe la formule de Cauchy en variable complexe. On trouvera dans les ouvrages de physique ou de mécanique de nombreuses applications de la formule de Stokes, en particulier à des calculs d'intégrale, de flux, etc. Nous en rappelons ici une version physique et donnons ensuite un certain nombre d'applications moins immédiates, et plus sophistiquées d'un point de vue mathématique.

3.1 Formules intégrales

Soit S une surface bordant un domaine V , c'est-à-dire que V est une sous-variété à bord de dimension 3 de \mathbb{R}^3 et $S = \partial V$. Soit $\nu(x)$ la normale à la surface, et A un champ de vecteurs défini au voisinage de V . On considère la forme volume canonique Ω sur \mathbb{R}^3 et on pose $\eta(x)(u, v) = \Omega(x)(\nu(x), u, v)$. On pose $\vec{A} \cdot d\vec{S} = \langle A, \nu \rangle \eta$ (où $d\vec{S} = \nu \det(\nu(x), u, v)$ est une deux forme à valeurs vectorielles).

Théorème 4.20 (Formule d'Ostrogradsky).

$$\int \int_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int \int \int_V (\nabla \cdot A) dv$$

Démonstration. On vérifie que pour u, v dans S , $\langle \vec{A}, \nu \rangle \eta(u, v) = \Omega_{\vec{A}}(u, v) = \det(\vec{A}, u, v)$. Or les deux termes ne dépendent que de la projection de \vec{A} sur $\mathbb{R}\nu$, et coïncident pour $\vec{A} = \nu$.

La formule de Stokes affirme que

$$\int_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_S \Omega_A = \int_V d\Omega_A = \int_V \operatorname{div}(\vec{A})$$

□

De manière analogue, si S est une surface de bord $\partial S = \Gamma$, on a

Théorème 4.21 (Formule du gradient).

$$\int_{\Gamma} \vec{V} \cdot d\vec{l} = \int \int_S (\nabla \wedge \vec{V}) \cdot d\vec{S}$$

Démonstration. En effet, si

$$\int_{\Gamma} \vec{V} \cdot d\vec{l} = \int_{\Gamma} \alpha_V = \int_{\partial S} \alpha_V = \int_S d\alpha_V = \int_S \Omega_{\nabla \wedge \vec{V}} = \int \int_S (\nabla \wedge \vec{V}) \cdot d\vec{S}$$

□

3.2 Application topologique : le théorème du point fixe de Brouwer

Soit

$$\alpha_n = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} x_j dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \dots \wedge dx_n$$

On a alors $d\alpha_n = n dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$. On en déduit que

$$\int_{S^{n-1}} \alpha_n = \int_{\partial B^n} \alpha_n = \int_{B^n} d\alpha_n = n \int_{B^n} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = n \text{vol}(B^n)$$

Théorème 4.22 (Brouwer). *Soit f une application continue de B^n dans elle-même. Alors f possède au moins un point fixe.*

Démonstration. On raisonne par l'absurde et on traite le cas où f est C^∞ , laissant l'extension au cas continu en exercice (cf. exercice (I)). Construisons d'abord à l'aide de f une application C^∞ de B^n dans S^{n-1} qui vaille l'identité sur S^{n-1} .

La demi-droite $\{x + t(f(x) - x) \mid t \leq 0\}$ rencontre S^{n-1} en un point unique donné par l'unique solution négative ou nulle $t(x)$ de

$$|x|^2 + 2t\langle x, f(x) - x \rangle + t^2|f(x) - x|^2 = 1$$

Notons que c'est bien un trinôme qui a deux solutions réelles soit toutes les deux nulles, soit de signe opposés. En effet le coefficient de t^2 ne s'annule jamais par hypothèse et le discriminant ne s'annule que si

$$|\langle x, f(x) - x \rangle|^2 - |f(x) - x|^2(|x|^2 - 1) = 0$$

ce qui n'est possible que si $|x| = 1$ et x est orthogonal à $f(x) - x$, mais alors un dessin montre immédiatement que $f(x) = x$. Notons aussi que si $|x| = 1$, on a $t(x) = 0$. De

plus $t(x)$ est fonction C^∞ de x (la formule donnant les racines du trinôme est C^∞ en les coefficients pourvu que le discriminant ne s'annule pas). Soit alors $r(x) = x + t(x)(f(x) - x)$. On a

$$n \operatorname{vol}(B^n) = \int_{S^{n-1}} \alpha_n = \int_{S^{n-1}} r^* \alpha_n$$

car $r = Id$ sur S^{n-1} . La formule de Stokes donne alors

$$\int_{\partial B^n} r^* \alpha_n = \int_{B^n} r^* d\alpha_n = 0$$

car $d\alpha_n$ est une n -forme volume, mais les vecteurs $dr(x)(e_j)_{j=1..n}$ sont toujours linéairement dépendants, vu qu'ils sont tangents à S^{n-1} qui est de dimension $n - 1 < n$.

Comme $\operatorname{vol}(B^n) \neq 0$ nous arrivons à une contradiction. \square

Remarque 3.1. La forme α_n peut aussi s'écrire

$$\alpha_n(x)(u_1, \dots, u_{n-1}) = \det(x, u_1, \dots, u_{n-1})$$

où les u_j sont dans $T_x S^{n-1}$

$$(x, u) \in TS^{n-1} = \{(x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid |x| = 1, \langle x, u \rangle = 0\}$$

La même démonstration montre que

Proposition 4.23. *Soit M est une variété à bord orientable. Il n'existe pas d'application continue de M dans ∂M dont la restriction au bord soit l'identité.*

Démonstration. Soit V une variété orientable fermée, alors il existe une forme ω d'intégrale 1 sur V . En effet, si φ est une carte en un point, et $\sigma = \rho(x_1, \dots, x_n)$ une fonction à support dans un voisinage de zéro et d'intégrale 1, alors $\omega = (\varphi^{-1})^* \sigma$ est d'intégrale 1.

Soit ω une telle $n - 1$ -forme sur ∂M , et $r : M \rightarrow \partial M$ l'application en question. Nous avons

$$1 = \int_{\partial M} \omega = \int_{\partial M} r^* \omega = \int_M dr^* \omega = \int_M r^*(d\omega)$$

Mais $d\omega$ est une n -forme sur ∂M qui est de dimension $n - 1$. Elle est donc nulle et il en est de même pour $r^*(d\omega)$. \square

Remarque 3.2. La plupart des résultats topologiques obtenus ne nécessitent pas la lissité des fonctions. Ce sont des résultats d'approximation des fonctions C^0 par des fonctions

lisses, qui permettent de se débarrasser de ces hypothèses ; Par exemple dans Brouwer, s'il existe une application continue de B dans elle-même sans point fixe, on peut trouver une application C^∞ ayant la même propriété. De même dans le lemme de Poincaré, l'existence d'une famille r_t continue entraîne qu'il existe une famille lisse ayant les mêmes propriétés.

4 Exercices

(A) On considère un espace euclidien de dimension n dont on note $(,)$ le produit scalaire, et (e_1, \dots, e_n) une base orthonormée. On identifie $\Lambda^n(E^*)$ à \mathbb{R} par l'isomorphisme qui envoie $e_1^* \wedge e_2^* \wedge \dots \wedge e_n^*$ sur 1.

(a) Il existe un unique produit scalaire sur $\Lambda^p(E^*)$ pour lequel la base $e_i^* \wedge \dots \wedge e_{i_p}^*$ est orthonormée.

(b) Montrer qu'il existe un unique opérateur $\star : \Lambda^{n-p}(E^*) \rightarrow \Lambda^p(E^*)$ tel que

$$(\alpha, \star\beta) = \alpha \wedge \beta$$

quels que soient $\alpha \in \Lambda^p(E^*), \beta \in \Lambda^{n-p}(E^*)$

(c) Montrer que $\star^2 = (-1)^{p(n-p)}$

(d) Montrer que si F est le tenseur électromagnétique de l'exercice 2.1, les autres équations de Maxwell entraînent que $d(\star F) = 0$

(B) (Le Pfaffien) Soit A une matrice antisymétrique. On note E un espace vectoriel de dimension n et (e_1, \dots, e_n) une base de E . On note ω_A la deux-forme $\sum_{i,j} a_{i,j} e_i^* \wedge e_j^*$.

(a) On dit que ω_A est non-dégénérée si

$$\forall u \in E, \exists v \in E \text{ tel que } \omega_A(u, v) \neq 0$$

Montrer que ω_A est non-dégénérée si et seulement si A est une matrice inversible. On remarquera que $\langle Au, v \rangle = \Omega_A(u, v)$.

(b) Montrer que si A est non-dégénérée n est pair. On pourra comparer $\det(A)$ et $\det(-A)$. On suppose à partir de maintenant $n = 2m$.

(c) Soit ω_A une forme non-dégénérée. Montrer que ω_A^m est proportionnelle à \det . On pose $\omega_A^m = m! Pf(A) \det$.

(d) Montrer que $Pf({}^tCAC) = \det(C)Pf(A)$ pour toute matrice C . On pourra montrer que $\omega_{{}^tCAC}(u, v) = \omega_A(Cu, Cv)$ vérifie

$$\omega_{{}^tCAC}^m(u_1, \dots, u_n) = \omega_A^m(Cu_1, \dots, Cu_n) = \det(C) \det(u_1, \dots, u_n)$$

(e) Montrer que $Pf(A)^2 = \det(A)$ et que $Pf(A^{-1}) = (-1)^m Pf(A)^{-1}$.

(C) Soit G un groupe de Lie connexe de dimension n . Montrer qu'à un coefficient près il existe une unique (à un coefficient près) n -forme différentielle, ω ne s'annulant pas sur G et invariante à gauche, c'est-à-dire telle que si $mg : G \rightarrow G$ est définie par $m_g(h) = g \cdot h$ on ait $m_g^*(\omega) = \omega$. On l'appelle mesure de Haar sur G . Montrer que si

G est compact, alors G est invariante à droite. On pourra considérer l'application $r_g : g \mapsto h \cdot g$ et montrer que $r_g^* \omega = \lambda(g) \omega$ où $\lambda : G \rightarrow (\mathbb{R}^*, x)$ est un morphisme de groupe. On montrera pour finir qu'un tel morphisme est nécessairement identiquement égal à 1.

- (D) Soit α une 1-forme sur le tore T^n . montrer qu'il existe des constantes réelles a_j telles que $\alpha - \sum_{j=1}^n a_j dx_j$ soit exacte.
- (E) Soit M une variété munie d'une action d'un groupe G discret, qui soit propre et libre. Montrer que si $p : M \rightarrow M/G$ est la projection sur le quotient, $p^* : \Omega^*(M/G) \rightarrow \Omega^*(M)$ est injective. Décrire son image.
- (F) Soit $p : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow RP^n$ la projection de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ sur l'espace projectif. Montrer que p^* est injective et que son image est l'ensemble des formes telles que $f_\lambda^*(\alpha) = \alpha$ où $f_\lambda(x) = \lambda \cdot x$ pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$.
- (G) Montrer en utilisant une partition de l'unité que M^k est orientable si et seulement si il existe une k -forme ω sur M^k ne s'annulant jamais. On pourra construire la forme localement en utilisant une partition de l'unité. Montrer que dans ce cas $\int_M \omega > 0$ et donc que ω n'est pas exacte.
- (H) Montrer en appliquant la formule de Stokes les formules suivantes (dont on précisera les hypothèses). Ici V est un domaine de \mathbb{R}^3 de bord (orienté) la surface S .

Théorème du rotationnel :

$$\int \int \int_V \text{rot}(X) dv = \int \int_S \vec{X} \wedge d\vec{S}$$

Théorème du gradient :

$$\int \int \int_V \text{grad}(f) dv = \int \int_S f d\vec{S}$$

- (I) Soit f une application continue de B^n dans elle-même supposée sans point fixe.
- (a) Montrer que quel que soit ε strictement positif, on peut trouver g telle que g soit C^∞ et que $|g - f|_{C^0} \leq \varepsilon$. Montrer que pour ε assez petit, l'application

$$h_\varepsilon(x) = \frac{1}{(1 + 2\varepsilon)} \frac{g(x)}{\rho(|g(x)|)}$$

est C^∞ et envoie B^n dans lui-même, où $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est telle que

- i. $\rho(t) = t$ pour $1 - \varepsilon \leq t \leq 1 + \varepsilon$
- ii. $\rho(t) \geq 1 - 2\varepsilon$ pour tout $t \in \mathbb{R}$

- (b) Montrer que toute application continue de B^n dans elle-même possède au moins un point fixe.

- (J) Soit l'équation différentielle définie pour $x \in \mathbb{R}$ par

$$\ddot{x}(t) + f(x(t), \dot{x}(t))\dot{x}(t) + x(t) = e(t)$$

où

- e est C^∞ périodique de période T et il existe un réel E tel que $|e(t)| \leq E - 1$,
 - $f(x, v)$ est C^∞ , constante et égale à $f > 0$ pour $|x|^2 + |y|^2$ suffisamment grand.
- (a) Ramener l'équation à un système du premier ordre dans le plan. Que dire du temps de vie des solutions ?
- (b) Montrer que pour R assez grand et $|u| \leq 1$, toute solution partant d'un point d'un cercle $C(u_0, R)$ centré en $(u, 0)$ de rayon R , tel que $|y| > E/f$ rentre dans le disque $D(u, R)$ bordé par $C(u, R)$.
- (c) Pour R assez grand, montrer que la solution de condition initiale $(R, E/f)$ traverse la droite $y = -E/f$ pour $t > 0$. On note t_0 le premier instant où cette droite est atteinte, et $\Gamma_0(R)$ la courbe $\varphi^t(R, E/f)$ pour t dans $[0, t_0]$.
On admettra de même qu'il existe un arc de trajectoire $\Gamma_1(R)$ arrivant en $(-R, -E/f)$ partie de $y = E/f$
- (d) Montrer que si $(R, E/f), (x_+(R), E/f)$ sont les extrémités de Γ_0 on a $|x_+(R) - R| \leq O(1/R)$. On admettra de manière analogue que $|x_-(R) + R| \leq O(1/R)$.

Pour les questions suivantes, on pourra admettre la version suivante du théorème de Schönflies : toute courbe fermée du plan (sans point doubles) sépare le plan en deux ouverts dont la composante bornée est un ouvert difféomorphe au disque.

- (e) En utilisant des arcs de cercles et les courbes définies aux questions précédentes, construire une courbe fermée telle que tout point intérieur à cette courbe reste à l'intérieur de la courbe.
- (f) En déduire l'existence d'au moins une solution périodique de période T .

Chapitre 5

Introduction à la Topologie et à la Géométrie différentielle.

1 Lemme de Poincaré, théorie du degré

1.1 Lemme de Poincaré

Il s'agit de l'énoncé suivant, qui joue un rôle crucial pour lier topologie et formes différentielles. On rappelle que le support d'une forme différentielle est la fermeture de l'ensemble $\{x \in M \mid \omega(x) \neq 0\}$.

Proposition 5.1 (Lemme de Poincaré). *Soit ω une forme de degré n sur \mathbb{R}^n . Alors ω est exacte. Si de plus ω est à support dans $]0, 1[^n$, alors ω est la différentielle d'une forme à support dans $]0, 1[^n$ si et seulement si $\int_{\mathbb{R}^n} \omega = 0$.*

Démonstration. Commençons par le cas sans support : si $\omega = f(x)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ on pose $g(x_1, \dots, x_n) = \int_0^{x_1} f(t, x_2, \dots, x_n)dt$ d'où $\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n)$. On en déduit que $\omega = d(g(x_1, \dots, x_n)dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n)$.

Passons maintenant au cas à support dans $]0, 1[^n$. La nécessité de la condition est évidente d'après la formule de Stokes : si B est une boule contenant $]0, 1[^n$, et $\omega = d\varphi$ avec φ à support dans $]0, 1[^n$, on aura

$$\int_B \omega = \int_B d\varphi = \int_{\partial B} \varphi = 0$$

Supposons maintenant que ω est d'intégrale nulle, et démontrons le résultat par récurrence sur n . Pour $n = 1$ le résultat est évident : $\omega = f(x)dx$ avec f à support dans $]0, 1[$ et d'intégrale nulle, et $h(x) = \int_0^x f(t)dt$ est à support dans $]0, 1[$ et répond à la question.

Dans le cas général, $\omega = f(x_1, \dots, x_n)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ avec f à support dans $]0, 1[^n$ et d'intégrale nulle. On cherche

$$\begin{aligned} \varphi &= f_1(x_1, \dots, x_n)dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n + f_2(x_1, \dots, x_n)dx_1 \wedge dx_3 \wedge \dots \wedge dx_n + \dots \\ &+ f_j(x_1, x_2, \dots, x_n)dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \dots \wedge dx_n + f_n(x_1, \dots, x_n)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1} \end{aligned}$$

où les f_j sont à support dans $]0, 1[^n$. Notons que $d\varphi = \omega$ se traduit par

$$f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_j}$$

Soit $g(x_1, \dots, x_{n-1}) = \int_0^1 f(x_1, \dots, x_{n-1}, t)dt$. on vérifie que g est à support dans $]0, 1[^{n-1}$, et d'intégrale nulle. On en déduit par hypothèse de récurrence que $g = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial g_j}{\partial x_j}$ où les g_j sont à support dans $]0, 1[^{n-1}$. Soit $\rho \in C^\infty(\mathbb{R})$ une fonction à support dans $]0, 1[$ et d'intégrale un. Posons $f_j(x_1, \dots, x_n) = g_j(x_1, \dots, x_{n-1})\rho(x_n)$ et

$$h(x_1, \dots, x_n) = f - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} = f - \rho(x_n) \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial g_j}{\partial x_j} = f - \rho(x_n)g$$

Enfin on pose

$$f_n(x_1, \dots, x_n) = \int_0^{x_n} h(x_1, \dots, x_{n-1}, t)dt$$

Comme h est à support dans $]0, 1[^n$, et

$$\int_0^1 h(x_1, \dots, x_{n-1}, t)dt = \int_0^1 f(x_1, \dots, x_{n-1}, t)dt - \left(\int_0^1 \rho(t)dt \right) \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_j}{\partial x_j} = g - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial g_j}{\partial x_j} = 0$$

f_n est à support dans $]0, 1[^n$ et

on a

$$f = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} + h = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

avec les f_j à support dans $]0, 1[^n$. □

Remarque 1.1. (A) Soit ρ une fonction d'intégrale 1 à support dans $B(0, \varepsilon)$ et $\sigma = \rho(x)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ est une forme d'intégrale 1. Toute forme différentielle de degré n à support dans $]0, 1[^n$ et d'intégrale 1, diffère de σ par la différentielle d'une forme à support dans $]0, 1[^n$. On peut donc, en soustrayant une différentielle de forme à support dans $]0, 1[^n$, remplacer une forme à support compact par un multiple (égal à $\int \omega$) de σ . Le même énoncé est vrai en remplaçant σ par une forme à support au voisinage de n'importe quel point.

- (B) Le résultat est encore vrai pour des formes de degré quelconque, et aussi pour des formes à support non-compact (il n'y a plus de condition d'intégrale nulle). Pour le cas général à support non-compact, on réfère à la section 2 de ce chapitre, proposition 7.5

Nous pouvons alors démontrer

Proposition 5.2. *Soit M une variété connexe, de dimension n , sans bord et orientée. Alors une forme ω à support compacte de degré n est la différentielle d'une forme à support compact si et seulement si*

$$\int_M \omega = 0$$

Démonstration. La nécessité résulte de la formule de Stokes (théorème 4.19, chapitre 4) appliquée à un compact contenant le support (on admet qu'il existe des ouverts à bord contenant tout compact!).

Par compacité du support de ω , celui-ci se recouvre par un nombre fini de domaines difféomorphes à $]0, 1[^n$. La suffisance se démontre par récurrence sur le nombre de domaines difféomorphes à $]0, 1[^n$ nécessaires pour recouvrir le support de ω .

Si le support de ω se recouvre par un seul tel domaine et si φ est le difféomorphisme entre U et $]0, 1[^n$, on se ramène au lemme de Poincaré en considérant $\varphi^*\omega$.

Lemme 5.3. *Soit U et V deux ouverts difféomorphes à $]0, 1[^n$ dans une variété connexe, M . Alors toute forme à support compact dans V diffère d'une forme à support compact contenu dans U par la différentielle d'une forme à support compact.*

Démonstration. Tout d'abord on peut trouver une suite d'ouverts V_j tels que

- (A) $V_1 = U, V_q = V$
- (B) tels que pour $2 \leq j \leq q$ on ait $V_j \cap V_{j-1} \neq \emptyset$
- (C) chaque V_j est contenu dans un ouvert difféomorphe à $]0, 1[^n$

En effet tout compact K de M se recouvre par un nombre fini d'ouverts V_k difféomorphes à $]0, 1[^n$. Si K est connexe on peut supposer $\bigcup_k V_k$ connexe. Alors il existe une chaîne d'ouverts $V_{k(s)}$ telle que deux ouverts consécutifs $V_{k(s)}$ et $V_{k(s+1)}$ s'intersectent. Dans le cas contraire il existerait une partition de l'ensemble des V_j telle que deux ouverts appartenant des ensembles différents ne se rencontrent jamais, et $\bigcup_k V_k$ ne serait pas connexe.

Maintenant, en raisonnant par récurrence, on suppose l'énoncé démontré pour $q - 1$ ouverts. On prend alors σ_{q-1} construit comme dans la remarque 1.1 à support au voisinage d'un point de $V_q \cap V_{q-1}$ et d'intégrale égale à $\int_{V_q} \omega_q$ et on écrit

$$\omega = \sigma_{q-1} + (\omega_q - \sigma_{q-1})$$

Puisque $\omega_q - \sigma$ est d'intégrale nulle et à support dans V_q elle s'écrit $d\mu_q$ d'après le lemme de Poincaré. Maintenant

$$\omega - d\mu_q = \sigma_{q-1}$$

a même intégrale que ω et son support est contenu dans V_{q-1} . Par hypothèse de récurrence, σ_{q-1} diffère d'une forme à support dans V_1 d'une forme exacte. Il en est donc de même pour ω . \square

Maintenant si ω est d'intégrale nulle, et $U_1 \cup \dots \cup U_q$ un recouvrement du support de ω par des ouverts difféomorphes à $]0, 1[^n$. Par partition de l'unité on peut écrire ω comme somme $\omega = \omega_1 + \dots + \omega_q$ avec ω_j à support dans U_k . Par le lemme et l'hypothèse de connexité de M , ω_k diffère de la différentielle d'une forme à support compact d'une forme $\tilde{\omega}_k$ à support dans U_1 . On en déduit que ω diffère d'une différentielle de forme exacte de $\tilde{\omega}_1 + \dots + \tilde{\omega}_q$. Comme $\int_M \omega_j = \int_M \tilde{\omega}_j$ et que $0 = \int_M \omega = \sum_k \int_M \omega_k = \sum_k \int_M \tilde{\omega}_k$ on en déduit que $\tilde{\omega}_1 + \dots + \tilde{\omega}_q$ est exacte d'après le lemme de Poincaré. Donc ω est exacte. \square

Corollaire 5.4. *Soit M une variété compacte, orientée. Une forme de degré n sur M est exacte si et seulement si $\int_M \omega = 0$.*

Remarque 1.2. Si M est sans bord, le même argument montre qu'une n -forme à support compact n'est la différentielle d'une forme à support compact que si $\int_M \omega = 0$. Par contre, si on n'impose pas de support, une n -forme est toujours exacte (démonstration?) Si M n'est pas orientable, on peut montrer que si $\omega \in \Omega^n(M)$ est localisée dans U ouvert de carte, alors ω et $-\omega$ sont cohomologues. Pour cela on "déplace" ω le long d'un chemin qui renverse l'orientation. On en déduit que $\omega = d\alpha$.

1.2 Théorie du degré, applications

Soient M, N deux variétés compactes de dimension n orientées, N étant connexe et f une application de M dans N . Alors si ω est une forme de degré n sur N d'intégrale 1, on associe à toute application f de M dans N le nombre

$$\deg(f) = \int_M f^* \omega$$

Proposition 5.5. *Le nombre $\deg(f)$ ne dépend pas du choix de ω . Si f_t est une famille continue d'applications différentiables, $\deg(f_0) = \deg(f_1)$*

Démonstration. D'après la proposition 5.2, deux formes ω_1, ω_2 de degré n ayant même intégrale diffèrent par une forme exacte. Si $\omega_1 - \omega_2 = d\alpha$, on aura

$$\int_M f^* \omega_1 - \int_M f^* \omega_2 = \int_M d\alpha = \int_{\partial M} \alpha = 0$$

On va démontrer le deuxième énoncé avec l'hypothèse supplémentaire que $F(t, x) = f_t(x)$ est C^∞ , le cas général s'y ramène par approximation. Puisque $\partial([0, 1] \times M) =$

$\{0\} \times M - \{1\} \times M$ (où le signe $-$ signifie que l'on prend l'orientation opposée à celle de M), on aura d'après la formule de Stokes (théorème 4.19, chapitre 4)

$$\int_M f_1^* \omega - \int_M f_0^* \omega = \int_{\partial([0,1] \times M)} F^* \omega = \int_{[0,1] \times M} d(F^* \omega) = \int_{[0,1] \times M} F^*(d\omega) = 0$$

puisque la forme ω est fermée. Le cas où $t \rightarrow f_t(x)$ est seulement continue est laissé en exercice. \square

Proposition 5.6 (multiplicativité du degré). *Soient $f : M \rightarrow N$ et $g : N \rightarrow P$ des applications entre variétés orientées fermées. Alors $\deg(g \circ f) = \deg(g) \cdot \deg(f)$*

Démonstration. En effet cela résulte de $\int_M (g \circ f)^*(\omega_P) = \int_M f^* \circ (g)^*(\omega_P)$. Mais $(g)^*(\omega_P) = \deg(g)\omega_N$ où $\int_N \omega_N = 1$, et donc $\int_M f^* \circ (g)^*(\omega_P) = \deg(g) \int_N f^* \omega_N = \deg(g) \deg(f)$ \square

Soit x un réel non nul, on définit $\text{signe}(x)$ comme égal à ± 1 et de même signe que x .

Proposition 5.7. *Soit $f : M \rightarrow N$ une application C^∞ entre deux variétés orientées. Le nombre $\deg(f)$ se calcule comme suit. Soit $y \in N$ tel que pour tout $x \in f^{-1}(y)$ on ait $\det(df(x)) \neq 0$. Alors*

$$\deg(f) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{signe}(\det(df(x)))$$

En particulier ce nombre ne dépend pas du choix de y .

Démonstration. Notons d'abord que si $\det(df(x))$ dépend du choix d'une base de $T_x M$ et $T_y N$, son signe n'en dépend pas pourvu que ces bases soient choisies positivement orientées (ce qui est ici sous-entendu). Soit U un voisinage de y identifié par une carte respectant l'orientation, φ , à un voisinage V de 0 dans \mathbb{R}^n et considérons une forme $\rho = \rho(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ concentrée en 0 d'intégrale 1. Soit $\alpha_y = \varphi^*(\rho)$ l'image de cette forme par une carte. Alors $f^* \alpha_y$ est à support dans $f^{-1}(U)$. Par le théorème d'inversion locale $f^{-1}(U)$ sera une réunion disjointe d'ouverts difféomorphes à U , notés U_j . On trouvera un U_j pour chaque élément $x_j \in f^{-1}(y)$ correspond un U_j . Sur chacun de ces ouverts U_j , $\varphi \circ f$ est un difféomorphisme et donc

$$\int_U f^* \omega = \sum_j \int_{U_j} f^* \omega = \sum_j \int_{f(U_j)} \omega = \sum_j \left(\int_V \omega \right) \text{signe}(\det df(x)) = \sum_j \text{signe}(\det df(x))$$

\square

Le théorème de Sard, affirme que l'ensemble des points y vérifiant les hypothèses du lemme forment un ouvert dense (attention, on peut avoir $\det(df(x)) = 0$ pour tout x , dans ce cas le lemme de Sard affirme que le complémentaire de l'image de f est un ouvert dense).

Corollaire 5.8. (A) *Si f est un difféomorphisme, il est de degré ± 1 suivant qu'il préserve ou renverse l'orientation.*

(B) Soit f une application de degré non nul. Alors elle est surjective.

Démonstration. Le point (A) est immédiat. Pour le point (B), si y n'est pas dans l'image de f c'est une valeur régulière, et la formule donne $\deg(f) = 0$.

□

Exemples 1.1. (A) Examinons le cas $n = 1$. Soit $c : S^1 \rightarrow S^1 \subset \mathbb{R}^2$ une application C^∞ . On considère le nombre

$$\frac{1}{2\pi} \int_{S^1} \det(c(t), \dot{c}(t)) dt$$

Ce nombre est égal à $\deg(c)$, car la forme différentielle sur S^1 donnée par

$$\alpha_1(x)h = \frac{1}{2\pi} \det(x, h)$$

est une 1-forme sur S^1 dont l'intégrale vaut 1, et

$$\int_{S^1} c^* \alpha_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} \det(c(t), \dot{c}(t)) dt$$

Les propositions 5.5 et 5.7 permettent de conclure.

(B) Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Comme $df(z)$ est une similitude, elle préserve l'orientation, et donc si $g : P^1(\mathbb{C}) \rightarrow P^1(\mathbb{C})$ est un application holomorphe et ζ une valeur régulière, alors $\deg(g) = \sum_{z \in g^{-1}(\zeta)} +1 = \#\{z \in g^{-1}(\zeta)\} \geq 0$. Il en est de même pour des fonctions holomorphes de plusieurs variables.

Théorème 5.9 (Théorème de la sphère chevelue). *Tout champ de vecteurs tangent à la sphère S^{2n} possède au moins un zéro.*

Démonstration. Supposons que v soit un champ de vecteurs C^∞ sans zéro. Alors en suivant à partir de x un grand cercle donné par $v(x)$ (i.e. contenu dans le plan engendré par x et $v(x)$), dans la direction de $v(x)$, on obtient une famille C^∞ d'applications joignant l'identité à l'application antipodale $\varphi : x \rightarrow -x$. On en déduit que $\deg(\text{Id}) = \deg(\varphi)$. Or $\deg(\text{Id}) = 1$ et si α_{2n} est la forme citée plus haut on a $\varphi^* \alpha = -\alpha$ donc

$$\deg(\varphi) = \int_{S^{2n}} \varphi^* \alpha_{2n} = - \int_{S^{2n}} \alpha_{2n} = - \deg(\text{Id}) = -1$$

et nous obtenons une contradiction. L'argument d'approximation habituel permet de traiter le cas C^0 . □

Remarques 1.1. (A) Soit p l'application de \mathbb{R} dans S^1 donnée par $p(x) = (\cos(x), \sin(x))$. Alors $p^*(\alpha) = dx$ puisque

$$\alpha_1(p(x))dp(x) = \det((\cos(x), \sin(x)), (-\sin(x), \cos(x)))dx = dx$$

On en déduit que si $c(t) = p(\gamma(t))$ où $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 , on a

$$\int_{S^1} c^* \alpha_1 = \int_0^{2\pi} (p \circ \gamma)^*(\alpha_1) = \int_0^{2\pi} \gamma^*(p^* \alpha_1) = \int_0^{2\pi} \gamma^*(dx) = \gamma(2\pi) - \gamma(0)$$

L'existence de γ est donnée par le théorème de relèvement de l'exercice (E) du chapitre 1. Dans notre cas la définition du degré coïncide avec celle donnée en l'exercice (F) du chapitre 1.

- (B) Lorsque X est une application de M dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ on définit l'indice de X par rapport à 0 et on note $\text{ind}(X, 0)$ le nombre $\deg(\frac{X}{|X|})$. Notons $N : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow S^{n-1}$ l'application donnée par $N(x) = \frac{x}{|x|}$, et $\beta_n = \frac{1}{n \text{vol}(B^n)} N^* \alpha_n$. Alors l'indice de l'application X est donné par

$$\text{ind}(X, 0) = \int_M X^* \beta_n$$

1.3 Indice d'un champ de vecteurs en un zéro isolé

Soit X un champ de vecteurs tangent à une variété M orientée.

On suppose les zéros de X isolés. Soit z un tel zéro. On considère une carte orientée φ en z et le champ de vecteurs $Y = \varphi_*(X)$ défini au voisinage de 0 dans \mathbb{R}^n et ayant un zéro isolé à l'origine. Soit alors $S(\varepsilon)$ une sphère de rayon ε centrée en 0. On suppose ε assez petit pour que $\varphi_*(X)$ n'ait pas de zéro dans la boule de rayon ε et on considère l'application $Y : S(\varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, et on note son degré $\deg(\varphi_*(X), \varepsilon)$ (avec l'abus de langage de la dernière remarque).

Proposition 5.10. *Pour ε assez petit, le nombre $\deg(\varphi_*(X), \varepsilon)$ ne dépend ni de φ ni de ε . On le note $\text{ind}(X, z)$.*

Démonstration. Tout d'abord l'indépendance de ε (à φ fixé) est claire car on doit comparer $\int_{S(\varepsilon)} Y^* \beta_n$ et $\int_{S(\varepsilon')} Y^* \beta_n$ mais la différence est donnée par

$$\int_{\partial(B(\varepsilon) \setminus B(\varepsilon'))} Y^* \beta_n = \int_{B(\varepsilon) \setminus B(\varepsilon')} dY^* \beta_n = 0$$

. Mais en utilisant le (D) de la proposition 4.17, $dY^* \beta_n = Y^* d\beta_n = 0$.

Maintenant si U est un domaine de bord ∂U contenant 0, le même argument montre que pour ε assez petit (il faut que $B(\varepsilon) \subset U$)

$$\int_{\partial U} Y^* \beta_n = \int_{S(\varepsilon)} Y^* \beta_n$$

Maintenant si φ, ψ sont deux cartes, on doit comparer $\int_{S(\varepsilon)} Y_\varphi^* \beta_n$ et $\int_{S(\varepsilon)} Y_\psi^* \beta_n$. Mais $Y_\psi = (\psi \circ \varphi^{-1})_* Y_\varphi$ et on donc

$$\int_{S(\varepsilon)} Y_\psi^* \beta_n = \int_{S(\varepsilon)} (\psi \circ \varphi^{-1})_* Y_\varphi^* \beta_n = \int_{(\psi \circ \varphi^{-1})S(\varepsilon)} Y_\varphi^* \beta_n = \int_{S(\varepsilon)} Y_\varphi^* \beta_n$$

la dernière égalité résulte de ce que $(\psi \circ \varphi^{-1})S(\varepsilon)$ est le bord de $(\psi \circ \varphi^{-1})B(\varepsilon)$ qui contient l'origine. \square

2 Théorèmes de Gauss-Bonnet et Poincaré-Hopf

Soit M une surface compacte orientée sans bord de \mathbb{R}^3 et considérons en chaque point $\nu(x)$ la normale unitaire¹. L'application ν envoie M sur la sphère S^2 . Nous allons compter de deux manières différentes le degré de cette application. On note α_2 la forme volume sur S^2 définie plus haut. Notons que $\int_{S^2} \alpha_2 = 4\pi$. On note σ_M la deux-forme définie sur M par $\sigma_M(x)(u, v) = \det(\nu(x), u, v)$ où \det est le déterminant dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .

Définition 5.11. On appelle courbure de Gauss de la surface M , la fonction K définie sur M par

$$\nu^* \alpha_2 = K(x) \sigma_M$$

Remarque 2.1. Le lecteur qui a vu d'autres définitions de la courbure pourra montrer qu'elles sont équivalentes à celle donnée ci-dessus. On dit qu'un point d'une surface est elliptique si $K(x)$ est strictement positif, hyperbolique si $K(x)$ est négatif et parabolique si $K(x) = 0$. La trichotomie elliptique/hyperbolique/parabolique est omniprésente en mathématiques, de la géométrie à l'algèbre en passant par les équations aux dérivées partielles. Nous n'avons malheureusement pas la place de développer cette notion ici, mais les réponses données par un moteur de recherche appliqué à « elliptique, hyperbolique, parabolique » vous en donneront une idée.

L'application $\nu : M \rightarrow S^2$ donnée par $x \rightarrow \nu(x)$ induit une application $F_\nu : TM \rightarrow TS^2$ donnée par

$$\begin{aligned} F_\nu : TM &\rightarrow TS^2 \\ (x, h) &\rightarrow (\nu(x), h) \end{aligned}$$

Si on note p_M, p_2 les projections de TM sur M et de TS^2 sur S^2 respectivement², on a

$$p_2 \circ F_\nu = \nu \circ p_M$$

Soit alors T_2 la 1-forme définie sur le tangent unitaire à la sphère de dimension 2

1. le choix de la normale est déterminé par l'orientation : si (u, v) est une base positivement orientée de $T_x M$, on choisit $\nu(x)$ tel que $\det(\nu(x), u, v) > 0$.

2. i.e. $p_M(x, h) = x$.

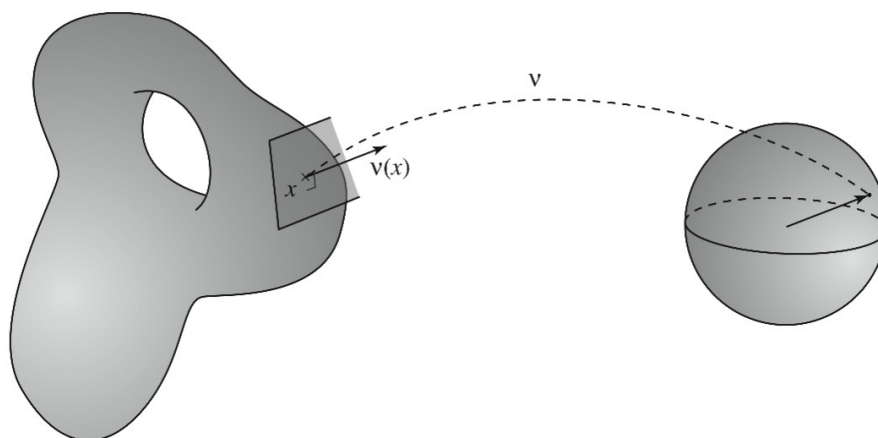


FIGURE 5.1 – L'application de Gauss

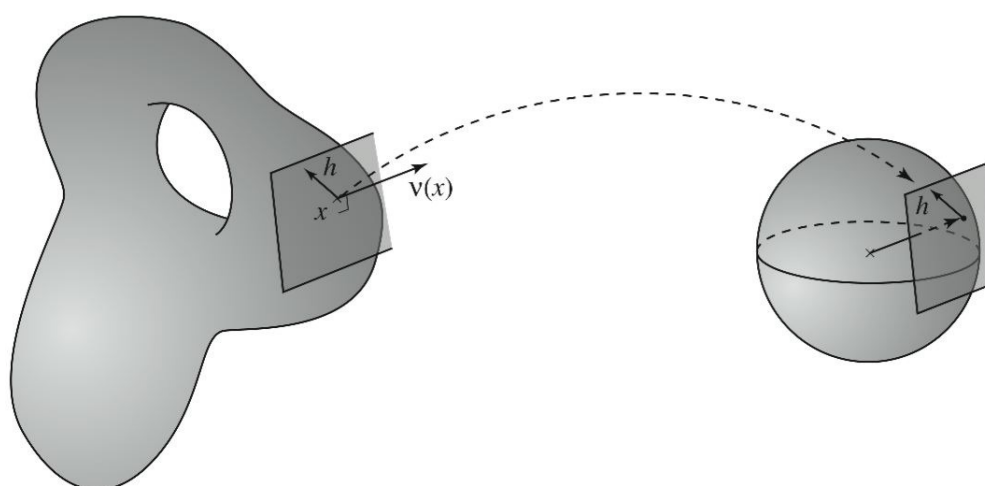


FIGURE 5.2 – L'application F_ν envoyant (x, h) sur $(\nu(x), h)$

$$U_2 = \{(x, h) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid |x| = 1, |h| = 1, \langle x, h \rangle = 0\} \subset TS^2$$

par la formule

$$T_2(x, h)(u, v) = \det(x, h, v)$$

On vérifie sans peine que U_2 est une sous-variété de dimension 3 de \mathbb{R}^6 (car donné par trois équations aux différentielles indépendantes) et que

$$T_{(x,h)}U_2 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid \langle x, u \rangle = 0, \langle h, v \rangle = 0, \langle x, v \rangle + \langle h, u \rangle = 0\}$$

qui possède une base donnée par

$$(x \wedge h, 0), (h, -x), (0, x \wedge h)$$

(où \wedge représente ici le produit vectoriel). Le lemme suivant nous dit que si α_2 n'est pas exacte d'après la formule de Stokes (son intégrale vaut 4π), son relevé à U_2 , $p_2^*\alpha_2$ est exacte.

Lemme 5.12.

$$-dT_2 = p_2^*\alpha_2$$

Démonstration. Il s'agit d'un calcul élémentaire. Par définition dT_2 est l'antisymétrisée de DT_2 . Donc ³

$$dT_2(x, h)(u_1, v_1)(u_2, v_2) = \det(u_1, h, v_2) - \det(u_2, h, v_1) + \det(x, v_1, v_2)$$

où $(u_1, v_1), (u_2, v_2)$ sont dans $T_{(x,h)}U_2$.

On prétend que sur U_2 cette somme coïncide avec $-\det(x, u_1, u_2)$. Il suffit de vérifier l'égalité sur les éléments d'une base. Or si $u_1 = x \wedge h, v_1 = 0$ et $u_2 = 0, v_2 = x \wedge h$, tous les termes sont nuls, et il en est de même si $u_1 = h, v_1 = -x$ et $u_2 = 0, v_2 = x \wedge h$. Enfin, si $u_1 = x \wedge h, v_1 = 0$ et $u_2 = h, v_2 = -x$, seul le premier terme est non nul et vaut $\det(x \wedge h, h, -x) = -\det(x, x \wedge h, h) = -\det(x, u_1, u_2)$.

□

Soit alors X un champ de vecteurs sur M , et ρ une fonction C^∞ sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R}_+^* telle que $\rho(t) = t$ pour $t \geq \delta$. On pose $Y(x) = \frac{X(x)}{\rho(|X(x)|)}$. Alors Y est de norme 1 hors d'un voisinage Ω_ε de l'ensemble des zéros de X (qui coïncident avec ceux de Y).

3. On peut écrire en coordonnées, $T_2 = x_1h_2dh_3 - x_1h_3dh_2 - x_2h_1dh_3 + x_2h_3dh_1 + x_3h_1dh_2 - x_3h_2dh_1$ donc $dT_2 = 2(x_1dh_2 \wedge dh_3 + x_2dh_3 \wedge dh_1 + x_3dh_1 \wedge dh_2) + h_2(dx_1 \wedge dh_3 + dh_1 \wedge dx_3) + h_3(dh_2 \wedge dx_1 + dx_2 \wedge dh_1) + h_1(dh_3 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dh_2)$

On choisit dans la suite pour Ω_ε une réunion de petits disques autour des zéros de X , supposés isolés⁴. Hors de ce voisinage, l'application Y envoie M dans $U_M = F_\nu^{-1}(U_2)$ et vérifie $p_M \circ Y = \text{Id}$.

On a d'après le lemme précédent et la propriété $p_2 \circ F_\nu = \nu \circ p_M$ l'égalité

$$p_M^*(K\sigma_M) = p_M^*\nu^*\alpha_2 = F_\nu^*p_2^*\alpha_2 = F_\nu^*(dT_2) = d(F_\nu^*(T_2))$$

Donc on a en utilisant $p_M \circ Y = \text{Id}_M$

$$\int_{M \setminus \Omega_\varepsilon} K(x)\sigma = \int_{M \setminus \Omega_\varepsilon} Y^*p_M^*\nu^*\alpha_2 = \int_{M \setminus \Omega_\varepsilon} Y^*F_\nu^*p_2^*\alpha_2 = \int_{M \setminus \Omega_\varepsilon} Y^*F_\nu^*dT_2 = \int_{M \setminus \Omega_\varepsilon} d(Y^*F_\nu^*T_2)$$

d'après le Lemme 5.12

On peut alors appliquer la formule de Stokes, ce qui nous donne

$$- \int_{\partial\Omega_\varepsilon} Y^*F_\nu^*T_2$$

Maintenant, $F_\nu^*T_2(u, v) = \det(\nu(x), h, v)$ et donc

$$Y^*F_\nu^*T_2(\xi) = \det(\nu(x), Y(x), dY(x)\xi)$$

Or, si $p_{x,z}$ est la projection de l'orthogonal de $\nu(z)$ à celui de $\nu(x)$ on a

$$|p_{x,z}(w) - w|_{C^1} \leq \varepsilon|w|$$

si $|x - z|$ est assez petit. On en déduit que si $V(x) = \frac{p_{x,z}Y(x)}{|p_{x,z}Y(x)|}$

$$|V - Y|_{C^1} \leq \varepsilon$$

et donc

$$\det(\nu(x), Y(x), dY(x)\xi) - \det(\nu(z), V(x), dV(x)\xi)$$

tend vers 0 avec $|x - z|$.

On doit donc calculer pour chacun des lacets $c(t)$ constituant le bord de Ω_ε la quantité

$$\int_{S^1} \det(\nu(x), V(c(t)), dV(c(t))\dot{c}(t)) dt$$

4. Par « petit disque » on entend l'image d'un petit disque par une carte. Les disques sont supposés assez petits pour ne pas s'intersecter.

or $\det(\nu(z), V(c(t)), dV(c(t))\dot{c}(t)) = \det(V(c(t)), dV(c(t))\dot{c}(t))$ où le déterminant est celui dans $T_z S$. Comme

$$\int_{S^1} \det(V(c(t)), dV(c(t))\dot{c}(t)) = \text{ind}(X, z)$$

on en déduit

Lemme 5.13. *Si $c(t)$ est un chemin positivement orienté autour d'un unique zéro z de X , alors*

$$\int_{S^1} \det(\nu(c(t)), Y(c(t)), dY(c(t))\dot{c}(t)) dt = 2\pi \text{ind}(X, z) + O(\varepsilon)$$

De ce qui précède on déduit,

$$\int_{M \setminus \Omega_\varepsilon} K(x) \sigma = \sum_{X(z)=0} \text{ind}(X, z) + o(\varepsilon)$$

et faisant tendre ε vers 0 on obtient

Théorème 5.14 (Gauss-Bonnet-Poincaré-Hopf). *Soit M une surface orientée sans bord qui soit une sous-variété de \mathbb{R}^3 .*

$$\frac{1}{2\pi} \int_M K(x) \sigma = \sum_{X(z)=0} \text{ind}(X, z)$$

On notera que

-le terme de gauche ne dépend pas du choix d'un champ de vecteurs

-le terme de droite ne dépend pas de la manière dont la surface est plongée dans \mathbb{R}^3 , puisque l'indice d'un champ de vecteurs en un zéro n'en dépend pas. Si φ est une difféomorphisme entre deux surfaces M_1, M_2 il envoie les zéros de X sur M_1 sur ceux de $\varphi_* X$ défini par $\varphi_*(X)(y) = d\varphi(\varphi^{-1}(y))X(\varphi^{-1}(y))$ sur M_2 , et on aura

$$\sum_{X(z_1)=0} \text{ind}(X, z_1) = \sum_{(\varphi_* X)(z_2)=0} \text{ind}((\varphi_* X), z_2)$$

Il en résulte, les deux termes étant égaux, que ceux ci ne dépendent ni du plongement ni du champ de vecteurs. Leur valeur commune ne dépend que de la surface. Si deux surfaces sont difféomorphes ce terme est invariant. Le terme de droite étant clairement entier, il en résulte que l'intégrale de la courbure est un multiple entier de 2π . Ce résultat est remarquable, dans la mesure où la courbure elle-même n'est bien entendu pas un entier, et peut prendre, localement, des valeurs quelconques.

La valeur commune de ces termes est appelée caractéristique d'Euler, et notée $\chi(S)$. Elle vaut 2 pour la sphère (calculer la somme des indices du champ de vecteurs « Nord-Sud »), 0 pour un tore (trouver un champ de vecteurs sans zéro sur le tore), et $2 - 2g$ pour

une surface « à g trous ». On démontre, et on l'admettra ici, que toute surface orientable est difféomorphe à une et une seule surface à g trous. En d'autres termes le genre ou la caractéristique d'Euler permettent de classer les surfaces à difféomorphisme près.

Nous répétons ce théorème en deux versions séparées :

Proposition 5.15 (Théorème de Gauss-Bonnet). *La quantité*

$$\frac{1}{2\pi} \int_M K(x)\sigma = \chi(M)$$

est un nombre entier pair appelé caractéristique d'Euler de M .

Le théorème de Gauss-Bonnet affirme que le nombre $\chi(M)$ ne dépend que de la « topologie » de M . Par exemple une sphère « cabossée » aura même valeur de $\chi(M)$ qu'une sphère ronde.

Proposition 5.16 (Théorème de Poincaré-Hopf). *Si les zéros de X sont isolés*

$$\sum_{z|X(z)=0} \text{ind}(X, z) = \chi(M)$$

Elle est égale à $\chi(M)$, qui ne dépend donc d'aucun choix. C'est un invariant ne dépendant que de la surface M à difféomorphisme près.

Corollaire 5.17. *Une surface ayant un champ de vecteurs sans zéro a une caractéristique d'Euler nulle.*

Remarque 2.2. (A) En particulier, la seule surface orientable ayant un champ de vecteurs sans zéro est la surface de genre 0, le tore.

(B) Le cas du flot irrationnel sur le tore, donné en coordonnées $(\alpha, \beta) \in S^1 \times S^1$ par $\varphi^t(\alpha, \beta) = (\alpha + t, \beta + t\theta)$ où θ est irrationnel, et dont les trajectoires sont des courbes s'enroulant sans jamais se refermer sur le tore, montre que non seulement il existe sur le tore un champ de vecteurs sans zéro, mais qu'il en existe même sans orbites périodiques : l'analogie du théorème de Poincaré-Bendixson n'est pas valable sur le tore.

Enfin la proposition suivante donne une autre méthode pour calculer la caractéristique d'Euler.

Proposition 5.18. *Soit v un vecteur unitaire de \mathbb{R}^3 et H_v la restriction à M de la fonction $p \rightarrow \langle v, p \rangle$. On suppose que les points critiques de H_v sont non-dégénérés, c'est à dire qu'en un tel point p , la forme quadratique $d^2H_v(p)$ restreinte à T_pM est non dégénérée. Alors $\chi(M)$ est égal au nombre de maxima et de minima de H_v moins le nombre des autres points critiques.*

Démonstration. Il y a deux démonstrations possibles et il est intéressant de les mentionner toutes les deux. D'une part le théorème de Poincaré-Hopf appliqué au gradient de H_v permet de démontrer immédiatement le résultat. L'autre démonstration que nous donnons ici fait le lien direct avec la courbure de Gauss. Notons que bien que H_v soit linéaire sur \mathbb{R}^3 , $d^2(H_v)|_M$ n'est pas nulle. Elle se calcule en prenant une carte φ et en calculant $d^2(H_v \circ \varphi^{-1})$. C'est ce que nous allons faire.

En effet, $\deg(\nu)$ est aussi égal au nombre de préimages de ν comptées avec multiplicité. Or $\nu(p) = \pm v$ si et seulement si p est un point critique de H_v puisque cette dernière condition s'écrit, par le théorème des extrema liés, $T_p M \subset \ker(H_v)$ soit $\nu(p) = \lambda v$. On suppose pour simplifier les notations que $v = (0, 0, 1)$.

Au voisinage d'un tel point, $p = (x, y, z)$, la surface est un graphe au dessus de z soit $z = f(x, y)$, et le plan tangent est donné par

$$T_p M = T_{(x,y,z)} M = \left\{ (u, v, w) \mid w = u \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) + v \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right\}$$

d'où $\nu(x, y, z)$ est proportionnel à

$$n(x, y, z) = \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, y), \frac{\partial}{\partial y} f(x, y), -1 \right)$$

et

$$dn(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) & 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) & \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) & 0 \end{pmatrix}$$

Puisque $\nu(x, y, z) = \lambda(x, y, z)n(x, y, z)$ avec $\lambda(x, y, z) > 0$ on a

$$d\nu(x, y, z) = d\lambda(x, y, z)n(x, y, z) + \lambda(x, y, z)dn(x, y, z)$$

et donc la projection de $d\nu(x, y, z)$ sur l'espace tangent à la sphère (qui est orthogonal à $n(x, y, z)$) est égal à la projection de $\lambda(x, y, z)dn(x, y, z)$ sur cet espace. Dans notre cas, cette projection est donnée par la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) & \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) \end{pmatrix}$$

On a donc que le signe de $\det(d\nu(x, y, z))$ est égal à celui de

$$\det(d^2 f(x, y))$$

Or H_v s'écrit dans la carte $(x, y) \mapsto (x, y, f(x, y))$ sous la forme $(x, y) \mapsto f(x, y)$, et donc $d^2 f(x, y) = d^2(H_v|_M)$. On en déduit que $\det(d\nu(x, y, z))$ est positif si la forme quadratique

$d^2f(x, y)$ est définie, c'est-à-dire si (x, y) est un maximum ou un minimum local de H_v et négatif sinon. On a pour conclure

$$\begin{aligned} \deg(\nu) &= \sum_{p \mid \nu(p)=\pm v} \text{signe det}(d\nu(p)) = \\ &= \sum_{p \mid \nu(p)=\pm v} \text{signe det}(dn(p)) = \sum_{p=(x,y,z) \mid \nu(p)=\pm v} \text{signe det}(d^2f(x, y)) \end{aligned}$$

□

Remarques 2.1. (A) On en déduit que pour une surface orientable M_g à g trous, $\chi(M_g) = 2 - 2g$. En particulier si $g \geq 2$ il existe toujours des points où la courbure est négative.

(B) La véritable portée du théorème de Gauss-Bonnet, s'obtient lorsqu'on calcule l'intégrale de $K(x)$ sur un domaine de M bordé par une courbe. On montre que pour un domaine bordé par un triangle géodésique, la somme des angles du triangle diffère de π par l'intégrale de $K(x)$ sur l'intérieur du triangle (cf. exercice J). C'est le théorème originellement démontré par Gauss, qui remarqua que pour la sphère de rayon 1, $K(x) = 1$ et donc la somme des angles d'un triangle diffère de π par l'aire du triangle. Il existe donc des géométries telles que la somme des angles d'un triangle ne vaut pas π , et se demanda en précurseur de l'astrophysique moderne, si la géométrie naturelle (i.e. celle pour laquelle les géodésiques sont des rayons lumineux) ne serait pas de ce type, plutôt qu'euclydienne. Le théorème que nous avons énoncé se déduit facilement de la version que nous citons en découpant la surface en triangles⁵. On montre que la somme du nombre de triangles moins le nombre d'arêtes plus le nombre de sommets vaut encore $\chi(M)$, quel que soit le découpage de M en triangles. Ces idées sont à la base de la topologie algébrique moderne et de nombreuses autres théories reliant des propriétés géométriques à des propriétés topologiques (i.e. invariantes par bijection continue) de ces objets.

(C) La topologie différentielle est l'étude des propriétés topologiques des variétés différentiables. Elle fut initiée par Riemann, puis par Poincaré. L'utilisation de formes différentielles et la définition des groupes de cohomologie, autrefois appelés groupes de Betti est due à ces mêmes auteurs, mais sans utiliser la notion de formes différentielles. L'idée que la topologie de la variété puisse s'étudier en considérant les propriétés des formes différentielles est habituellement attribuée à Élie Cartan et Georges deRham, mais il semble que Vito Volterra ait joué un rôle de précurseur. Enfin l'analogue de la forme différentielle T_2 sur l'espace des vecteurs tangents unitaires d'une variété orientable quelconque s'appelle la classe de Thom. Elle a été découverte par Thom en 1952 dans sa thèse. L'existence d'une telle classe vérifiant $dT = p^*\alpha$ (ici α est une forme fermée définie sur M , qui n'est plus liée à la courbure de Gauss, p la projection de UM espace des vecteurs tangents unitaires, sur M) a de nombreuses conséquences.

5. Il faut bien entendu démontrer l'existence d'un tel découpage

3 Exercices

Topologie et géométrie différentielle

- (A) Soit M, N deux variétés orientables de même dimension mais non compactes. Montrer que l'on peut construire une théorie du degré pour les applications **propres** de M dans N .
- (B) Soit M est une variété compacte orientable et P une variété compacte orientable de bord M . Montrer que si l'application $f : M \rightarrow N$ s'étend à P , alors $\deg(f) = 0$.
- (C) Montrer qu'une application qui renverse l'orientation ne peut être homotope à l'identité.
- (D) (Formule de Riemann-Hurwitz)

Soit X un champ de vecteurs sur \mathbb{C} identifié à \mathbb{R}^2 , ayant un zéro isolé en 0. Soit f l'application de \mathbb{C} dans \mathbb{C} donnée par $f(z) = z^n$.

- (a) Comparer $\text{ind}(X, 0)$ et $\text{ind}(f^*(X), 0)$ où $f^*(X)(z) = df(z)X(f(z))$
- (b) On appelle surface de Riemann, une variété de dimension réelle égale à 2, dont les changements de cartes sont des applications holomorphes complexes. Une surface de Riemann sera toujours supposée sans bord, et compacte. Une application $f : S \rightarrow T$ entre deux surfaces de Riemann a un nombre fini de points critiques, z_1, \dots, z_q , et en chacun de ces points, on peut trouver des cartes de S et T telles que dans ces cartes f s'écrive sous la forme $z \mapsto z^n$. [Indication : le développement en série de f en z_j est donné par $f(z) = f(z_j) + (z - z_j)^n h(z)$] On appelle n le degré de ramification en z_j et on le note $e(z_j)$.
- (c) Soit f une application entre surfaces de Riemann comme ci-dessus. Soit d le degré de f . Montrer la formule de Riemann-Hurwitz

$$\chi(S) = d\chi(T) - \sum_{j=1}^q (e(z_j) - 1)$$

- (d) En utilisant que $\chi(M_g) = 2 - 2g$ montrer qu'il n'y a pas d'application holomorphe non-constante de S^2 dans T^2
- (e) Montrer que d est toujours strictement positif si f est non constante. En déduire qu'il n'y a pas d'application holomorphe non-constante de S^2 sur une surface de genre $g \neq 0$.
On verra que la non-existence d'une application de degré non nul de S^2 sur une surface de genre non nul est vraie sans supposer que f est holomorphe.
- (E) Soit f une fonction définie sur une variété M , et φ une carte en x_0 . Montrer que $d^2(f \circ \varphi^{-1})(0)$ ne dépend pas, à conjugaison près, de φ si x_0 est point critique de f , mais que ce n'est pas le cas en général.
- (F) Montrer que si f_0 et f_1 sont deux applications homotopes de M dans N (de dimensions respectives, m et n), il existe une application linéaire $K : \Omega^*(M) \rightarrow \Omega^*(M)$ telle que $f_1^*(\alpha) - f_0^*(\alpha) = dK(\alpha) + Kd\alpha$.

- (a) Commencer par le cas $j_t : M \rightarrow M \times [0, 1]$ donnée par $j_t(x) = (x, t)$. On note X le champ de vecteurs sur $M \times \mathbb{R}$ donné par $\frac{\partial}{\partial t}$ de flot $\varphi^s(x, t) = (x, t + s)$, et, utilisant le fait que $j_t = \phi^t \circ j_0$ on utilise la formule de Lie-Cartan (proposition 6.13)

$$\begin{aligned} (\varphi^1)^*(\alpha) - (\varphi^0)^*(\alpha) &= \int_0^1 \frac{d}{ds} (\varphi^s)^*(\alpha) ds = \int_0^1 (\varphi^s)^*(L_X \alpha) ds = \\ &= \int_0^1 (\varphi^s)^*(di_X + i_X d\alpha) ds = d \left(\int_0^1 (\varphi^s)^*(i_X \alpha) ds \right) + \int_0^1 (\varphi^s)^*(i_X(d\alpha)) ds \end{aligned}$$

On pose alors $K\alpha = \int_0^1 (\varphi^s)^*(i_X(\alpha)) ds$

- (b) Traiter le cas général
 (c) En déduire que si α est fermée, $f_1^*(\alpha) - f_0^*(\alpha)$ est exacte, et en particulier son intégrale sur toute sous-variété est nulle.
- (G) Montrer que pour une surface dans \mathbb{R}^3 , il existe toujours un point où $K(x) > 0$. Plus précisément montrer que si S est contenue dans une sphère de rayon R , il existe un point où la courbure vérifie $K(x) > 1/R$. Indication : On pourra chercher le point à distance maximale de l'origine.

La formule de Gauss-Bonnet n'est donc pas la seule contrainte que doit satisfaire une fonction $K(x)$ pour être la courbure de Gauss d'un plongement de S dans \mathbb{R}^3 .

- (H) On dit qu'une surface fermée orientable, et compacte de \mathbb{R}^3 est convexe, si sa courbure est > 0 en tout point, ou encore si $\alpha_2 = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$, on a $\nu^*(\alpha_2) = K(x)\sigma$ où σ est la forme d'aire de la surface, et $K(x) > 0$.

On veut montrer qu'une surface convexe est la frontière d'un ensemble convexe au sens usuel.

- (a) Montrer que l'application $\nu : \Sigma \rightarrow S^2$ est un difféomorphisme local et est de degré strictement positif. On admettra que cela entraîne que c'est un difféomorphisme.
 (b) Montrer que si $u_0 = (x_0, y_0, z_0)$ est le seul point où $\nu(u_0) = e_z$, Σ est contenue dans $\{(x, y, z) \mid z \leq z_0\}$.
 (c) En appliquant le même argument à tous les vecteurs, montrer que si ν est un vecteur de S^2 et $H(u_0, \nu) = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid \langle u - u_0, \nu \rangle \leq 0\}$, on a $\Sigma \subset \bigcap_{u_0 \in \Sigma} H(u_0, \nu(u_0))$.
 (d) Montrer que $\bigcap_{u_0 \in \Sigma} H(u_0, \nu(u_0))$ est un convexe et a pour bord Σ .
- (I) Montrer que si une variété est de dimension impaire, $\chi(M) = 0$. On pourra montrer que $\text{ind}(-X, z) = -\text{ind}(X, z)$ et appliquer la formule de Poincaré-Hopf.
- (J) On considère une courbe $\gamma(t)$ tracée sur \mathbb{R}^3 de classe C^∞ . On peut reparamétriser la courbe afin que $\dot{\gamma}(t)$ soit de norme un. On appelle alors courbure de la courbe, la quantité $|\ddot{\gamma}(t)|$. Si la courbe est tracée sur la surface S , la projection de $\ddot{\gamma}(t)$ sur l'espace tangent à S en $\gamma(t)$ est orthogonal à $\dot{\gamma}(t)$. On appelle courbure géodésique la coordonnée de $\ddot{\gamma}(t)$ le long du vecteur $\nu \wedge \dot{\gamma}(t)$ contenu dans $T_x S$ et orthogonal direct de $\dot{\gamma}(t)$. On la note $k_g(t)$.

(a) Montrer que

$$k_g(t) = \det(\nu(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t))$$

(b) (Gauss-Bonnet, cas à bord)

- i. Reprendre la démonstration de Gauss-Bonnet pour montrer que si γ est une courbe fermée telle que $\gamma(0) = \gamma(1)$, $\dot{\gamma}(0) = \dot{\gamma}(1)$, bordant un domaine U contenu dans S on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_U K(x) \sigma = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 k_g(t) dt + \chi(U)$$

où $\chi(U)$ est la somme des indices des zéros contenus dans U d'un champ de vecteurs tangent à S et à ∂U (i.e. on pourra supposer $X(\gamma(t)) = \dot{\gamma}(t)$).

- ii. Montrer que si γ possède des coins, i.e. est C^∞ par morceaux, et sa dérivée ayant des discontinuités en $\tau \in \{t_1, \dots, t_k\}$ avec $\alpha_\tau = \text{angle}(\lim_{t \rightarrow \tau^+} \dot{\gamma}(t) - \lim_{t \rightarrow \tau^-} \dot{\gamma}(t))$ ⁶

$$\frac{1}{2\pi} \int_U K(x) \sigma = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 k_g(t) dt + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n \alpha_j + \chi(U)$$

où on note $\alpha_j = \alpha_{t_j}$.

- iii. En déduire que pour un triangle T dont les côtés ont une courbure géodésique nulle, et dont les angles sont $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, on a

$$\pi - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) = \int_T K(x) \sigma$$

(K) (Géodésiques) Soit γ une courbe tracée sur une surface S . On suppose $\dot{\gamma}(t)$ de norme un, et on note $k_g(t)b(t)$ la projection de $\ddot{\gamma}(t)$ sur l'orthogonal au vecteur tangent à la courbe dans le plan tangent à S .

On appelle énergie de γ la quantité

$$E(\gamma) = \int_0^1 |\dot{\gamma}(t)|^2 dt$$

Montrer que si X est un champ de vecteurs tangent à S et s'annulant en $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$, et de flot φ^t ,

$$\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \int_0^1 \left| \frac{d}{dt} \varphi^s(\gamma(t)) \right|^2 dt = \int_0^1 \langle k_g(t)b(t), X(\gamma(t)) \rangle dt$$

En déduire que si γ minimise $E(\gamma)$ parmi les courbes à extrémités fixées, on a $k_g = 0$.

(L) (a) Montrer que si v est un vecteur unitaire tangent à S en x_0 , l'équation

$$\dot{\gamma}(0) = v, \quad \gamma(t) \in S, \quad \ddot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)} S^\perp$$

possède une solution unique définie sur $[0, \varepsilon]$, avec ε indépendant de v .

6. les dérivées à droite et à gauche étant supposées non nulles.

- (b) Montrer que l'application qui à v associe $\gamma(t)$ définie pour $|t| \leq \varepsilon$ et notée $\exp(tv)$ est telle que $D \exp(0) = Id$. En déduire que si x, y sont deux points suffisamment proches, on a une unique courbe $\gamma(t)$ reliant x à y et de longueur minimale (parmi toutes les courbes reliant x à y).
- (M) (**Teorema Egregium de Gauss**) On appelle métrique Riemannienne sur une sous-variété M la donnée en chaque point de $T_x M$ d'une forme quadratique dont les coefficients varient de manière C^∞ avec x . La norme euclidienne sur \mathbb{R}^3 induit sur toute surface une métrique Riemannienne. Déduire des deux exercices précédents que $K(x)$ ne dépend que de la métrique induite par \mathbb{R}^3 et non du plongement. En d'autres termes, s'il existe un difféomorphisme φ entre deux surfaces plongées, S_1, S_2 , préservant la métrique, c'est-à-dire tel que

$$\langle h_2, h_1 \rangle = \langle d\varphi(x)h_2, d\varphi(x)h_1 \rangle$$

Alors $K_2(\varphi(x)) = K_1(x)$.

Chapitre 6

Calcul différentiel de Lie

1 Les champs de vecteurs vus comme dérivations

Soit $D : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ un opérateur linéaire, c'est-à-dire tel que $D(\lambda f + \mu g) = \lambda D(f) + \mu D(g)$ pour $f, g \in C^\infty(M)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Définition 6.1. L'opérateur D est une dérivation si et seulement si $D(f \cdot g) = D(f) \cdot g + f \cdot D(g)$.

Remarque 1.1. (A) La définition entraîne que $D(1) = 0$ car $1 = 1 \cdot 1$ et donc $D(1) = 1 \cdot D(1) + D(1) \cdot 1 = 2 \cdot D(1)$ et donc $D(1) = 0$. On en déduit par linéarité que D s'annule sur les fonctions constantes.

(B) Si $\varphi : M \longrightarrow N$ est un difféomorphisme, et D une dérivation sur M , $(\varphi_* D)(f) = D(f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}$ est une dérivation sur N .

Exemple 1.1. Si X est un champ de vecteurs sur M , l'opérateur $L_X : f \rightarrow X \cdot f$ donné par $X \cdot f(x) = Df(x)X(x)$ est une dérivation, notée D_X . Si φ est un difféomorphisme, $(\varphi_* D_X) = D_{\varphi_*(X)}$ où on pose $\varphi_*(X) = d\varphi(x)X(\varphi^{-1}(x))$.

Proposition 6.2. Toute dérivation est de la forme D_X pour un champ de vecteurs $X \in C^\infty$ sur M .

Démonstration. Par partition de l'unité subordonnée à un recouvrement par des cartes, si D est une dérivation, $D = \sum_j \rho_j D$ et $\rho_j D = D_j$ est une dérivation. En effet, $D_j(f \cdot g) = \rho_j D(f \cdot g) = \rho_j D(f) \cdot g + f \rho_j D(g) = f D_j(g) + g D_j(f)$. Il suffit donc de montrer que D_j est donné par un champ de vecteurs X_j . Or on a le

Lemme 6.3 (Hadamard). Soit f une fonction C^∞ sur $B(0, 1)$. Il existe alors des fonctions f_j de classe C^∞ , telles que

$$f(x) = f(y) + \sum_{j=1}^n (x_j - y_j) \cdot f_j(x; y)$$

Démonstration. On écrit la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre un pour $t \mapsto f(tx)$ qui donne

$$f(x) = f(y) + \int_0^1 df(y + t(x - y)) \cdot (x - y) dt = \sum_{j=1}^n (x_j - y_j) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(y + t(x - y)) dt$$

et la fonction $f_j(x; y) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(y + t(x - y)) dt$ répond à la question. \square

Nous pouvons maintenant terminer la démonstration. Tout d'abord que f est un opérateur local, c'est-à-dire que $D(f)(y)$ ne dépend que de la restriction de f à un voisinage (arbitrairement petit) de y . En effet, il suffit de montrer que si $f = 0$ dans un voisinage V de y on a $D(f)(y) = 0$. Mais l'hypothèse entraîne que $f(x) = \rho(x)f(x)$ où ρ est nulle au voisinage de y et vaut 1 hors de V , on a

$$D(f)(y) = D(\rho \cdot f)(y) = \rho(y)D(f)(y) + D(\rho)(y)f(y) = 0$$

On a donc $D(f)(0) = D(f(0))(0) + \sum_{j=1}^n D(x_j)(0) \cdot f_j(0)$ mais comme $x_j(0) = 0$ et $f_j(0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(0)$, on a $D(f)(0) = \sum X_j(0) \frac{\partial f}{\partial x_j}(0) = df(0)X(0)$ en posant $X(0) = (X_1(0), \dots, X_n(0))$. De même en remplaçant 0 par y , on a $Df(y) = df(y)X(y)$ et l'application $y \mapsto X(y)$ est de classe C^∞ , car si $f = x_j$, on obtient que $D(x_j)(y) = X_j(y)$ qui doit être C^∞ . \square

Remarque 1.2. Si on essaye de faire la théorie dans le cas de différentiabilité finie, on rencontre des difficultés, car $y \mapsto df(y)X(y)$ est au mieux C^{k-1} si f est C^k .

Certaines opérations sur les champs de vecteurs deviennent plus naturelles lorsqu'elles sont vues comme dérivations.

Exemple 1.2. On verra que le commutateur de deux dérivations, D, E défini comme $[D, E] = D \circ E - E \circ D$ est une dérivation. Si D, E sont associés à X, Y , $[D, E]$ est associé à un champ de vecteurs noté $[X, Y]$. On vérifie que sur \mathbb{R}^n ,

$$[X, Y](x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[X_i(x) \frac{\partial Y_j(x)}{\partial x_i}(x) - Y_i(x) \frac{\partial X_j(x)}{\partial x_i}(x) \right] \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Pour la démonstration, il suffit de montrer que $\left[\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k} \right] = 0$ et ensuite que

$$\left[f(x) \frac{\partial}{\partial x_j}, g(x) \frac{\partial}{\partial x_k} \right] = f(x)g(x) \left[\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k} \right] + f(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} g(x) \right) \frac{\partial}{\partial x_k} - g(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_k} f(x) \right) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

1.1 Flot d'un champ de vecteurs

Soit $X(t, x)$ un champ de vecteurs. Notons que dire que X est localement Lipschitzien dans une carte a bien un sens, vu que les changements de carte sont C^1

donc localement Lipschitziens. On en déduit qu'il existe localement un flot $\varphi_{t_0}^{t_1}$ tel que $\frac{d}{dt}\varphi^t(x)|_{t=\tau} = X(\tau, \varphi^\tau(x))$ pour $t \in [t_0, t_1]$ et $x \in U$, où U est un ouvert. Notons que $\frac{d}{dt}\varphi^t(x)|_{t=\tau}$ est par définition un vecteur tangent à M . L'unicité locale entraîne l'unicité de φ^t . Mais comme dans le cas de \mathbb{R}^n se pose la question du temps de vie de la solution. On va montrer que comme dans le cas de \mathbb{R}^n , on a

Proposition 6.4. *Soit $x(t)$ une solution de $\dot{x}(t) = X(t, x(t))$ où X est un champ de vecteurs Lipschitzien en x et continu en t . Soit $]t_0, t_+[$ un intervalle de définition de x qui soit maximal à droite, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'extension de x à un intervalle $]t_0, t'_+[$ avec $t_+ < t'_+$. Alors x sort définitivement de tout compact, c'est-à-dire que quel que soit le compact K de M , il existe $t_K < t_+$ tel que $x(]t_K, t_+]) \cap K = \emptyset$.*

Démonstration. La démonstration est la même que dans \mathbb{R}^n en utilisant une carte. Si il existait une suite t_n convergeant vers t_+ telle que $x(t_n) \in K$ on aurait en prenant une sous-suite convergente $\lim_n x(t_n) = x \in K$. On utilise alors une carte en x pour montrer à un champ $Y(t, y)$ et une solution $y(t)$ définie sur \mathbb{R}^n . On aura alors $\lim_n y(t_n) = y$ et on sait que le problème de Cauchy $\dot{y}(t) = Y(t, y(t)), y(t_n) = y_n$ possède une unique solution définie sur un intervalle ouvert centré en t_n et de longueur au moins $\alpha > 0$. On en déduit que pour n assez grand, $y(t)$ est définie sur un intervalle contenant strictement t_+

□

Corollaire 6.5. *Le flot d'un champ de vecteurs sur une variété compacte est défini pour tout t .*

1.1.1 Champs de vecteurs sur les sous-variétés

Dans cette sous-section, les champs de vecteurs seront supposés avoir un flot défini pour tout temps. Il est utile de caractériser simplement les équations différentielles dont les solutions restent dans une sous-variété :

Proposition 6.6. *Soit V une sous-variété fermée de \mathbb{R}^n et X une équation différentielle telle que*

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \forall v \in V, \quad X(t, v) \in T_v V$$

Si γ est une solution de $\dot{\gamma}(t) = X(t, \gamma(t))$ définie sur un intervalle $[0, s]$, telle que $\gamma(0) \in V$, alors $\gamma([0, s])$ reste dans V .

Démonstration : Soit $\tau = \sup\{t \in [0, 1] \mid \gamma([0, t]) \subset V\}$, on veut montrer que $\tau = s$. Tout d'abord, V étant fermée, $\gamma(\tau) \in V$. Il suffit alors de montrer que $\gamma([\tau, \tau + \varepsilon]) \subset V$ pour ε assez petit.

Soit φ une carte de V autour de $\gamma(\tau)$

$$\varphi : V \cap U \rightarrow \varphi(U) \cap \mathbb{R}^p \times \{0\}$$

Alors si $Y = \varphi_*(X)$, ou encore $Y(t, \varphi(x)) = d\varphi(x)X(t, x)$, la courbe $\sigma(t) = \varphi(\gamma(t))$ vérifie

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{\sigma}(t) = Y(t, \sigma(t)) \\ \sigma(t_0) \in \mathbb{R}^p \times \{0\} \end{cases}$$

Puisque si $z \in \mathbb{R}^p \times \{0\}$, $Y(t, z) \in \mathbb{R}^p \times \{0\}$, en posant $\sigma(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ l'équation (1) équivaut à

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = A(t, x(t), y(t)) \\ \dot{y}(t) = B(t, x(t), y(t)) \\ x(\tau) = x_0, y(\tau) = 0 \end{cases}$$

où B vérifie $B(t, x, 0) = 0$. La seconde équation a pour solution $y \equiv 0$, et si x est la solution de

$$\dot{x}(t) = A(t, x(t), 0), x(\tau) = x_0$$

dont l'existence nous est garantie par le théorème de Cauchy-Lipschitz, on constate que $(x(t), 0)$ est solution de (1), et par le même théorème, c'est la seule.

On en conclut que y reste nul tant qu'il est défini, c'est à dire sur $] \tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon[$, d'où

$$\sigma(t) \in \varphi^{-1}(\mathbb{R}^p \times \{0\}) = U \cap V$$

pour $t \in] \tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon[$. Donc sur cet intervalle, $\gamma(t) = \varphi(\sigma(t)) \in V$, ce qui contredit la maximalité de τ \square

Exercice 1.1. Si $X(0, x) \notin T_x V$ pour un $x \in V$, il existe une solution de $\dot{\gamma} = X(t, \gamma)$ qui est sur V en $t = 0$ et quitte V pour $t > 0$.

Remarque 1.3. La fermeture de la sous-variété V est essentielle. En effet, si $V = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$, on aura que le champ de vecteurs $X(x, y) = (0, 1)$ est tangent à V , mais $\varphi_1(0, -1) = (0, 0) \notin V$.

Exemples 1.1. (A) Soit $X(t, x)$ un champ de vecteurs tel que $X(t, x)$ soit orthogonal à x .

Alors son flot préserve les sphères. (voir un cas particulier dans l'exemple suivant).

(B) Soit $\dot{M}(t) = \Omega(t) \wedge M(t)$, où $M(t), \Omega(t)$ sont des vecteurs de \mathbb{R}^3 . Cette équation décrit le mouvement libre d'un solide de moment cinétique $M(t)$ et de moment d'inertie Ω .

On a alors

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} |M(t)|^2 \right) = \langle \dot{M}(t), M(t) \rangle = \langle \Omega(t) \wedge M(t), M(t) \rangle = 0$$

On en déduit que la variété $|M|^2 = |M(0)|^2$ est préservée, c'est à dire que le moment cinétique est de norme constante.

(C) Si $H(q, p)$ est une fonction sur \mathbb{R}^{2n} , et $X_H = \left(\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q} \right)$. Puisque $dH(q, p)X_H(q, p) = 0$, X_H est tangent aux hypersurfaces $\{H(q, p) = C\}$ et le flot préserve ces hypersurfaces. En fait dans ce cas, il suffit de dire que la fonction $t \mapsto H(q(t), p(t))$ a sa dérivée identiquement nulle.

2 Crochets de Lie

On notera $\mathfrak{X}^\infty(M)$ l'espace des champs de vecteurs C^∞ sur M . Soient X et Y deux champs de vecteurs définis sur un ouvert de \mathbb{R}^n , φ^t et ψ^t leurs flots respectifs, supposés définis pour tout temps. Ces flots ne commutent généralement pas, $\varphi^t \circ \psi^s \neq \psi^s \circ \varphi^t$, comme on le voit sur l'exemple suivant :

$$X(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y(x, y) = x^2 \frac{\partial}{\partial y}$$

Alors $\varphi^t(x, y) = (x+t, y)$ et $\psi^s(x, y) = (x, y+sx^2)$ d'où $\varphi^t \circ \psi^s(x, y) = (x+t, y+sx^2)$ tandis que $\psi^s \circ \varphi^t(x, y) = (x+t, y+s(x+t)^2)$

On veut en général mesurer cette « non-commutativité » au premier ordre. Posons pour deux champs de vecteurs X, Y définis sur une variété M ,

Définition 6.7. On pose $[X, Y] = \frac{d}{dt}(\psi^t)_*(X) |_{t=0}$.

On appelle le champ de vecteurs $[X, Y]$ le **crochet de Lie** de X et Y .

Proposition 6.8 (Propriétés des crochets de Lie). .

- (A) Si D_X est la dérivation associée à X , on a $D_X D_Y - D_Y D_X = D_{[X, Y]}$
- (B) $[X, Y] = 0$ si et seulement si les flots de X et de Y commutent
- (C) $[X, Y] = -[Y, X]$, $[X, Y + Z] = [X, Y] + [X, Z]$ (antisymétrie et bilinéarité)
- (D) $[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0$ (identité de Jacobi)
- (E) Si X et Y sont tangents à une sous-variété V , alors $[X, Y]$ l'est aussi.

Démonstration. ¹

Pour le premier point, $(\frac{d}{dt}(\psi^t)_* D_X)|_{t=0} = (\frac{d}{dt} D_{(\psi^t)_* X})|_{t=0} = D_{(\frac{d}{dt}(\psi^t)_* X)|_{t=0}} = D_{[X, Y]}$.
Mais on a

$$\begin{aligned} & (\frac{d}{dt}(\psi^t)_* D_X f)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(D_X(f \circ (\psi^t)) \circ (\psi^t)^{-1})|_{t=0} = \\ & D_X(\frac{d}{dt} f \circ (\psi^t))|_{t=0} + \frac{d}{dt}(D_X(f) \circ (\psi^t)^{-1})|_{t=0} = D_X D_Y f - D_Y D_X f \end{aligned}$$

car si ψ^t est le flot de Y , $(\psi^t)^{-1}$ est le flot de $-Y$ vu que $0 = \frac{d}{dt} \psi^t (\psi^t)^{-1}|_{t=0} = (\frac{d}{dt} \psi^t)|_{t=0} + (\frac{d}{dt} (\psi^t)^{-1})|_{t=0} = Y(x) + \frac{d}{dt} (\psi^t)^{-1}|_{t=0}$.

Pour le second point supposons $[X, Y] = 0$, alors

1. Toutes les étapes sont faciles si on sait dériver une fonction composée de plusieurs variables. Si $F(t, y)$ est C^∞ , on a $\frac{d}{dt}(F(t, g(t, x))) = (\frac{d}{dt} F)(t, g(t, x)) + \frac{d}{dy} F(t, g(t, x)) \frac{d}{dt} g(t, x)$ et si on n'oublie pas que le flot $\varphi^t(x)$ est en fait une fonction des deux variables (t, x) .

$$\frac{d}{dt}(\psi^t)_*(X) \Big|_{t=t_0} = \frac{d}{dt}(\psi^{t+t_0})_*(X) \Big|_{t=0} = (\psi^{t_0})_* \frac{d}{dt}(\psi^t)_*(X) \Big|_{t=0} = (\psi^{t_0})_*([X, Y]) = 0$$

Cela montre que $(\psi^t)_*(X)$ est indépendant de t , donc égal à Y . L'égalité de leurs flots s'écrit $\psi^t \circ \varphi^s \circ (\psi^t)^{-1} = \varphi^s$ ce qui signifie que les flots de X et Y commutent. Inversement si X et Y commutent, $\psi^t \circ \varphi^s \circ (\psi^t)^{-1} = \varphi^s$, et l'égalité des générateurs infinitésimaux de ces flots s'écrit $(\psi^t)_*(X) = Y$. Il est alors clair que $[X, Y] = 0$.

Montrons maintenant le troisième point résulte immédiatement de (A).

Puisque $(\psi^t)_*$ est linéaire, sa dérivée par rapport à t l'est aussi, d'où $[X, Y + Z] = [X, Y] + [X, Z]$.

L'identité de Jacobi résulte de la formule (A).

Enfin, supposons que X et Y soient tangents à V . Alors, ψ^t préserve V , et donc $d\psi^t$ envoie l'espace tangent à V en x sur l'espace tangent à V en $\psi^t(x)$. Puisque X est partout tangent à V , $(\psi^t)_*(X)(x)$ est une courbe de l'espace tangent à V en x , et donc la dérivée de ce chemin est encore contenue dans cet espace tangent. \square

Remarque 2.1. Il ne suffit pas que X et Y soient tangents à V en x_0 pour que $[X, Y]$ le soit. Plus généralement, $[X, Y](x_0)$ **ne dépend pas seulement** des valeurs de X et Y en x_0 mais aussi de leurs dérivées (comme cela résultera clairement de la proposition 6.10). Par exemple, si on note par abus de langage les champs de vecteurs constants égaux au vecteur de base e_i , par e_i , on a $[e_3, x_3 e_2] = e_2$, pourtant les champs e_3 et $x_3 e_2$ sont tangents en 0 à $\{x_2 = x_3 = 0\}$ mais ce n'est pas le cas de leur crochet, e_2 .

Par contre, si X et Y sont tangents à V au voisinage de x , alors $[X, Y](x)$ est tangent à V en x .

Définition 6.9. On appelle algèbre de Lie un espace vectoriel V muni d'une forme bilinéaire antisymétrique $(u, v) \mapsto [u, v]$ vérifiant l'identité de Jacobi

$$[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0.$$

On a donc montré que l'espace des champs de vecteurs C^∞ sur M , noté $\mathfrak{X}^\infty(M)$ muni du crochet de Lie est une algèbre de Lie.

La proposition suivante permet le calcul aisé des crochets de Lie, sans qu'il soit nécessaire d'intégrer des flots.

Proposition 6.10 (Calcul des crochets de Lie). *On a*

(A) *Si f est une fonction C^∞*

$$[X, f \cdot Y](x) = f(x) \cdot [X, Y](x) + (df(x)X(x))Y(x)$$

(B) Si X, Y sont des champs de vecteurs sur \mathbb{R}^n , on a

$$[X, Y] = dY(x)X(x) - dX(x)Y(x)$$

Démonstration : La première égalité équivaut à montrer que

$$[f \cdot X, \cdot Y](x) = f(x) \cdot [X, Y](x) - (df(x)Y(x))X(x)$$

En effet, $(\psi^t)_*(f \cdot X) = f(\psi^{-t}(x))(\psi^t)_*(X)$ donc en dérivant par rapport à t , et utilisant que $\frac{d}{dt}f(\psi^t(x))|_{t=0} = -df(x)Y(x)$ l'identité en résulte.

Pour la deuxième formule, si elle est vraie pour X et Y elle le sera pour X et $f \cdot Y$ car le terme de gauche devient

$$df(X)Y + f \cdot [X, Y] = df(X)Y + f(dY(X) - dX(Y)) = d(f \cdot Y)X - dX(f \cdot Y)$$

Par antisymétrie on peut aussi remplacer X par $g \cdot X$ et enfin par bilinéarité des deux termes, il suffit de le vérifier pour X et Y champs de vecteurs constants, car tout champ de vecteurs est combinaison linéaire à coefficients $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ des vecteurs de base e_i .

Or $[e_i, e_j] = 0$ car les flots des champs de vecteurs constants commutent, et comme $de_i = 0$, l'égalité est évidente dans ce cas.

Variante : $D_X D_Y f = D_X(df(x)Y(x)) = d(df(x)Y(x))X(x) = d^2 f(x)(Y(x), X(x)) + df(x)dY(x)X(x)$ et la formule en résulte. \square

Exercice 2.1 (Exercice corrigé). Démontrer la proposition directement, en utilisant la définition de $[X, Y]$ et le fait que $L(t, x) = d\psi^t(x)$ et que l'application

$$L : \mathbb{R} \times M \rightarrow \mathcal{L}(T_x M, T_{\psi^t(x)} M)$$

vérifie

$\frac{d}{dt}L(t, x) = dY(\psi^t(x))L(t, x)$, comme on le voit en différenciant par rapport à x la relation $\frac{d}{dt}\psi^t(x) = Y(\psi^t(x))$.

En effet, $(\psi^t)_*X(x) = L(t, \psi^{-t}(x))X(\psi^{-t}(x))$

et donc

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\psi^t)_*X(x)|_{t=0} &= \frac{d}{dt}(L(t, \psi^{-t}(x))X(\psi^{-t}(x))|_{t=0}) \\ &= \frac{d}{dt}(L(t, x))|_{t=0} X(x) + dL(t, x)\frac{d}{dt}\psi^{-t}(x)|_{t=0} X(x) + L(t, x)\frac{d}{dt}X(\psi^{-t}(x))|_{t=0} \\ &= dY(x)X(x) - dL(0, x)(Y(x), X(x)) - dX(x)Y(x) \end{aligned}$$

Comme $L(0, x) = Id$, on a $dL(0, x) = 0$ et le deuxième terme est nul, ce qui conduit à la formule annoncée

Exemple 2.1. (A) Soit $GL(n, \mathbb{R})$ le groupe des matrices inversibles de \mathbb{R}^n . C'est un ouvert de l'ensemble des matrices, qui forment un espace vectoriel de dimension n^2 . L'espace tangent à $GL(n)$ est donc égal à $M(n, \mathbb{R})$.

Il existe alors des champs de vecteurs particuliers sur $GL(n, \mathbb{R})$, appelés invariants à gauche, donnés par $X_A(M) = MA$ où A est une matrice fixée², et ces champs engendrent sur $C^\infty(GL(n, \mathbb{R}))$ tous les champs de vecteurs³ sur $GL(n, \mathbb{R})$.

Quel est alors le crochet $[X_A, X_B]$?

En utilisant le calcul ci-dessus, $dX_A(M)(H) = MHA$, et donc

$[X_A, X_B] = dX_B(X_A)(M) - dX_A(X_B)(M) = M(AB - BA) = X_{AB-BA}(M)$ On pose alors $[A, B] = AB - BA$

Exercice : Faire le calcul en utilisant le flot de X_A

Le flot est donné par $\frac{d}{dt}M(t) = X_A(M(t)) = M(t)A$ dont la solution est $M(t) = M(0)e^{tA}$.

Les flots de X_A et X_B commutent si et seulement si $e^{tA}e^{sB} = e^{sB}e^{tA}$. Or il résulte des propriétés du crochet de Lie, que cela ne peut arriver pour tout s, t que si A et B commutent.

(B) Soit $SO(n)$ le groupe des rotations de \mathbb{R}^n , identifié aux matrices carrées de $GL(n, \mathbb{R})$ telles que $MM^* = I$ et $\det(M) > 0$

L'espace tangent en M s'obtient en dérivant l'équation $MM^* = I$ (prescrire le signe de $\det(M)$ ne sert qu'à se limiter à la composante connexe des isométries préservant l'orientation), et est donné par l'équation $MA^* + AM^* = 0$. Ce sont donc les matrices telles que AM^{-1} soit antisymétrique, ce qui équivaut aussi à dire que $M^{-1}A$ soit antisymétrique.

Un champ de vecteurs sur $SO(n)$ peut donc s'identifier à une application de $SO(n)$ dans l'ensemble des matrices antisymétriques : on associe à $A(M)$, la matrice antisymétrique $M^{-1}A(M)$. Les champs de vecteurs invariants à gauche sont ceux pour lesquels cette matrice est constante, sont ceux de la forme $A(M) = MA = X_A(M)$, où X_A a été défini dans l'exemple précédent.

Parmi les champs de vecteurs X_A de $GL(n, \mathbb{R})$ invariants à gauche, ceux tangents à $SO(n)$ sont ceux correspondant à une matrice A antisymétrique. Et clairement tout champ de vecteurs sur $SO(n)$ est combinaison linéaire de ceux-ci.

Quel est alors le crochet de X_A et X_B ? En remarquant que le crochet de Lie de deux champs de vecteurs ne dépend pas de la sous-variété sur laquelle on le considère, donc on a encore $[X_A, X_B] = X_{AB-BA}$. On vérifie que si A et B sont antisymétriques, $AB - BA$ l'est aussi !

(C) En particulier si $n = 3$, les matrices antisymétriques forment un espace de dimension 3. Le produit vectoriel identifie ces espaces :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 &\longrightarrow M(3, \mathbb{R}) \\ v &\longrightarrow L_v \end{aligned}$$

2. La terminologie « invariant à gauche » vient de ce qu'ils vérifient $X_A(UM) = UX_A(M)$.

3. On fera attention à ne pas confondre combinaisons linéaires sur $C^\infty(M)$ et sur \mathbb{R} .

où $L_v(x) = v \wedge x$. L'application L_v est bien linéaire et antisymétrique, et de plus on vérifie que $L_v L_w - L_w L_v = L_{v \wedge w}$ (il suffit de le vérifier si v, w sont colinéaires, où sur les vecteurs $v, w, v \wedge w$).

On a ainsi identifié les champs de vecteurs tangents à $SO(3)$ aux fonctions à valeurs dans \mathbb{R}^3 .

Si $R(t)$ est un chemin dans $SO(3)$, on a alors $\dot{R}(t) = \Omega(t)R(t)$ et $\Omega(t) = L_{\omega(t)}$. Le vecteur $\omega(t)$ est porté par l'axe instantané de rotation et sa norme est la vitesse instantanée de rotation autour de cet axe.

On renvoie au chapitre sur les théorèmes de Frobenius et Chow, pour des applications de crochets de Lie.

On a aussi la formule suivante, liant crochets et différentielle extérieure. Celle-ci jouera un rôle important dans le calcul de la cohomologie des groupes de Lie.

Proposition 6.11. *Soient X_0, X_1, \dots, X_p des champs de vecteurs sur M et ω une p -forme différentielle sur M . On a alors*

$$d\omega(X_0, \dots, X_p) = \sum_{j=0}^p (-1)^j X_j \omega(X_0, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_p) + \sum_{j < k} (-1)^{j+k} \omega([X_j, X_k], X_0, \dots, \widehat{X}_j, \dots, \widehat{X}_k, \dots, X_p)$$

Démonstration. Il est important de noter que le terme de gauche est un tenseur (c'est-à-dire que sa valeur en x_0 ne dépend que des $X_j(x_0)$) alors que les termes de droite (pris séparément) n'en sont pas : ni $[X_j, X_k](x_0)$ ni $X_j \omega(X_0, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_k)(x_0)$ ne peuvent se calculer si on ne connaît que les $X_j(x_0)$ et $\omega(x_0)$, mais bien entendu leur somme est un tenseur.

Tout d'abord les deux expressions dont on veut montrer l'égalité sont

- alternées en les X_j

- linéaires sur $C^\infty(M)$, i.e. si on multiplie X_j par $f \cdot X_j$, les deux termes sont multipliés par f . Il suffit en effet de le vérifier pour X_0 . Or remplacer X_0 par $f X_0$ multiplie le terme de gauche par f , et le terme de droite devient

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^p (-1)^j X_j \omega(f \cdot X_0, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_k) + \sum_{j < k} (-1)^{j+k} \omega([X_j, X_k], f \cdot X_0, \dots, \widehat{X}_j, \dots, \widehat{X}_k, \dots, X_p) = \\ & f \cdot \sum_{j=0}^p (-1)^j X_j \omega(X_0, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_k) + f \cdot \sum_{0 < j < k} (-1)^{j+k} \omega([X_j, X_k], X_0, \dots, \widehat{X}_j, \dots, \widehat{X}_k, \dots, X_p) + \\ & \sum_{j=1}^p (-1)^j (X_j f) \omega(X_0, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_k) + \sum_{0 < j} (-1)^j \omega([f X_0, X_j] + f \cdot [X_j, X_0], X_1, \dots, X_j, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_p) \end{aligned}$$

Les deux derniers termes s'annulent, car

$$[fX_0, X_j] = -[X_j, fX_0] = -f \cdot [X_j, X_0] - (X_j f)X_0$$

On en déduit que si $X_0(x_0) = 0$, $X_0 = f_0 \cdot Z_0$ où f_0 est une fonction qui s'annule en x_0 et donc le terme de droite est un multiple de f et donc s'annule en 0. Donc le terme de droite, calculé en x_0 , ne dépend que des $X_j(x_0)$. On peut alors supposer que les X_j commutent, et sont donc les p premiers vecteurs d'une base. Alors la formule se réduit à montrer que

$$d\omega(X_0, \dots, X_p) = \sum_{j=0}^p (-1)^j X_j \omega(X_0, \dots, \widehat{X_j}, \dots, X_k)$$

et par additivité il suffit de le faire pour une forme du type $f(x)dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$ et pour $X_j = e_{j+1}$. On doit alors montrer $df(x)e_{j+1} = \frac{\partial}{\partial x_{j+1}} f(x)$ ce qui est évident. \square

3 Dérivée de Lie

L'idée de dériver un objet le long d'un flot peut s'appliquer à autre chose qu'un champ de vecteurs.

Définition 6.12. Soit α une forme différentielle, et X un champ de vecteurs. On note $L_X \alpha$ la forme différentielle de même degré donnée par

$$L_X \alpha = \frac{d}{dt} (\varphi^t)^* \alpha |_{t=0}$$

Exemple 3.1. (A) Si f est une fonction, $(\varphi^t)^* f(x) = f(\varphi^t(x))$ et donc

$$\frac{d}{dt} (\varphi^t)^* f(x) |_{t=0} = \frac{d}{dt} (f(\varphi^t(x)) |_{t=0} = df(x)X(x)$$

Remarques 3.1. (A) L_X commute à d car $(\varphi^t)^* d\alpha = d(\varphi^t)^* \alpha$ et $\frac{d}{dt}$ et d commutent donc,

$$\frac{d}{dt} (\varphi^t)^* d\alpha |_{t=0} = \frac{d}{dt} d(\varphi^t)^* \alpha |_{t=0} = d \frac{d}{dt} (\varphi^t)^* \alpha |_{t=0} = dL_X \alpha$$

Donc

$$(1) \quad L_X \circ d = d \circ L_X$$

(B) On a de plus

$$(2) \quad L_X(\alpha \wedge \beta) = L_X \alpha \wedge \beta + \alpha \wedge L_X \beta$$

En effet

$$(\varphi^t)^*(\alpha \wedge \beta) = (\varphi^t)^* \alpha \wedge (\varphi^t)^* \beta$$

donc par multilinéarité de la dérivation

$$\frac{d}{dt} [(\varphi^t)^* \alpha \wedge (\varphi^t)^* \beta] = \frac{d}{dt} (\varphi^t)^* \alpha |_{t=0} \wedge \beta + \alpha \wedge \frac{d}{dt} (\varphi^t)^* \beta |_{t=0}$$

De ce qui précède, on voit que L_X est une dérivation de l'algèbre $\Omega^*(M)$, qui étend D_X . De plus il suffit, pour calculer $L_X\alpha$ de décomposer α en somme de produits de formes de degré 1. Chaque forme de degré 1 est elle-même somme de termes de la forme fdg . Or $L_X(fdg)(x) = df(x)X(x)dg(x) + fd(L_Xg) = X \cdot fdg + fd(X \cdot g)$ où on note $X \cdot f(x) = df(x)X(x)$

La proposition suivante joue un rôle fondamental en topologie algébrique :

Proposition 6.13 (Formule de Lie-Cartan).

$$L_X = di_X + i_Xd$$

où i_X est l'application linéaire des formes de degré $p+1$ vers celles de degré p donnée par

$$(i_X\alpha)(x)(X_1, \dots, X_p) = \alpha(x)(X, X_1, \dots, X_p)$$

Démonstration. Montrons que le terme de droite vérifie aussi les propriétés (1) et (2). En effet, il est facile de vérifier que $i_X(\alpha \wedge \beta) = i_X\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge i_X\beta$. Donc

$$\begin{aligned} (di_X + i_Xd)(\alpha \wedge \beta) &= d(i_X\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge i_X\beta) + i_X(d\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge d\beta) = \\ &= (di_X\alpha) \wedge \beta + (-1)^{\deg(i_X\alpha)} i_X\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} d\alpha \wedge i_X\beta + (-1)^{\deg \alpha} (-1)^{\deg \alpha} \alpha di_X\beta + \\ &+ (i_Xd\alpha) \wedge \beta + (-1)^{\deg(d\alpha)} d\alpha \wedge i_X\beta + (-1)^{\deg \alpha} i_X\alpha \wedge d\beta + (-1)^{\deg \alpha} (-1)^{\deg \alpha} \alpha i_Xd\beta \end{aligned}$$

Comme $\deg(d\alpha)$ et $\deg(i_X\alpha)$ ont le même parité qui est toujours différente de celle de $\deg(\alpha)$ on voit aisément que la somme ci-dessus se réduit à

$$(di_X + i_Xd)\alpha \wedge \beta + \alpha \wedge (di_X + i_Xd)\beta$$

Pour ce qui est de (1), on a

$$d(di_X + i_Xd) = d^2i_X + di_Xd = di_Xd$$

alors que

$$(di_X + i_Xd)d = di_Xd + i_Xd^2 = di_Xd$$

Maintenant, deux opérateurs vérifiant (1) et (2), et qui coïncident sur les fonctions sont égaux en vertu de la remarque précédant l'énoncé de la proposition.

□

Enfin, le lien entre dérivée de Lie et crochet de Lie est le suivant

Proposition 6.14. Soit ω une p -forme et X_1, \dots, X_p des champs de vecteur. On a alors

$$L_Y(\omega(X_1, \dots, X_p)) = (L_Y\omega)(X_1, \dots, X_p) - \sum_j \omega(X_1, \dots, [Y, X_j], \dots, X_p)$$

Démonstration. On a pour un difféomorphisme φ l'égalité

$$\varphi^*(\omega(X_1, \dots, X_p)) = \varphi^*(\omega)(\varphi_*^{-1}(X_1), \dots, \varphi_*^{-1}(X_p))$$

La formule résulte alors en appliquant à ψ^t flot de Y , en dérivant par rapport à t et en utilisant la multilinéarité, et enfin le fait que $\frac{d}{dt}(\psi^t)_*X = -[Y, X]$.

□

Proposition 6.15 (Quelques propriétés de la dérivée de Lie).

- (A) L_X commute avec d
- (B) $L_X(\alpha \wedge \beta) = L_X\alpha \wedge \beta + \alpha \wedge L_X\alpha$. L'opérateur L_X est donc une dérivation de degré 0 de l'algèbre $\Omega^*(M)$.
- (C) $L_XL_Y - L_YL_X = L_{[X, Y]}$. L'application $X \rightarrow L_X$ est donc un morphisme d'algèbres de l'algèbre des champs de vecteurs munie du crochet dans l'algèbre des dérivations de $\Omega^*(M)$ munie du commutateur.
- (D) $L_Xi_Y - i_YL_X = i_XL_Y - L_Yi_X = i_{[X, Y]}$
- (E) $L_{fX}\alpha = fL_X\alpha + df \wedge i_X\alpha$

Démonstration. Les démonstrations ont soit été vues, soit laissées au lecteur qui montrera qu'il suffit de vérifier le cas des fonctions dans le cas (C) où des 1-formes dans le cas (D). □

4 Exercices

- (A) Soit G un groupe de Lie connexe, et \mathfrak{g} son algèbre de Lie. On suppose que $[X, Y] = 0$ quels que soient $X, Y \in \mathfrak{g}$.
 - (a) Montrer que $\exp(Y)\exp(X) = \exp(X) \cdot \exp(Y)$. On pourra utiliser le fait que $t \mapsto \exp(sX)\exp(tY)\exp(-sX)$ est le flot de $(\exp(sX))_*Y$, et calculer $(\frac{d}{ds}(\exp(sX))_*Y)|_{s=s_0}$.
 - (b) En déduire que $\exp(X + Y) = \exp(X) \cdot \exp(Y)$
 - (c) En déduire que \exp est un morphisme de groupes de $(\mathbb{R}^n, +)$ vers G
 - (d) Montrer que \exp est surjective.
 - (e) Montrer que le noyau de \exp est un sous groupe discret de \mathbb{R}^n . On admettra qu'un tel sous-groupe est isomorphe à \mathbb{Z}^k et donc que G est isomorphe à $\mathbb{R}^{n-k} \times T^k$.

(B) (**Théorème de Smale**)

Dans tout le problème, on dira qu'un espace topologique X est contractile sur $x_0 \in X$ s'il existe une famille continue d'applications $h_s : X \rightarrow X$, $s \in [0, 1]$ telles que

- (a) $h_0 = Id_X$

- (b) $\forall x \in X, h_1(x) = x_0$
 (c) $\forall s \in [0, 1], h_s(x_0) = x_0$

On dit que h_s est l'homotopie réalisant la déformation de X sur x_0 .

Enfin une application $\varphi : f \mapsto g$ de l'espace des fonctions C^∞ dans lui-même est continue si et seulement si les dérivées partielles de $\varphi(f)$ dépendent continûment de celles de f (pas nécessairement au même ordre). Par exemple la restriction d'une application continue pour toutes les topologies C^k ($\forall k \geq 1$) et l'application $f \mapsto df$ sont continues en topologie C^∞ .

Le but de ce problème est de montrer que l'espace

$$D = \{f \in C^\infty(I^2, I^2) \mid f \text{ est un difféo et } f = id \text{ au voisinage de } \partial I^2 - \{1\} \times [0, 1]\}$$

est contractile.

I. Espace d'applications à valeurs dans S^1 (une autre démonstration du théorème de relèvement dans le cas C^∞).

Soit I l'intervalle $[0, 1]$, on définit $\partial I = \{0, 1\}$, $\partial I^2 = \{0, 1\} \times [0, 1] \cup [0, 1] \times \{0, 1\}$. On dira qu'une application définie sur I^2 est C^∞ si elle a des dérivées partielles à tous les ordres, continues sur I^2 . Soit f une application C^∞ de I^2 à valeurs dans S^1 . On se propose de montrer que $F = \{f \in C^\infty(I^2, S^1) \mid f(0, 0) = 1\}$ est contractile sur $f_0 \equiv 1$. On pose

$$\xi_1(x_1, x_2, \theta) = (1, 0, \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2)), \quad \xi_2(x_1, x_2, \theta) = (0, 1, \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2))$$

- (a) Montrer que les trajectoires de ξ_1 partant de $(x_1, x_2, f(x_1, x_2))$ sont données par l'équation $t \mapsto (x_1 + t, x_2, f(x_1 + t, x_2))$, tant que $t + x_1 \in [0, 1]$. De même la trajectoire de ξ_2 est donnée par $t \mapsto (x_1, x_2 + t, f(x_1, x_2 + t))$.
- (b) Soit p la projection de R sur S^1 donnée par $p(u) = \exp(iu)$, et π la projection de $I^2 \times R$ sur $I^2 \times S^1$ donnée par $id_{I^2} \times p$. Calculer $d\pi$, et montrer qu'il existe deux champs de vecteurs $\tilde{\xi}_1$ et $\tilde{\xi}_2$ sur $I^2 \times R$ tels que $d\pi(z)\tilde{\xi}_j(z) = \xi_j(\pi(z))$ pour $j = 1, 2$.
- (c) Montrer que $[\xi_j, \xi_k] = 0$ et en déduire que $[\tilde{\xi}_j, \tilde{\xi}_k] = 0$.
- (d) Montrer en utilisant les champs de vecteur construits ci-dessus que l'on peut construire $\tilde{f} : I^2 \rightarrow R$ telle que $p \circ \tilde{f} = f$ et $\tilde{f}(0, 0) = 0$.
- (e) Montrer que $f \mapsto \tilde{f}$ est continue pour la topologie C^∞ .
- (f) Montrer que

$$\tilde{F} = \{f \in C^\infty(I^2, R) \mid f(0, 0) = 0\}$$

est contractile sur $\tilde{f}_0 \equiv 1$. En déduire que F est contractile sur f_0 .

- (g) Montrer de même que $G = \{f \in C^\infty(I^2, S^1) \mid f(x, y) = 1 \text{ au voisinage de } \partial I^2\}$ est contractile en f_0 .

II. Un théorème de S. Smale.

On se propose de montrer que

$$\mathcal{D}_k = \{f \in C^\infty(I^k, I^k) \mid f \text{ est un difféomorphisme, et } f = id \text{ au voisinage de } \partial I^k\}$$

est contractile en l'identité si $k = 1, 2$.

- (a) Montrer le résultat si
- $k = 1$
- .

On suppose dorénavant $k = 2$. On pose $\mathcal{D} = \mathcal{D}_2$.

Notons que pour $f \in \mathcal{D}$ on a tout de même $f(\{1\} \times [0, 1]) = \{1\} \times [0, 1]$. On note X_1 le champ constant $\frac{\partial}{\partial x}$, et Z l'ensemble des champs de vecteurs C^∞ sur I^2 tels que

- i. $X = X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$ au voisinage de ∂I^2
- ii. X n'a pas de zéro sur I^2 .

- (b) Montrer que
- Z
- est contractile en
- X_0
- (on utilisera les coordonnées polaires pour se ramener à la question I.5).

Soit $\varphi : \mathcal{D} \rightarrow Z$ l'application définie par $\varphi(f)(x, y) = df(f^{-1}(x, y))X_0(x, y)$.

- (c) Montrer que les trajectoires de $\varphi(f)$ sont données par $f([0, 1] \times \{y\})$.
- (d) On note h_s l'homotopie obtenue en 2, et $u \mapsto P_s(f)(u, x_0, y_0)$ le flot de $h_s\varphi(f)$, avec condition initiale $P_s(f)(0, x_0, y_0) = (x_0, y_0)$. On pose $Q_s(f)(x, y) = P_s(f)(x, 0, y)$. Représenter sur un dessin l'application $Q_s(f)$ (en fonction des trajectoires de $X_s = h_s\varphi(f)$). Montrer que $Q_s(x, y)$ (lorsqu'il est défini) a sa différentielle de rang maximal.
- (e) Montrer qu'une trajectoire de $P_s(f)(u, 0, y_0)$ sort nécessairement de I^2 , et que cela a lieu en un point de $\{1\} \times [0, 1]$ (on pourra utiliser le théorème de Poincaré-Bendixson).
- (f) Soit $\bar{u}(s, f, y)$ un instant où la trajectoire partant de $(0, y)$ atteint $\{1\} \times [0, 1]$. Montrer que $\bar{u}(s, f, y)$ est unique, et que $(s, f, y) \mapsto \bar{u}(s, f, y)$ est C^∞ en (s, y) continue en f et strictement positive.
- (g) Montrer que Q_s est un difféomorphisme de son domaine de définition (que l'on déterminera) sur I^2 .

On pose $g(f) = \min\{\frac{\bar{u}(s, f, y)}{1 - \bar{u}(s, f, y)}, 1 \mid s, x \in I, \bar{u} < 1\}$. On admettra que si g est semi-continue inférieurement sur \mathcal{D} et partout strictement positive il existe alors $\eta : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ continue telle que $0 < \eta < g$ et $\gamma : \mathcal{D} \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{D}$ telle que $t \mapsto \gamma(f, t)$ soit C^∞ et vérifie $\frac{d\gamma}{dt} < 1 + \eta(f)$, et $\gamma(f, 0) = 0$, $\gamma(f, 1) = 1$.

- (h) On pose
- $H_s(f)(x, y) = Q_s(f)(x + \gamma(f, x)(\bar{u}(s, f, y) - 1), y)$
- . Montrer que
- H_s
- envoie
- I^2
- sur lui-même. En écrivant
- H_s
- comme la composée de deux applications, montrer que c'est un élément de
- \mathcal{D}
- . En conclure que
- \mathcal{D}
- est contractile en l'identité.

Pour d'autres conséquences de ce résultat, se référer à l'article de S. Smale « Diffeomorphisms of the 2-sphere », Proceedings of the A.M.S., vol 10 (1959) pp. 621-626. Pour le cas de \mathcal{D}_3 voir J. Cerf « Sur $\Gamma_4 = 0$ », Lectures notes in Math. Springer-Verlag. Enfin si $k > 6$, \mathcal{D}_k n'est même plus connexe en général (cf. les travaux de J. Milnor).

- (C) Soit
- B^n
- la boule unité fermée de
- \mathbb{R}^n
- . Soit
- $f : B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$
- une application
- C^∞
- qui envoie
- S^{n-1}
- dans
- $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
- et ayant 0 pour valeur régulière. On veut démontrer en notant
- $N(x) = \frac{x}{|x|}$
- que

$$\deg((N \circ f)|_{S^{n-1}}) = \sum_{x \in f^{-1}(0)} \text{sgn}(\det(df(x)))$$

- (a) En utilisant les formes $\alpha_n(x)(v_1, \dots, v_{n-1}) = \det(x, v_1, \dots, v_{n-1})$ sur S^{n-1} et $\beta_n = N^* \alpha_n$, montrer que $\deg((N \circ f)|_{S^{n-1}})$ est invariant par homotopie, i.e. si $F : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue et telle que $F([0, 1] \times S^{n-1}) \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, et on pose $f_t(x) = F(t, x)$, on a $\deg((N \circ f_0)|_{S^{n-1}}) = \deg((N \circ f_1)|_{S^{n-1}})$. On pourra se contenter de démontrer le cas où F est C^∞ et admettre le cas général.
- (b) Utiliser la connexité de $GL^+(n, \mathbb{R}) = \{g \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det g > 0\}$ pour démontrer le résultat lorsque f est linéaire.
- (c) Soient $S(x, \varepsilon)$ des sphères suffisamment petites centrées en x , où $x \in f^{-1}(0)$. Montrer que $0 \notin f(S(x, \varepsilon))$. On pose $g_{x,\varepsilon} = N \circ (f|_{S(x,\varepsilon)})$
- (d) Montrer que

$$\deg(N \circ f|_{S^{n-1}}) = \sum_{x \in f^{-1}(0)} \deg(g_{x,\varepsilon})$$

(e) Conclure.

- (D) (Théorème de Borsuk-Ulam) On considère la sphère $S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{j=1}^{n+1} x_j^2 = 1\}$. On note π la projection $\pi(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n)$. On veut montrer qu'une application f de classe C^∞ de S^n dans elle-même vérifiant $f(-x) = -f(x)$ (on dit qu'une telle application est impaire) est de degré impair. On raisonne par récurrence.

- (a) Démontrer le résultat pour $n = 1$. On admettra que l'on peut écrire f sous la forme $f(x) = e^{2i\pi u(x)}$ avec $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ et utiliser le fait que $\deg(f) = u(x+1) - u(x)$.
Supposons le résultat démontré à l'ordre $n - 1$, et soit $f : S^n \rightarrow S^n$ une application C^∞ vérifiant $f(-x) = -f(x)$. Soit g la restriction de f à l'équateur.
- (b) Montrer qu'il existe un point qui n'est pas dans l'image de g , et qui est valeur régulière de f , et que l'on peut supposer, modulo une rotation, que ce point est le pôle nord $N = (0, \dots, 0, 1)$. On note S le pôle sud, antipode du pôle nord, $S = (0, \dots, -1)$.
- (c) Soit f^+ la restriction de f à l'hémisphère nord, identifié à la boule unité B^n . Montrer que la parité du degré de f égale celle du nombre de préimages de N ou S par f^+ (i.e. le cardinal de $(f^+)^{-1}(\{N, S\})$).
On note h la composée de la projection π sur le plan équatorial (i.e. orthogonal à la droite Nord-Sud et passant par 0) et de f^+ . On considère donc h comme une application de B^n dans B^n .
Montrer que $\deg(f)$ a la parité du nombre de préimages de 0 par h .
- (d) Montrer que $h_{\partial B^n} = \pi \circ g$ se déforme en une application impaire de S^{n-1} dans S^{n-1} .
- (e) Conclure en utilisant l'exercice précédent.
- (f) Montrer que si $f : S^n \rightarrow S^k$ est une application impaire (i.e. telle que $f(-x) = -f(x)$), alors $k \geq n$.

- (E) Théorème de Borsuk-Ulam, 2

Soit f une application continue de S^n dans \mathbb{R}^n . On veut montrer qu'il existe un couple de points antipodaux de la sphère, $(x, -x)$ tels que $f(x) = f(-x)$.

- (a) En raisonnant par l'absurde, montrer que si ce n'est pas le cas $g(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{\|f(x)-f(-x)\|}$ est une application de S^n dans S^{n-1} telle que $g(-x) = -g(x)$.
- (b) Montrer que la restriction h de g à S^{n-1} est de degré nul.
- (c) Montrer en utilisant l'exercice précédent que h est de degré impair.
- (d) Conclure.

(F) Enlacement et invariants des noeuds

On appelle noeud un plongement γ de S^1 dans \mathbb{R}^3 . On dit que deux noeuds γ_0, γ_1 sont isotopes s'il existe une famille continue (pour la topologie C^1) γ_t de noeuds reliant γ_0 à γ_1 (la continuité C^1 signifiant que $(t, s) \mapsto \gamma'_t(s)$ est continue).

Soient γ_1, τ_1 deux noeuds ne s'intersectant pas, i.e. $\forall t, t' \in S^1, \gamma_1(t) \neq \tau_1(t')$. Étant données deux paires de noeuds (γ_1, τ_1) et (γ_2, τ_2) ne s'intersectant pas, on dit que ces paires sont isotopes si et seulement s'il existe une famille continue γ_t, τ_t de noeuds ne s'intersectant pas reliant γ_1, τ_1 et γ_2, τ_2 . On dira parfois pour abrégé « paire de noeuds » au lieu de « paire de noeuds ne s'intersectant pas ».

Pour une paire de noeuds (γ, τ) ne s'intersectant pas, on définit alors l'application du tore T^2 dans S^2 par

$$F : (t, t') \mapsto \frac{\gamma(t) - \tau(t')}{\|\gamma(t) - \tau(t')\|}$$

- (a) Soit α_2 la forme différentielle sur S^2 donnée par

$$\alpha_2 = \frac{1}{4\pi}(x_1 dx_2 \wedge dx_3 + x_2 dx_3 \wedge dx_1 + x_3 dx_1 \wedge dx_2)$$

On rappelle que $\int_{S^2} \alpha_2 = 1$.

On pose $lk(\gamma_1, \tau_1) = \int_{T^2} F^*(\alpha_2)$.

Montrer que $lk(\gamma, \tau) = lk(\tau, \gamma)$ et que si deux paires de noeuds γ_1, τ_1 et γ_2, τ_2 ne s'intersectant pas sont isotopes, alors $lk(\gamma_1, \tau_1) = lk(\gamma_2, \tau_2)$.

- (b) Montrer que $lk(\gamma, \tau)$ est un entier.
- (c) Montrer que cet entier est nul si (γ, τ) est isotope à une paire (γ_2, τ_2) telle que γ_2 et τ_2 sont séparés par un plan. On dit alors que γ et τ sont séparables par isotopie.
- (d) On appelle diagramme de la paire de noeud la représentation de la projection des noeuds dans le plan, en tenant compte des passages dessus/dessous. Dans les dessins qui suivent, γ est en bleu et τ en rouge (on ne s'occupera pas des signes pour le moment).

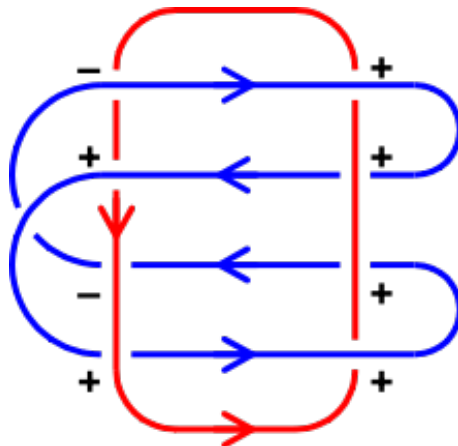


FIGURE 6.1 – Exemple de paire de noeuds (Wikipedia commons)

Montrer que quitte à modifier très peu la direction de projection, on peut supposer que les courbes projetées sont immergées dans le plan. On admet que l'on peut supposer de plus que les points d'intersection sont transverses (i.e. en ces points les vecteurs vitesses des deux courbes ne sont pas colinéaires).

- (e) On note n_i le nombre de cas où on a un croisement comme dans le i -ème dessin ci-dessous. Montrer que $lk(\gamma, \tau) = \frac{n_1+n_2-n_3-n_4}{2}$

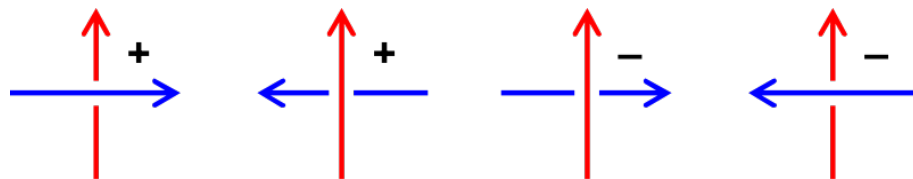


FIGURE 6.2 – Croisements correspondant à n_1, n_2, n_3, n_4 respectivement

- (f) On admet le fait suivant : si $f : D^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ envoie S^{n-1} dans S^{n-1} et est telle que 0 est valeur régulière de f , avec $f^{-1}(0) = \{0\}$, alors $\deg(f_{S^{n-1}}) = \text{signe}(\det(df(0)))$.

On fixe (γ, τ) une paire de noeuds ne s'intersectant pas. On suppose que γ est le bord d'une surface orientable Σ et que si $x_0 \in \tau \cap \Sigma$, alors $T_{x_0}\gamma \cap T_{x_0}\Sigma = \{0\}$. Montrer que $lk(\gamma, \tau)$ est égal au nombre de points d'intersection de τ avec Σ , comptés avec un signe que l'on précisera.

Indication : prolonger l'application F définie de T^2 dans S^2 en une application G définie de $\Sigma \times S^1$ dans \mathbb{R}^3 et considérer la préimage de 0 par G .

- (g) Montrer qu'il existe (γ, τ) une paire de noeuds non séparables par isotopie, mais telle que $lk(\gamma, \tau) = 0$. (On pourra admettre "à vue" qu'ils ne sont pas séparables par isotopie)

(G) Encore des noeuds

Cet exercice est indépendant du précédent, mais utilise certaines définitions et résultats qui sont rappelés.

On admettra que si γ est un noeud et τ un noeud qui ne l'intersecte pas, le nombre $lk(\gamma, \tau) = \int_{T^2} F^*(\alpha_2)$ défini dans l'exercice précédent est un entier qui est donné par la formule de la question 5. En particulier pour tout noeud γ , il existe un noeud τ tel que $lk(\gamma, \tau) \neq 0$.

- (a) Soit γ un noeud. Utiliser la suite de Mayer-Vietoris pour calculer $H^*(\mathbb{R}^3 \setminus \gamma)$. On admettra (ce qui résulte d'une version précise du théorème du voisinage tubulaire) que tout noeud a un voisinage difféomorphe à $S^1 \times D^2$, dont le bord est donc difféomorphe à T^2 .
- (b) Soit γ un noeud, et $H : (\mathbb{R}^3 \setminus \gamma) \times S^1 \rightarrow S^2$ l'application

$$H(z, t) = \frac{z - \gamma(t)}{\|z - \gamma(t)\|}$$

On note $z = (z_1, z_2, z_3)$ pour z dans $\mathbb{R}^3 \setminus \gamma$. On pose $H^*(\alpha_2) = \sum_{j < k} A_{j,k}(t, z) dz_j \wedge dz_k + \sum_j B_j(z, t) dz_j \wedge dt$, et $L_\gamma = \sum_{j=1}^3 (\int_{S^1} B_j(z, t) dt) dz_j$. Montrer que L_γ est fermée et vérifie $lk(\tau, \gamma) = \int_{S^1} \tau^*(L_\gamma)$ si τ est un noeud n'intersectant pas γ .

- (c) Montrer que L_γ n'est pas exacte. En déduire que $H^1(\mathbb{R}^3 \setminus \gamma) = \mathbb{R}L_\gamma$ (on note de la même façon L_γ et sa classe dans $H^1(\mathbb{R}^3 \setminus \gamma)$).
- (d) Calculer aussi $H^*(\mathbb{R}^3 \setminus \gamma \cup \tau)$ pour γ, τ une paire de noeuds disjoints. Montrer que $H^1(\mathbb{R}^3 \setminus \gamma \cup \tau) = \mathbb{R}L_\gamma \oplus \mathbb{R}L_\tau$.
- (e) Montrer que si γ, τ sont une paire de noeuds, $L_\gamma \wedge L_\tau$ est une forme de degré 2 représentant une classe dans $H^2(\mathbb{R}^3 \setminus \gamma \cup \tau)$ et que cette classe est nulle si et seulement si $lk(\gamma, \tau) = 0$.
- (H) (Théorème de Tischler)

On identifie S^1 à \mathbb{R}/\mathbb{Z} , on notera θ la fonction coordonnée sur \mathbb{R} et $d\theta$ la forme différentielle induite sur S^1 .

Soit M une variété compacte, α une forme différentielle fermée de degré un qui ne s'annule pas. On veut montrer que si α est entière (on verra ce que cela signifie), il existe $p : M \rightarrow S^1$ telle que $\alpha = p^*(d\theta)$.

Soit x_0 un point de M fixé une fois pour toutes et $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ un chemin de classe C^∞ . On pose

$$f(\gamma) = \int_0^1 \gamma^*(\alpha) = \int_0^1 \alpha(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

- (a) Montrer que si on a deux chemins γ_0, γ_1 de mêmes extrémités et homotopes, c'est-à-dire qu'il existe une famille de chemins paramètre par $s \in [0, 1]$, γ_s telle que $(s, t) \mapsto \gamma_s(t)$ soit C^∞ et $(\gamma_s(1) = x_0$ pour tout $s)$ alors $f(\gamma_0) = f(\gamma_1)$.
- (b) Soit G l'ensemble des valeurs de $f(\gamma)$ sur les chemins γ tels que $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$. Montrer que G est un sous groupe additif de \mathbb{R} .
On dit que α est entière si ce sous-groupe est discret.

- (c) Donner un exemple d'une telle forme différentielle α qui n'est pas entière.
On suppose dans la suite que α est entière, et on identifie ce sous-groupe à \mathbb{Z} .
- (d) Montrer que f induit une application $C^\infty p : M \rightarrow S^1$ et que $p^*(d\theta) = \alpha$.
On veut maintenant montrer que $p^{-1}(\theta)$ est difféomorphe à $p^{-1}(1)$ pour tout $\theta \in S^1$.
- (e) Montrer que $dp(x)$ est surjective pour tout $x \in M$.
- (f) Soit X un champ de vecteurs sur M tel que, pour tout $x \in M$, $dp(x)X(x)$ est le vecteur unitaire tangent de S^1 en $p(x)$. Si φ^t est le flot de X , c'est-à-dire une famille de difféomorphismes tels que $\frac{d}{dt}\varphi^t(x) = X(\varphi^t(x))$, montrer que $p(\varphi^t(x)) = p(x) + t$.
- (g) Conclure.

(I) (Formule de Gauss-Bonnet pour une hypersurface de \mathbb{R}^{n+1}).

Soit

$$U_n = \{(x, h) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = |h| = 1, \langle x, h \rangle = 0\}$$

le tangent unitaire à la sphère unité S^n de \mathbb{R}^{n+1} . On veut construire une forme de degré $n-1$, T_n sur U_n , telle que

$$dT_n = p_n^*(\alpha_n)$$

où α_n est la forme $\det(x, u_1, \dots, u_n)$ sur S^n , où $p_n : U_n \rightarrow S^n$ est la projection $(x, h) \mapsto x$.

On note P la projection des formes multilinéaires sur les formes multilinéaires alternées définie au chapitre 4. On note (u, v) un vecteur tangent à U_n , où $u \in \mathbb{R}^{n+1}$ est tangent au facteur x , alors que $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ est tangent au facteur h .

- (a) Montrer que l'opérateur L_X défini par $\sigma \mapsto \frac{d}{dt}(\varphi^t)^*(\sigma)$ est bien défini sur l'espace des formes multilinéaires, et qu'il commute avec P .
On note $T_n^{(p)}$ la forme obtenue en appliquant P à

$$S_n^{(p)}(x, h)((u_1, v_1)(u_2, v_2), \dots, (u_{n-2}, v_{n-2})) = \det(x, h, u_1, \dots, u_p, v_{p+1}, \dots, v_{n-2})$$

On note $Z(x, h)$ le champ de vecteurs donné par $Z(x, h) = (h, -x)$.

- (b) Montrer que Z est bien tangent à U_n et que son flot est donné par $\varphi^t(x, h) = (x \cdot \cos(t) + h \cdot \sin(t), -x \cdot \cos(t) + h \cdot \sin(t))$ et que

$$d\varphi^t(x, h)(u, v) = (u \cdot \cos(t) + v \cdot \sin(t), -u \cdot \cos(t) + v \cdot \sin(t))$$

- (c) Montrer que $i_Z T_n^{(p)} = 0$ et que $L_Z T_n^p = p T_n^{(p-1)} + (n-p-1) T_n^{(p+1)}$. On pourra montrer en premier lieu que $L_Z S_n^p = p S_n^{(p-1)} + (n-p-1) S_n^{(p+1)}$.
- (d) Montrer que $i_Z p_n^*(\alpha_n) = T_n^{(n-1)}$.
- (e) Montrer que si $n = 2m$ est pair et on pose $T_n = \sum_{k=0}^{m-1} a_m(k) T_n^{(2k)}$, où $a_m(k)$ est définie par la relation de récurrence $a_m(k)(2m-2k-1) + (2k+2)a_m(k+1) = 0$ et $a_m(m-1) = 1$, on a $i_Z dT_n = i_Z p_n^*(\alpha_n)$. On pourra utiliser la formule de Cartan.

- (f) Montrer que si $V_{(x_0, h_0)} = \{(x, h) \in U_n \mid \langle x, h_0 \rangle = \langle x_0, h \rangle = 0\}$, on a que $dT_n = p_n^*(\alpha_n)$ sur $V_{(x_0, h_0)}$
- (g) En utilisant le fait que $T_{(x_0, h_0)}U_n = T_{(x_0, h_0)}V_{(x_0, h_0)} \oplus \mathbb{R}Z(x_0, h_0)$, montrer que $dT_n = p_n^*(\alpha_n)$ sur U_n .
- (h) En déduire que si X est un champ de vecteurs sur une hypersurface compacte M^n de \mathbb{R}^{n+1} de dimension paire, et $\nu : M^n \rightarrow S^n$ l'application de Gauss, K la courbure définie par $\nu^*\alpha_n(x) = K(x)\sigma_M$, il existe une constante c_n telle que

$$c_n \int_M K(x)\sigma_M = \sum_{X(z)=0} \deg(X, z)$$

On pourra utiliser l'application $F_\nu : TM \rightarrow T^*S^n$ donnée par $(x, h) \mapsto (\nu(x), h)$, et montrer que si $Y = \frac{X}{\|X\|}$ qui est définie hors du lieu des zéros de X , on a $Y^*F_\nu^*T_n(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) = \det(\nu(z), Y(z), dY(z)\xi_1, \dots, dY(z)\xi_{n-2}) + R$ où R est constitué de termes la forme $\det(\nu(z), Y(z), d\nu(z)\xi_1, \dots, d\nu(z)\xi_p, dY(z)\xi_{p+1}, \dots, dY(z)\xi_{n-1})$ dont l'intégrale sur une petite sphère centrée en un zéro de X tend vers 0 avec le rayon.

- (i) Montrer en utilisant le cas de la sphère unité que $c_n = \frac{2}{\text{vol}(S^{2n})} = \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{(2\pi)^n}$.
- (j) Existe-t-il un théorème analogue en dimension impaire? On notera qu'en dimension impaire $\chi(M^n) = 0$.
- (k) Comparer avec les articles de Allendoerfer et S.S. Chern en appendice.
- (J) Utiliser l'exercice précédent dans le cas d'une sous-variété de codimension impaire quelconque, en la remplaçant par le voisinage tubulaire $M_r = \{z \in \mathbb{R}^N \mid d(z, M) = r\}$. On suppose donc M^n sous-variété de \mathbb{R}^{2N+1} .
- (a) Montrer que si on note K_r la courbure de Gauss de M_r , il existe $K : M \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $c_{2N+1} \int_{M_r} K_r(x)dx = c_n \int_M K(x)dx$. Montrer que K ne dépend pas de N , mais seulement de la métrique induite sur M .
- (b) Montrer qu'à tout champ de vecteurs X de M , on peut associer un champ de vecteurs \tilde{X}_r de M_r et que $\tilde{X}_r(z) = 0$ si et seulement si $X(p(z)) = 0$.
- (c) Montrer que l'on peut modifier \tilde{X}_r en Y_r de manière à ce que à chaque zéro de X correspondent deux zéros de Y , ayant même indice.
- (d) En déduire que

$$c_n \int_M K(x)\sigma_M = \sum_{X(z)=0} \deg(X, z)$$

- (K) Courbure et isométrie locale des surfaces Soient M_1, M_2 deux surfaces plongées dans \mathbb{R}^3 . Soient x_1, x_2 des points de M_1, M_2 . On dit que M_1 et M_2 sont **localement isométriques près de** x_1, x_2 si et seulement s'il existe V_1, V_2 voisinages de x_1, x_2 dans M_1, M_2 et un difféomorphisme $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ tels que $\varphi(x_1) = x_2$ et $\langle d\varphi(x)\xi, d\varphi(x)\eta \rangle = \langle \xi, \eta \rangle$ pour tous $x \in V_1, \xi, \eta \in T_x M_1$. Ici, $\langle \bullet, \bullet \rangle$ dénote le produit scalaire de \mathbb{R}^3 .

On dit que M est **plate** en x , si elle est localement isométrique près de x à un plan \mathbb{R}^2 . Dans tout l'exercice on se fixe M une surface orientée.

- (a) Montrer qu'au voisinage d'un point quelconque x de M , il existe deux champs de vecteurs X_1, X_2 tels que $|X_1|^2 = |X_2|^2 = 1, \langle X_1, X_2 \rangle = 0$. Montrer qu'il existe aussi deux formes θ_1, θ_2 de degré 1 telles que $\theta_j(X_i) = \delta_i^j$.
- (b) On note $N(x)$ la normale orientée à M en x . On considère X_1, X_2 et N comme des applications de M dans \mathbb{R}^3 et on prend leur différentielle extérieure dX_1, dX_2 et dN , vues comme des formes de degré 1 à valeurs dans \mathbb{R}^3 .

ATTENTION : si Z est une fonction à valeurs vectorielles et si τ est une forme différentielle, on note $Z \otimes \tau$ la forme différentielle à valeurs vectorielles $X \mapsto Z\tau(X)$, où X est un champ de vecteurs.

En utilisant le fait que l'application $x \mapsto (X_1(x), X_2(x), N(x))$ est à valeurs dans $SO(3)$, montrer qu'il existe des 1-formes ω, α, β sur M , telles que

$$dX_1 = X_2 \otimes \omega + N \otimes \alpha,$$

$$dX_2 = -X_1 \otimes \omega + N \otimes \beta,$$

$$dN = -X_1 \otimes \alpha - X_2 \otimes \beta.$$

- (c) Montrer que ω est l'unique forme telle que $d\theta_1 = \omega \wedge \theta_2$ et $d\theta_2 = -\omega \wedge \theta_1$. On pourra montrer que ω est défini par $\omega(X_2) = -\theta_2([X_1, X_2]), \omega(X_1) = -\theta_1([X_1, X_2])$.
- (d) On pose $\alpha_2(x)(\xi, \eta) = \det(x, \xi, \eta)$ la forme volume usuelle sur S^2 . Dédurre de ce qui précède que $N^*(\alpha_2) = \alpha \wedge \beta$ puis que $\alpha \wedge \beta = K(x)\theta_1 \wedge \theta_2$.
- (e) Montrer que $d\omega = -\alpha \wedge \beta$.
- (f) Conclure que $K(x)$ ne dépend que de la métrique sur M , i.e. si M_1 et M_2 sont localement isométriques près de x_1 et x_2 , alors $K(x_1) = K(x_2)$ (Theorema Egregium de Gauss).
- (g) Montrer que si on peut trouver θ_1, θ_2 tels que $d\theta_1 = d\theta_2 = 0$ alors les champs correspondants X_1, X_2 commutent, et il existe une isométrie locale $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow M$.
- (h) Montrer que si $K(x) = 0$ au voisinage de x_0 , alors ω s'écrit localement sous la forme df pour une certaine fonction f . Montrer que si on note $R(t)$ la matrice de la rotation d'angle t du plan, on a, posant

$$\begin{pmatrix} \theta'_1 \\ \theta'_2 \end{pmatrix} = R(f) \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix},$$

que $d\theta'_1 = d\theta'_2 = 0$. Conclure que si $K(x)$ s'annule au voisinage de x_0 , alors M est plate en x_0 .

5 Appendice : Quelques démonstration du théorème de Gauss-Bonnet par Allendoerfer, Weil, S.S. Chern

THE EULER NUMBER OF A RIEMANN MANIFOLD.*

By CARL B. ALLENDOERFER.

1. Introduction. One of the chief links between the differential geometry and the topology of two dimensions is the corollary to the Gauss-Bonnet theorem which states: The integral of the total curvature of a two dimensional closed surface over the surface is equal to $2\pi N$, where N is the Euler number of the surface. Since the Gauss-Bonnet theorem is of intrinsic character, this theorem does not require the surface to be a subspace of any Euclidean space.

An alternative, but less inclusive, proof of this theorem can be given which avoids the Gauss-Bonnet theorem and uses instead the property that the surface lies in a three dimensional Euclidean space. This proof can be generalized to a closed Riemann space R_n of even dimension which is a subspace of an $n + 1$ dimensional Euclidean space, i. e., a hypersurface. In this case the theorem takes the form:

$$(1.1) \quad \int_{R_n} K dO = \frac{\omega_n}{2} N$$

where K is the total curvature of R_n , ω_n is the area of an n -sphere (a sphere whose surface is n dimensional), and N is the Euler number of R_n . We recall here that K is defined for a hypersurface as the product of the n principal curvatures, and that it can be expressed as a polynomial in the $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ of R_n divided by the determinant of the $g_{\alpha\beta}$. We shall not consider the case n odd, for it has been shown that (1.1) does not hold under these circumstances.¹

The problem at hand is to extend (1.1) to spaces which are not hypersurfaces. If no imbedding is to be assumed this requires a generalization of the Gauss-Bonnet theorem to more than two dimensions, and so far this has not been accomplished. Progress, however, can be made by assuming that R_n lies in a Euclidean space of $n + q$ dimensions, and on this basis we shall prove the following

THEOREM. *If a closed Riemann manifold of even dimension can be made a subspace of a Euclidean space E_{n+q} , then*

$$\int_{R_n} K dO = \frac{1}{2} \omega_n N,$$

* Received October 12, 1939.

¹ For the case of a hypersurface see H. Hopf, "über die Curvatura integra geschlossener Hyperflächen," *Mathematische Annalen*, vol. 95 (1925), pp. 340-367.

where

$$K = \frac{R_{\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2} \cdots R_{\alpha_{n-1} \alpha_n \beta_{n-1} \beta_n} \epsilon^{\alpha_1 \cdots \alpha_n} \epsilon^{\beta_1 \cdots \beta_n}}{n! 2^{n/2} |g_{\alpha\beta}|}.$$

The term ‘‘closed Riemann manifold’’ is used in the sense defined by Hopf in a paper in which the background of this problem is discussed and the present investigation suggested.²

The chief difficulty in the preparation of this paper was the definition of K since no theory of principal curvatures, etc. exists for spaces other than hypersurfaces. Instead K is defined indirectly by the use of the theory of tubes recently developed by H. Weyl.³ Once this is accomplished our theorem is an immediate application of Kronecker’s index theorem⁴ and of Weyl’s results.

2. Kronecker’s index.⁴ An important tool in the proof is an integral theorem due to Kronecker, the proof of which is here summarized from the present point of view. Let S be an n dimensional closed Riemann manifold on which is defined a set of $n + 1$ functions of class C^1 , $V^i(x)$, which satisfy $V^i V^i = 1$. By means of this set of functions we can consider a continuous mapping of S upon the unit n -sphere, Σ , whose equation is $V^i V^i = 1$. The orientations on S and Σ are those imposed by a fixed orientation in the arithmetic space of the parameters x^a . This mapping is of a definite degree d , where d is an integer, positive, negative, or zero. We seek an analytic expression for d . Consider the determinant:

$$(2.1) \quad D = \begin{vmatrix} V^1 & \cdots & V^{n+1} \\ \frac{\partial V^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial V^{n+1}}{\partial x^1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial V^1}{\partial x^n} & \cdots & \frac{\partial V^{n+1}}{\partial x^n} \end{vmatrix}.$$

It is easy to show that

$$(2.2) \quad D^2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial V^i}{\partial x^a} & \frac{\partial V^i}{\partial x^b} \end{vmatrix}$$

² H. Hopf, ‘‘Differentialgeometrie und Topologische Gestalt,’’ *Jahresbericht der Deutscher Math. Vereinigung*, vol. 41 (1932), pp. 209-229. Also see Hopf und Rinow, ‘‘Über den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Fläche,’’ *Comm. Math. Helvet.*, vol. 3 (1931), pp. 209-225.

³ H. Weyl, ‘‘On the volume of tubes,’’ *American Journal of Mathematics*, vol. 61 (1939), pp. 461-472. Readers should note that in Weyl’s paper ω_n refers to the surface area of a sphere which incloses a volume of n dimensions. We put ω_n equal to the area of a sphere whose inclosed volume is $n + 1$ dimensional.

⁴ For a full treatment see J. Tannery, *Introduction à la Théorie des Fonctions*, Note by J. Hadamard, vol. 2, pp. 437-477.

which is recognized as the determinant of the metric tensor of the n -sphere if V^i are taken as Euclidean coordinates. The area, ω_n , of the sphere is thus given by :

$$\int_S \pm \sqrt{D^2} dx^1 \cdots dx^n = d \cdot \omega_n$$

integrated over S provided the sign of the radical is chosen from point to point to allow for overlapping of the covering. This is accomplished at once by using $\int_S D dx$. For D is numerically equal to $\sqrt{D^2}$ and has a positive sign for elements on the sphere of positive orientation and a negative sign in the opposite case. Therefore $\int_S D dx = d \cdot \omega_n$.

In the special case where S is a hypersurface and where V^i is the normal vector ξ^i , we arrive at the total curvature of S . For

$$(2.3) \quad \frac{\partial \xi^i}{\partial x^\alpha} = \bar{b}_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} \frac{\partial y^i}{\partial x^\gamma}$$

where $\bar{b}_{\alpha\beta}$ are the negatives of the coefficients of the second fundamental form of S . From the fact that $\frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial y^i}{\partial x^\beta} = g_{\alpha\beta}$ we have that :

$$(2.4) \quad D^2 = | \bar{b}_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} \bar{b}_{\gamma\delta} | ;$$

or that

$$(2.5) \quad D = e \frac{|\bar{b}_{\alpha\beta}|}{|g_{\alpha\beta}|^{\frac{1}{2}}}$$

By considering the special case

$$\xi^i = (1, 0, \cdots, 0) ; \quad \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$$

with 1 in the $(\alpha + 1)$ -th place, $\bar{b}_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$; $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$; it is shown that e is definitely $+1$, since (2.5) is an identity. But since K , the total curvature, equals $| \bar{b}_{\alpha\beta} | / | g_{\alpha\beta} |$, this shows that :

$$(2.6) \quad \int_S K dO = d \cdot \omega_n,$$

where $dO = \sqrt{|g_{\alpha\beta}|} dx^1 \cdots dx^n$.

Since n is even, it is necessary that N , the Euler number of S , be equal to $2d$. Hence

$$(2.7) \quad \int_S K dO = \frac{1}{2} \omega_n N$$

which is the required theorem for this special case.

3. Fundamental equations on tubes. Let $y^i = y^i(u)$ be the para-

metric equations of R_n in E_{n+q} for a neighborhood of R_n . Since it may be necessary to consider a number of sets of such parameters in order to cover R_n completely, we shall let u^α be a typical set. There now exist q mutually orthogonal unit vectors $\xi_{\sigma^i} (\sigma = 1 \cdots q)$ which are normal to R_n . Let these be chosen as functions of class C^1 and such that the determinant $\left| \xi_{\sigma^i}, \frac{\partial y^i}{\partial x^a} \right| > 0$. The parametric equations of a tube of unit radius may then be written:

$$(3.1) \quad x^i = y^i(u) + t^\sigma(v) \xi_{\sigma^i}$$

where

$$(3.2) \quad t^\sigma t^\sigma = 1$$

and $v^A (A = 1 \cdots q - 1)$ are parameters on a $(q - 1)$ sphere. Again several sets of v 's will be needed to cover the sphere. The tangent vectors of this tube are then:⁵

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} &= \frac{\partial y^i}{\partial u^\alpha} + t^\sigma \{ -\Omega^\sigma_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} \frac{\partial y^i}{\partial u^\gamma} + \nu_{\rho\sigma/a} \xi_{\rho^i} \} \\ \frac{\partial x^i}{\partial v^A} &= \frac{\partial t^\sigma}{\partial v^A} \xi_{\sigma^i}. \end{aligned}$$

The tube is moreover a hypersurface of E_{n+q} and its normal vector is then $t^\sigma \xi_{\sigma^i}$. This follows from (3.3) and the equations:

$$\xi_{\sigma^i} \frac{\partial y^i}{\partial u^\alpha} = 0; \quad \xi_{\sigma^i} \xi_{\rho^i} = \delta_{\sigma\rho}; \quad t^\sigma \frac{\partial t^\sigma}{\partial v^A} = 0; \quad \nu_{\rho\sigma/a} = -\nu_{\sigma\rho/a}.$$

We then observe that:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u^\alpha} (t^\sigma \xi_{\sigma^i}) &= -t^\sigma \Omega^\sigma_{\alpha\gamma} y_{,\delta^i} g^{\gamma\delta} + t^\sigma \nu_{\rho\sigma/a} \xi_{\rho^i}; \\ \frac{\partial}{\partial v^A} (t^\sigma \xi_{\sigma^i}) &= \frac{\partial t^\sigma}{\partial v^A} \xi_{\sigma^i}. \end{aligned}$$

Hence for the tube the D of Kronecker's index is

$$(3.5) \quad D = \begin{vmatrix} t^\sigma \xi_{\sigma^i} & & \\ \frac{\partial t^\sigma}{\partial v^A} \xi_{\sigma^i} & & \\ t^\sigma \bar{\Omega}^\sigma_{\alpha\gamma} y_{,\delta^i} g^{\gamma\delta} + t^\sigma \nu_{\rho\sigma/a} \xi_{\rho^i} & & \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 \text{ row} \\ q - 1 \text{ rows} \\ n \text{ rows} \end{matrix}$$

where $\bar{\Omega}^\sigma_{\alpha\gamma} = -\Omega^\sigma_{\alpha\gamma}$. And at once it follows that

$$(3.6) \quad D^2 = | t^\sigma \bar{\Omega}^\sigma_{\alpha\beta} t^\rho \bar{\Omega}^\rho_{\gamma\delta} g^{\beta\delta} | \times \left| \frac{\partial t^\sigma}{\partial v^A} \frac{\partial t^\sigma}{\partial v^B} \right|,$$

whose square root gives:

$$(3.7) \quad D = e \frac{| t^\sigma \bar{\Omega}^\sigma_{\alpha\beta} |}{| g_{\alpha\beta} |} \sqrt{t} \sqrt{g}$$

⁵ For instance see L. P. Eisenhart, *Riemannian Geometry*, p. 189, equations (56.3).

where

$$K = \frac{1}{n!} \frac{E_{\alpha_1\beta_1/\alpha_2\beta_2} \cdots E_{\alpha_{n-1}\beta_{n-1}/\alpha_n\beta_n} \epsilon^{\alpha_1 \cdots \alpha_n} \epsilon^{\beta_1 \cdots \beta_n}}{|g_{\alpha\beta}|}.$$

Because of the relation: $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = E_{\alpha\gamma/\beta\delta} - E_{\alpha\delta/\beta\gamma}$, we may write:

$$(4.3) \quad K = \frac{1}{2^{n/2}n!} \frac{R_{\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2} \cdots R_{\alpha_{n-1}\alpha_n\beta_{n-1}\beta_n} \epsilon^{\alpha_1 \cdots \alpha_n} \epsilon^{\beta_1 \cdots \beta_n}}{|g_{\alpha\beta}|}.$$

Thus:

$$(4.4) \quad \int_{R_n} K \sqrt{|g_{\alpha\beta}|} du^1 \cdots du^n \cdot \omega_{q-1} \frac{(n-1) \cdots 3 \cdot 1}{q(q+2) \cdots (n+q-2)} \\ = \frac{1}{2} \bar{N} \omega_{n+q-1}.$$

Recalling that q is odd we have that

$$\omega_{n+q-1} = \frac{(2\pi)^{n/2}}{q(q+2) \cdots (n+q-2)} \omega_{q-1} \\ \omega_n = 2 \frac{(2\pi)^{n/2}}{(n-1)(n-3) \cdots 3 \cdot 1}$$

and hence that

$$(4.5) \quad \omega_{n+q-1} = \frac{1}{2} \omega_n \left\{ \frac{(n-1)(n-3) \cdots 3 \cdot 1}{q(q+2) \cdots (n+q-2)} \omega_{q-1} \right\}.$$

Combination of (4.4) and (4.5) gives:

$$(4.6) \quad \int_{R_n} K \sqrt{|g_{\alpha\beta}|} du^1 \cdots du^n = \frac{\bar{N}}{2} \cdot \frac{\omega_n}{2}.$$

Now we know from topology that $\bar{N} = 2N$ where N is the Euler number of R_n . For the tube is topologically the product of R_n with a $q-1$ sphere where $q-1$ is even. This leads at once to the above relation between their Euler numbers. Thus we have that for n even and q odd:

$$(4.7) \quad \int_{R_n} K \sqrt{|g_{\alpha\beta}|} du^1 \cdots du^n \equiv \int_{R_n} K dO = \frac{N}{2} \omega_n.$$

This result extends immediately to the case q even. For if q is originally even, imbed the $n+q$ dimensional Euclidean space in a similar space of $n+q+1$ dimensions so that the parametric equations of R_n are $y^i = y^i(u)$, $i = 1 \cdots n+q$; $y^{n+q+1} = \text{constant}$. Now the proof proceeds as above, yielding the desired result, since q does not appear in the final formula whatsoever.

Haverford College.

A SIMPLE INTRINSIC PROOF OF THE GAUSS-BONNET FORMULA FOR CLOSED RIEMANNIAN MANIFOLDS

BY SHIING-SHEN CHERN

(Received November 26, 1943)

Introduction

C. B. Allendoerfer¹ and W. Fenchel² have independently given a generalization of the classical formula of Gauss-Bonnet to a closed orientable Riemannian manifold which can be imbedded in a euclidean space. Recently, Allendoerfer and André Weil³ extended the formula to a closed Riemannian polyhedron and proved in particular its validity in the case of a general closed Riemannian manifold. In their proof use is still made of the imbedding of a Riemannian cell in a euclidean space. The object of this paper is to offer a direct intrinsic proof of the formula by making use of the theory of vector fields in differentiable manifolds.

The underlying idea of the present proof is very simple, so that a brief summary might be helpful. Let R^n be a closed orientable Riemannian manifold of an even dimension n . According to details to be given below, we define in R^n an intrinsic exterior differential form Ω of degree n , which is of course equal to a scalar invariant of R^n multiplied by the volume element. The formula of Gauss-Bonnet in question asserts that the integral of this differential form over R^n is equal to the Euler-Poincaré characteristic χ of R^n . To prove this we pass from the manifold R^n to the manifold M^{2n-1} of $2n - 1$ dimensions formed by the unit vectors of R^n .⁴ In M^{2n-1} we show that Ω is equal to the exterior derivative of a differential form Π of degree $n - 1$. By defining a continuous field of unit vectors over R^n with isolated singular points, we get, as its image in M^{2n-1} , a submanifold V^n of dimension n , and the integral of Ω over R^n is equal to the same integral over V^n . The application of the theorem of Stokes shows that the latter is equal to the integral of Π over the boundary of V^n . Now, the boundary of V^n corresponds exactly to the singular points of the vector field defined in R^n , the sum of whose indices is, by a well-known theorem, equal to χ . With such an interpretation the integral of Π over the boundary of V^n can be evaluated and is easily proved to be equal to χ .

The method can of course be applied to derive other formulas of the same type and, with suitable modifications, to deduce the Gauss-Bonnet formula for a Riemannian polyhedron. We publish this proof, because it is in the present case that the main ideas of our method are most clear. Further results will be given in a forthcoming paper.

§1. Résumé of some fundamental formulas in Riemannian Geometry

Let R^n be a closed orientable differentiable manifold⁵ of an even dimension $n = 2p$ and class $r \geq 4$. In R^n suppose a Riemannian metric be defined, with

the fundamental tensor g_{ij} , whose components we suppose to be of class 3. Since we are to deal with multiple integrals, it seems convenient to follow Cartan's treatment of Riemannian Geometry,⁶ with the theory of exterior differential forms, instead of the ordinary tensor analysis, playing the dominant rôle. The differential forms which occur below are exterior differential forms.

According to Cartan we attach to each point P of R^n a set of n mutually perpendicular unit vectors e_1, \dots, e_n , with a certain orientation. Such a figure $Pe_1 \dots e_n$ is called a frame. A vector v of the tangent space of R^n at P can be referred to the frame at P , thus

$$(1) \quad v = u_i e_i,$$

where the index i runs from 1 to n and repeated indices imply summation. The law of infinitesimal displacement of tangent spaces, as defined by the parallelism of Levi-Civita, is given by equations of the form

$$(2) \quad \begin{cases} dP = \omega_i e_i, \\ de_i = \omega_{ij} e_j, \quad \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0 \end{cases}$$

where ω_i, ω_{ij} are Pfaffian forms. These Pfaffian forms satisfy the following "equations of structure":

$$(3) \quad \begin{cases} d\omega_i = \omega_j \omega_{ji}, \\ d\omega_{ij} = -\omega_{ik} \omega_{jk} + \Omega_{ij}, \quad \Omega_{ij} + \Omega_{ji} = 0. \end{cases}$$

In (3) Ω_{ij} are exterior quadratic differential forms and give the curvature properties of the space.

The forms Ω_{ij} satisfy a system of equations obtained by applying to (3) the theorem that the exterior derivatives of the left-hand members are zero. The equations are

$$(4) \quad \begin{cases} \omega_j \Omega_{ji} = 0, \\ d\Omega_{ij} - \omega_{jk} \Omega_{ik} + \omega_{ik} \Omega_{jk} = 0, \end{cases}$$

and are called the Bianchi identities.

For the following it is useful to know how the Ω_{ij} behave when the frame $e_1 \dots e_n$ undergoes a proper orthogonal transformation. In a neighborhood of P in which the same system of coordinates is valid let $e_1 \dots e_n$ be changed to $e_1^* \dots e_n^*$ according to the proper orthogonal transformation:

$$(5) \quad e_i^* = a_{ij} e_j$$

or

$$(5') \quad e_i = a_{ji} e_j^*,$$

where (a_{ij}) is a proper orthogonal matrix, whose elements a_{ij} are functions of the coordinates. Suppose Ω_{ij}^* be formed from the frames $Pe_1^* \dots e_n^*$ in the same way as Ω_{ij} are formed from $Pe_1 \dots e_n$. Then we easily find

$$(6) \quad \Omega_{ij}^* = a_{ik} a_{jl} \Omega_{kl}.$$

From (6) we deduce an immediate consequence. Let $\epsilon_{i_1 \dots i_n}$ be a symbol which is equal to + 1 or - 1 according as i_1, \dots, i_n form an even or odd permutation of $1, \dots, n$, and is otherwise zero. Since our space R^n is of even dimension $n = 2p$, we can construct the sum

$$(7) \quad \Omega = (-1)^{p-1} \frac{1}{2^{2p} \pi^p p!} \epsilon_{i_1 \dots i_{2p}} \Omega_{i_1 i_2} \Omega_{i_3 i_4} \dots \Omega_{i_{2p-1} i_{2p}},$$

where each index runs from 1 to n . Using (6), we see that Ω remains invariant under a change of frame (5) and is therefore intrinsic. This intrinsic differential form Ω is of degree n and is thus a multiple of $\omega_1 \dots \omega_n$. As the latter product (being the volume element of the space) is also intrinsic, we can write

$$(8) \quad \Omega = I \omega_1 \dots \omega_n,$$

where the coefficient I is a scalar invariant of the Riemannian manifold.

With all these preparations we shall write the formula of Gauss-Bonnet in the following form

$$(9) \quad \int_{R^n} \Omega = \chi,$$

χ being the Euler-Poincaré characteristic of R^n .

§2. The space of unit vectors and a formula for Ω

From the Riemannian manifold R^n we pass now to the manifold M^{2n-1} of dimension $2n - 1$ formed by its unit vectors. M^{2n-1} is a closed differentiable manifold of class $r - 1$. As its local coordinates we may of course take the local coordinates of R^n and the components u_i of the vector \mathbf{v} in (1), subjected to the condition

$$(1') \quad u_i u_i = 1.$$

If θ_i are the components of $d\mathbf{v}$ with respect to the frame $\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_n$, we have

$$(10) \quad d\mathbf{v} = \theta_i \mathbf{e}_i,$$

where

$$(11) \quad \theta_i = du_i + u_j \omega_{ji}$$

and

$$(12) \quad u_i \theta_i = 0.$$

From (11) we get, by differentiation,

$$(13) \quad d\theta_i = \theta_j \omega_{ji} + u_j \Omega_{ji}.$$

As to the effect of a change of frame (5) on the components u_i, θ_i , it is evidently given by the equations

$$(14) \quad u_i^* = a_{ij} u_j, \quad \theta_i^* = a_{ij} \theta_j.$$

We now construct the following two sets of differential forms:

$$(15) \quad \Phi_k = \epsilon_{i_1 \dots i_{2p}} u_{i_1} \theta_{i_2} \cdots \theta_{i_{2p-2k}} \Omega_{i_{2p-2k+1} i_{2p-2k+2}} \cdots \Omega_{i_{2p-1} i_{2p}},$$

$$k = 0, 1, \dots, p - 1,$$

$$(16) \quad \Psi_k = \epsilon_{i_1 \dots i_{2p}} \Omega_{i_1 i_2} \theta_{i_3} \cdots \theta_{i_{2p-2k}} \Omega_{i_{2p-2k+1} i_{2p-2k+2}} \cdots \Omega_{i_{2p-1} i_{2p}},$$

$$k = 0, 1, \dots, p - 1.$$

The forms Φ_k are of degree $2p - 1$ and Ψ_k of degree $2p$, and we remark that Ψ_{p-1} differs from Ω only by a numerical factor. Using (6) and (14), we see that Φ_k and Ψ_k are intrinsic and are therefore defined over the entire Riemannian manifold R^n .

We shall prove the following recurrent relation:

$$(17) \quad d\Phi_k = \Psi_{k-1} + \frac{2p - 2k - 1}{2(k + 1)} \Psi_k, \quad k = 0, 1, \dots, p - 1,$$

where we define $\Psi_{-1} = 0$. Using the property of skew-symmetry of the symbol $\epsilon_{i_1 \dots i_{2p}}$ in its indices, we can write

$$d\Phi_k = \epsilon_{(i)} du_{i_1} \theta_{i_2} \cdots \theta_{i_{2p-2k}} \Omega_{i_{2p-2k+1} i_{2p-2k+2}} \cdots \Omega_{i_{2p-1} i_{2p}} \\ + (2p - 2k - 1) \epsilon_{(i)} u_{i_1} d\theta_{i_2} \theta_{i_3} \cdots \theta_{i_{2p-2k}} \Omega_{i_{2p-2k+1} i_{2p-2k+2}} \cdots \Omega_{i_{2p-1} i_{2p}} \\ - k \epsilon_{(i)} u_{i_1} \theta_{i_2} \cdots \theta_{i_{2p-2k}} d\Omega_{i_{2p-2k+1} i_{2p-2k+2}} \Omega_{i_{2p-2k+3} i_{2p-2k+4}} \cdots \Omega_{i_{2p-1} i_{2p}},$$

where $\epsilon_{(i)}$ is an abbreviation of $\epsilon_{i_1 \dots i_{2p}}$. For the derivatives $du_i, d\theta_i, d\Omega_{ij}$ we can substitute their expressions from (11), (13), and (4). The resulting expression for $d\Phi_k$ will then consist of terms of two kinds, those involving ω_{ij} and those not. We collect the terms not involving ω_{ij} , which are

$$(18) \quad \Psi_{k-1} + (2p - 2k - 1) \epsilon_{(i)} u_{i_1} u_j \Omega_{j i_2} \theta_{i_3} \cdots \theta_{i_{2p-2k}} \Omega_{i_{2p-2k+1} i_{2p-2k+2}} \cdots \Omega_{i_{2p-1} i_{2p}}.$$

This expression is obviously intrinsic. Its difference with $d\Phi_k$ is an expression which contains a factor ω_{ij} in each of its terms.

We shall show that this difference is zero. In fact, let P be an arbitrary but fixed point of R^n . In a neighborhood of P we can choose a family of frames $e_1 \cdots e_n$ such that at P ,

$$\omega_{ij} = 0.$$

(This process is "equivalent" to the use of geodesic coordinates in tensor notation.) Hence, for this particular family of frames, the expressions (18) and $d\Phi_k$ are equal at P . It follows that they are identical, since both expressions are intrinsic and the point P is arbitrary.

To transform the expression (18) we shall introduce the abbreviations

$$(19) \quad \begin{cases} P_k = \epsilon_{(i)} u_{i_1}^2 \Omega_{i_1 i_2} \theta_{i_3} \cdots \theta_{i_{2p-2k}} \Omega_{i_{2p-2k+1} i_{2p-2k+2}} \cdots \Omega_{i_{2p-1} i_{2p}}, \\ S_k = \epsilon_{(i)} u_{i_1} u_{i_2} \Omega_{i_3 i_2} \theta_{i_3} \cdots \theta_{i_{2p-2k}} \Omega_{i_{2p-2k+1} i_{2p-2k+2}} \cdots \Omega_{i_{2p-1} i_{2p}}, \\ T_k = \epsilon_{(i)} u_{i_3}^2 \Omega_{i_1 i_2} \theta_{i_3} \cdots \theta_{i_{2p-2k}} \Omega_{i_{2p-2k+1} i_{2p-2k+2}} \cdots \Omega_{i_{2p-1} i_{2p}}, \end{cases}$$

which are forms of degree $2p$. Owing to the relations (1) and (12) there are some simple relations between these forms and Ψ_k . In fact, we can write

$$P_k = \epsilon_{(i)}(1 - u_{i_2}^2 - u_{i_3}^2 - \dots - u_{i_{2p}}^2)\Omega_{i_1 i_2} \theta_{i_3} \dots \theta_{i_{2p-2k}} \Omega_{i_{2p-2k+1} i_{2p-2k+2}} \dots \Omega_{i_{2p-1} i_{2p}} \\ = \Psi_k - P_k - 2(p - k - 1)T_k - 2kP_k,$$

which gives

$$(20) \quad \Psi_k = 2(k + 1)P_k + 2(p - k - 1)T_k.$$

Again, we have

$$\Sigma_k = \epsilon_{(i)} u_{i_1} \Omega_{i_1 i_2} (-u_{i_1} \theta_{i_1} - u_{i_2} \theta_{i_2} - u_{i_4} \theta_{i_4} - \dots - u_{i_{2p}} \theta_{i_{2p}}) \theta_{i_4} \dots \\ \theta_{i_{2p-2k}} \Omega_{i_{2p-2k+1} i_{2p-2k+2}} \dots \Omega_{i_{2p-1} i_{2p}} \\ = T_k - (2k + 1)\Sigma_k,$$

and hence

$$(21) \quad T_k = 2(k + 1)\Sigma_k.$$

The expression (18) for $d\Phi_k$ therefore becomes

$$d\Phi_k = \Psi_{k-1} + (2p - 2k - 1)\{P_k + 2(p - k - 1)\Sigma_k\}, \quad k = 0, 1, \dots, p - 1.$$

Using (20) and (21), we get the desired formula (17).

From (17) we can solve Ψ_k in terms of $d\Phi_0, d\Phi_1, \dots, d\Phi_k$. The result is easily found to be

$$(22) \quad \psi_k = \sum_{m=0}^k (-1)^m \frac{2^{m+1}(k + 1)k \dots (k - m + 1)}{(2p - 2k - 1)(2p - 2k + 1) \dots (2p - 2k + 2m - 1)} d\Phi_{k-m}, \\ k = 0, 1, \dots, p - 1.$$

In particular, it follows that Ω is the exterior derivative of a form Π :

$$(23) \quad \Omega = (-1)^{p-1} \frac{1}{2^{2p} \pi^p p!} \Psi_{p-1} = d\Pi,$$

where

$$(24) \quad \Pi = \frac{1}{\pi^p} \sum_{m=0}^{p-1} (-1)^m \frac{1}{1 \cdot 3 \dots (2p - 2m - 1)m! 2^{p+m}} \Phi_m.$$

§3. Proof of the Gauss-Bonnet formula

Basing on the formula (24) we shall give a proof of the formula (9), under the assumption that R^n is a closed orientable Riemannian manifold.

We define in R^n a continuous field of unit vectors with a point 0 of R^n as the only singular point.⁷ By a well-known theorem the index of the field at 0 is equal to χ , the Euler-Poincaré characteristic of R^n . This vector field defines in M^{2n-1} a submanifold V^n , which has as boundary χZ , where Z is the $(n - 1)$ -

dimensional cycle formed by all the unit vectors through 0. The integral of Ω over R^n is evidently equal to the same over V^n . Applying Stokes's theorem, we get therefore

$$(25) \quad \int_{R^n} \Omega = \int_{V^n} \Omega = \chi \int_Z \Pi = \chi \frac{1}{1 \cdot 3 \cdots (2p-1) 2^p \pi^p} \int_Z \Phi_0.$$

From the definition of Φ_0 we have

$$(26) \quad \Phi_0 = (2p-1)! \sum_{i=1}^n (-1)^i \theta_1 \cdots \theta_{i-1} u_i \theta_{i+1} \cdots \theta_{2p}.$$

The last sum is evidently the volume element of the $(2p-1)$ -dimensional unit sphere. Therefore

$$\int_Z \Phi_0 = (2p-1)! \frac{2\pi^p}{(p-1)!}.$$

Substituting this into (25), we get the formula (9).

INSTITUTE FOR ADVANCED STUDY, PRINCETON, N. J. AND
TSING HUA UNIVERSITY, KUNMING, CHINA.

REFERENCES

1. ALLENDOERFER, C. B., *The Euler number of a Riemann manifold*, Amer. J. Math., **62** (1940), 243-248.
2. FENCHEL, W., *On total curvatures of Riemannian manifolds I*, Jour. London Math. Soc., **15** (1940), 15-22.
3. ALLENDOERFER, C. B., AND ANDRÉ WEIL, *The Gauss-Bonnet theorem for Riemannian polyhedra*, Trans. Amer. Math. Soc., **53** (1943), 101-129.
4. For its definition and topology see, for instance, E. STIEFEL, *Richtungsfelder und Fernparallelismus in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten*, Comm. Math. Helv., **8** (1936), 3-51.
5. WHITNEY, H., *Differentiable manifolds*, Annals of Math., **37** (1936), 645-680.
6. CARTAN, E., *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*, Paris 1928.
7. ALEXANDROFF-HOPF, *Topologie I*, 550.

6 Appendice : l'histoire des formes différentielles en topologie par H. Samelson

Nous reproduisons ici un article de H. Samelson sur l'histoire des formes différentielles en topologie. Si l'analysis situs, nom ancien de la topologie est née avec l'article d'Euler, sur les ponts de Königsberg, c'est véritablement avec Riemann dans les années 1860 puis avec Poincaré qu'elle se met à jouer un rôle important en mathématiques. Il faudra encore un certain temps pour que l'on comprenne que le lemme de Poincaré par exemple, avait une signification topologique.

Differential Forms, the Early Days; or the Stories of Deahna's Theorem and of Volterra's Theorem

Hans Samelson

This is a short informal history of the beginning of differential forms, up to the time of de Rham's work. It started with my being curious about how Poincaré actually stated Poincaré's Lemma. There were some surprises, mainly that Poincaré's Lemma is due to another person, and the same for the well known Frobenius Theorem.

I did look up everything that I quote. But of course I haven't looked up everything; when I say that something appeared first at such and such a place, I mean that I haven't come across an earlier reference.

Let us recall briefly what differential forms are and do: They are generalizations of the well known expressions $Pdx + Qdy$ and $Adydz + Bdzdx + Cdx dy$ that function as integrands of line or surface integrals and represents things like work done moving along a curve in a force field or the flux of a vector field through a surface. Thus a differential form ω , of degree r , defined in some open set in n -space \mathbb{R}^n (coordinates x_1, x_2, \dots, x_n), is an expression of the form $\sum a_{i_1 i_2 \dots i_r} dx_{i_1} dx_{i_2} \dots dx_{i_r}$, where the "coefficients" a_{\dots} are (suitably differentiable) functions, and where the "differentials" dx_i are symbols associated with the coordinates x_i (they are actually 1-forms, with coefficient 1).

The basic rule for multiplication of the dx_i is skew-symmetry: $dx_i dx_j = -dx_j dx_i$. In particular one has $dx_i dx_i = 0$. (This makes the appearance of Jacobians automatic: e.g., if x and y are functions of u and v , then $dx dy = (x_u du + x_v dv)(y_u du + y_v dv) = x_u y_u du du + x_u y_v du dv + x_v y_u dv du + x_v y_v dv dv = 0 + x_u y_v du dv - x_v y_u du dv + 0 = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} du dv$. The algebraic context is exterior algebra.) In line with this the a_{\dots} are usually taken skew-symmetric in their indices; for the above example $Adydz + \dots$ this would mean rewriting it as $1/2 Adydz - 1/2 Adzdy + \dots$.

For a function f of the x_i , one defines the "differential" df as the 1-form $\sum f_{x_i} dx_i$. (Thus the dx_i are the differentials of the functions x_i .)

For integration of an r -form over any oriented r -manifold in the domain of definition of ω one represents the manifold locally parametrically by writing the x_i as functions of r variables u_α that are adapted to the orientation of the manifold. The differentials dx_i now become 1-forms in the du_α , and the form ω reduces (by "multiplying out") to a single term $A du_1 du_2 \dots du_r$, where A is a function of the u_α . (This is the "restriction" of the form to the manifold.) One forms the usual integral of this over the appropriate region in u_α -space and combines the local contributions (using a partition of unity) to get the integral of ω over the whole manifold. (Parenthetically, there is a slightly different way of integrating something over a manifold, namely when the manifold carries some kind of distribution—matter or electricity or ...—with a density ρ . On the manifold an area-element dA is given, and finds the total mass or charge as $\int \rho dA$. This reduces of course again to local integrals, using local parametrizations. An orientation of the manifold is here usually not required.)

The next thing is to extend the operation d (as in df) to all forms: One forms the "exterior derivative" $d\omega$ by replacing each coefficient a_{\dots} by its differential da_{\dots} (and again "multiplying out"), resulting in an $(r + 1)$ -form. It turns out, quite formally, that the operation dd (d applied twice) is always 0 (from $f_{xy} = f_{yx}$).

Finally, the main fact, *Stokes's theorem*: If N is an oriented $(r + 1)$ -manifold, with boundary manifold $\delta N = M$ (appropriately oriented), then the integral of ω over M equals the integral of $d\omega$ over N : $\int_N d\omega = \int_{\delta N} \omega$. (Note: the boundary δN is closed; its boundary is empty.)

This concludes our very short overview of what differential forms are and do. All of it makes good sense in any manifold instead of just \mathbb{R}^n .

The beginning of the idea of differential forms is certainly what was later called the “total differential” of a function f of two (real) variables x, y : the expression $df = f_x dx + f_y dy$, interpreted as giving the change in f if one changes x and y by (small) amounts dx and dy . I don't know where this originated, but it was well known in Euler's days.

Around 1740 A.C. Clairaut [7, pp. 294–297], Euler [14, pp. 176–179], and (reportedly—see [7, p. 294]) A. Fontaine [15] [16], apparently independently, had the idea to investigate when an expression $Pdx + Qdy$, where P, Q are functions of x and y , is the differential of a function. (Actually Euler's work was earlier, 1734–1735, but it appeared only in 1740.) First they establish the commutativity relation $f_{xy} = f_{yx}$, then the necessary condition $P_y = Q_x$, and go on to show that the latter is sufficient: They assume f in the form $\int Pdx + r$ where r is a function of y only, thus assuring $f_x = P$, and then show that one can determine r so that $f_y = Q$ (here the necessary condition comes in, via $\int P_y dx = \int Q_x dx$). This is not really an existence proof, since the integrals are indefinite and there is no assurance of their existence.

Clairaut in [7], in a footnote on p. 294, says that Euler and Fontaine had the same result, Euler's work just appearing in [14] and Fontaine presenting his work to the Royal Academie in Paris the same day that Clairaut was lecturing about it there. According to [12] Fontaine's work appears in [15] (I could not trace this book, and consulted [16] which may well be the same book); all I could find there however, on p. 26, are the two statements: $\frac{d}{dy} \int \mu dx = \int \frac{\partial \mu}{\partial y} dx$ and the necessary condition: If $d\phi = Adx + Bdy$, then $\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$.

Later Cauchy noted that one can interpret the argument as giving the formula $f = \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy$, where now the integrals are definite, proving existence (modulo appropriate hypotheses); he also gave the corresponding formula for \mathbb{R}^n . All this is in [23, vol. 2, pp. 339–341, 488–490] (the book is based on Cauchy's lectures plus some other material).

But it took some time before it was realized that, if the integrability conditions hold, the line integral depends only on the endpoints of the curve (assuming simple connectedness of the domain—nobody worried about that at the time); and only late in the eighteen hundreds did Morera notice that one can find the function f by integrating along the straight segment from a fixed point p_0 to the variable point p (or indeed any other curve).

In fact, Clairaut, Euler, and Fontaine went further. They studied the question when a form $Pdx + Qdy + Rdz$ is “completely integrable” (we discuss the concept below). It amounts here to the existence of a “multiplier”, a function M such that $M(Pdx + Qdy + Rdz)$ is differential of a function. Euler gave the necessary (and as it turned out later, also sufficient) “integrability conditions” in [13], Clairaut had them in an implicit form [8] and (according to Clairaut) Fontaine had them as equations for M . (Incidentally, Euler seems to have considered forms that do not satisfy the integrability conditions as illegal. Some time later Monge noted that such expressions make some sense, because one can satisfy them by taking the variables as suitable functions of one variable [13, *Op. Omn.*, preface, p. IX].)

The next step was taken in [25], 1814–15 by J. Pfaff, a well known German mathematician (a contemporary French mathematician—I have forgotten who (Laplace?)—was asked about the best mathematician in Germany and answered “J. Pfaff”; upon “What about Gauss?”, he said “Gauss is the best mathematician in all of Europe”). He introduced the idea of finding integral manifolds, submanifolds (of as high a dimension as possible) of the space, on which a given differential form $a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + \cdots + a_n dx_n$ vanishes (reduces to the form 0). Here the a_i are given functions (C^∞ , say) of the real variables x_1, x_2, \dots, x_n .

This became known as *Pfaff’s problem* [18], [21].

In this context Pfaff looked for a normal form for such expressions under change of variables. His answer was that one can find (locally, of course) either systems of functions $(f_1, \dots, f_r, g_1, \dots, g_r)$ or systems $(f, f_1, \dots, f_r, g_1, \dots, g_r)$ with *independent* differentials, such that the 1-form can be written as $\sum_1^r f_i dg_i$ or $df + \sum_1^r f_i dg_i$. (One could then take these functions as part of a new coordinate system.) The number r is called the *class* of the 1-form. A special case is that where the form can be written as df , i.e., where it is a total differential. (In \mathbb{R}^{2n+1} a form of maximal class n , thus essentially $dz + y_1 dx_1 + \cdots + y_n dx_n$ with coordinates x_i, y_i, z , is called a *contact form*.)

Pfaff’s work was continued mostly in the direction of what now is called the Frobenius theorem, the basic and constantly used theorem about the solution manifolds of a system of 1-forms. This is the question of “complete integrability of a system of r 1-forms ω_i ”: What are the conditions under which these forms have $(n - r)$ -dimensional integral manifolds, in the sense that one can find r independent (i.e., with everywhere independent differentials) functions f_1, f_2, \dots, f_r such that the integral manifolds are given by putting the f_i equal to arbitrary constants? (It looks like the—almost too simple—case where the ω_i are just dx_1, dx_2, \dots, dx_r and the f_i can be taken as the x_1, \dots, x_r .) This is, at least at first, a local problem; one asks for a solution in sufficiently small open sets.

There is a “dual” version of the problem, in terms of vector fields: A vector X_x at a point x is given by its components ξ_1, \dots, ξ_n . It operates on functions defined near x by $X_x f = \lim_{t \rightarrow 0} (f(x + tX_x) - f(x))/t = \sum \xi_i f_{x_i}(x)$; this is “the derivative of f along X_x ”. (Operating on the coordinate x_i gives the component ξ_i .) We should also mention that a differential form acts at each point x as a linear function on the space of vectors at x , by $\omega(X_x) = \sum a_i(x) \cdot \xi_i$.

A vector field X assigns to each x a vector X_x , in a C^∞ way (the components are C^∞ functions); and then for any function f the derivative “along X ” is a new function Xf with $Xf(x) = X_x f$. A vector field X also defines a *flow*, along its “integral curves”, in its region of definition; this amounts to solving the ordinary differential equations $dx/dt = X$.)

Dual to the differential d for forms is the operation $[]$ (“bracket”), which assigns to two vector fields X, Y the vector field $XY - YX$. This is to be understood by operating on functions, with XYf meaning the result of applying X to the function Yf . This seems to involve second derivatives, but they drop out because $f_{xy} = f_{yx}$. Exercise: find the components of $[XY]$ in terms of those of X and Y (apply $[XY]$ to the coordinate functions x_i).

The complete integrability question now reads as follows: Let X_1, \dots, X_r be r vector fields (assumed independent at each x). Under what conditions can one find $n - r$ independent functions f_1, \dots, f_{n-r} such that the X_i nullify the f_j ? (Geometrically, the X_i are tangent to the manifolds given by setting all f_j equal to constants.)

Back to history.

Jacobi in [21] treated the case of a system of commuting vector fields (satisfying $[XY] = XY - YX = 0$ for any two fields in the system). This is actually pretty straightforward: one takes a small $(n - r)$ -surface that is transversal to the vectors at a point, and then lets the flows of the fields act on the surface. A. Clebsch attempted and maybe succeeded (see comments in [17]) in reducing the general case to Jacobi's. The work was continued and extended by many people; see ([21], [24], [8], [17], [20], [10], [22], [11]). In the long paper [17] Frobenius reviewed what had been done before and gave his own proof, introducing the concept of the "bilinear covariant" of a 1-form (it amounts to the exterior derivative). It is from here that Frobenius's name got attached to the theorem; he himself didn't give it any name. In the paper Frobenius notes that much earlier, in 1840, the paper [11] by F. Deahna stated and gave a proof for the full Frobenius theorem (Frobenius goes through and simplifies the proof). The paper seems to have been completely overlooked until Frobenius referred to it.

Thus Frobenius's Theorem is really Deahna's Theorem (unless some earlier author appears).

The way Deahna stated his condition is quite different from that of the other authors and might have been difficult to understand at the time, although from today's point of view it makes good sense and is to my mind the one form that really tells what is going on:

The now customary form of the conditions (the $d\omega_i$ are in the ideal generated by the ω_i , or the commutators $[X_i X_j]$ are linear combinations $\sum_1^r f_k X_k$ of the X_k with functions f_k as coefficients) are short and clean, but not very intuitive. Deahna's version, pushed a little, says: A system of independent 1-forms $\{\omega_i\}_1^{n-r}$, looked at (equivalently) as a field of r -planes (an r -distribution in the sense of Chevalley), is completely integrable, if and only if it is invariant under the flow generated by any vector field that lies everywhere in the distribution. (He states the condition in terms of the "variation" of the forms under such vector fields, without much explaining what this variation is; it is in fact the Lie derivative.) Later E. Cartan took up Pfaff's problem again in his paper [4], where he treats it in the language of (first order) differential forms and their "covariants" (exterior derivatives), which had been introduced by Frobenius and Darboux. In this paper he also introduces, quite formally, differential forms of higher order and their exterior derivatives (without mentioning Poincaré); actually the only higher forms he uses are what he calls the *higher derivatives*, i.e., the powers of the exterior derivative of the given form ω and their products with ω itself.

A couple of years later Cartan investigated a more general problem, which apparently had been considered only once earlier, by O. Biermann [1], namely that of finding integrals for a (not completely integrable) system of several Pfaffian (first order) forms ω_i . Put differently, one is given a distribution \mathcal{D} of p -planes and wants to find "integral" manifolds of maximal possible dimension whose tangent planes at each point are contained in the plane of \mathcal{D} , in other words, such that the restriction of the given 1-forms to the manifold vanish. In his very innovative approach he first notices that the exterior derivatives $d\omega_i$ also restrict to 0 on an integral manifold (his description is difficult to read; using the language of his time, he says that at each point the integral element must belong to several "complexes", a complex in \mathbb{R}^n or projective space being defined by a skew symmetric bilinear form; the confusion with complex numbers is what made Weyl introduce the greek version "symplectic"), and accordingly introduces the notion of an integral element (consisting of a point and a subspace of the space assigned to the point by \mathcal{D} , i.e., on which the ω_i vanish, and on which also the $d\omega_i$ restrict to 0) and of increasing chains (flags) of such elements of dimensions $1, 2, \dots$ at a point; the main strategy is then inductive, trying to extend an integral el-

ement and integral manifolds of some dimension to one of the next higher dimension. (He assumes that everything is real-analytic.)

Higher dimensional forms (without the name) had of course been around for a while in the guise of multiple integrals, extended over suitable surfaces, although usually one considered only a fixed surface with a mass or charge distribution, so that the presence of a form was not easily detected. There is an quite remarkable paper by Cartan [6] in which he (re)discovered integral geometry (obviously he hadn't heard of Crofton's work, e.g., expressing the length of a curve in the plane as an integral of the number of points of intersection with a variable straight line [9]). In it differential forms, as integrands of multiple integrals, defined in all of space and capable of being integrated over any "surface" (of the right dimension), are in the forefront. The manifolds in which he operates are those of interest for integral geometry: the (two-dimensional) space of lines in the plane, the spaces of lines or planes in 3-space (of dimension 4 or 3). Cartan finds the integrands that are invariant under the groups of motion in these spaces, and derives Crofton's formula and similar results.

The next big step comes with Poincaré. In his relatively early paper [26], whose main purpose is a discussion of residues of (complex) double integrals, he quite casually, with not much definition, introduces the general notion of a p -form for any p and immediately derives the "integrability conditions" (in essence the vanishing of the exterior derivative).

Integrability means for him that the integral of the form over a p -manifold depends only on the boundary of the manifold, and the integrability conditions are derived by considering a one-parameter family of manifolds with the same boundary.

In [27] he again takes up the matter. He states, again quite casually, that there is a general Stokes theorem, i.e., that to any p -form ω there is an associated $(p + 1)$ -form, defined by the integrability conditions (and which we now call the exterior derivative $d\omega$) such that the integral of the form over any closed p -manifold equals the integral of the associated form over any $(p + 1)$ -manifold that has the p -manifold as boundary. He states, again casually, that iterating this process "gives nothing" (in our terms, dd is 0), deduced either from formal computation or from the fact that for a form $d\psi$ the integral over any closed manifold vanishes (via Stokes's theorem for ψ), and so the integrability conditions hold for it.

Next comes, with more emphasis, but without proof or even any comment that a proof is necessary or possible, the converse: given a p -form ω whose integral over any closed manifold is 0, then there is a $(p - 1)$ -form, let's say ψ , that stands to ω in the relation described by Stokes's theorem (so that $\omega = d\psi$; he calls such an ω *exact*). Thus we have here the non-trivial half of what today one calls the *Poincaré Lemma*: ω is $d\psi$ for some ψ (ω is "exact") if and only if $d\omega = 0$ (ω is "closed"). (The trivial half is the relation $dd = 0$.) For $p = 1$ this is the Clairaut-Euler-Fontaine theorem about $Pdx + Qdy$ described earlier (note $d(Pdx + Qdy) = (Q_x - P_y)dxdy$).

Actually there are two versions here: The Lemma as now understood is local; ω is given in some neighborhood of a point, and ψ has to exist only in a smaller neighborhood of the point. For Poincaré, ω seems to have been defined in all of \mathbb{R}^n and he seems to assert the existence of ψ also in all of \mathbb{R}^n . That is a stronger statement; however the proofs for the two are pretty much identical.

The Lemma expresses an important property of differential forms; it can be regarded as the basis for their usefulness in topology and other places.

The presentation of all this is made more complicated and more difficult to understand by the fact that Poincaré's concern is actually integral invariants, i.e., differential forms that are invariant under the flow generated by a given vector field X (the interest

coming from mechanics); the converse of Poincaré's lemma occurs within an argument about integral invariants.

Apparently it took quite a while for people to realize that the converse does need a real proof. In [18, p. 335] Goursat “deduces” the existence of ψ with $d\psi = \omega$ if $d\omega$ vanishes by saying that this amounts to some differential equations for the coefficients of ψ and that $d\omega = 0$ means that “the integrability conditions are satisfied”. It is only in 1922 that both Cartan and Goursat in their books [2, p. 71] and [19, p. 105] state and give a detailed proof for the existence. NB: Goursat uses the term “exacte” for a form that today one calls *closed*, i.e., one whose exterior derivative vanishes.

Cartan's proof is for all of \mathbb{R}^n as domain. He adds that the result is not necessarily true for other domains. As an example he gives the case of a sphere $\sum_1^n x_i^2 = 1$ as “domain”, where for an $(n - 1)$ -form (automatically closed) one has an additional necessary condition, namely that the integral of the form over the sphere must be 0 (by Stokes: the integral of $d\psi$ over S^{n-1} equals the integral of ψ over the boundary of the sphere, which is empty, and so the integral is 0). This seems to be the first time that a global fact or a connection between differential forms and the topology of manifolds was noted; it is the first hint of De Rham's Theorem.

Some time after I had written all this, Ted Frankel pointed out to me a reference that he had gotten from de Rham's book [29, pp. 83 and 105], which changes the story radically. It brings in a new player, Vito Volterra, and the upshot is that Poincaré's Lemma is really Volterra's Theorem. His work is contained in several Notes published in the *Rendiconti* of the Accademia dei Lincei [30]. It came out of his idea of “funzione delle linee”, functions of curves (functionals), meaning (mainly real or complex valued) functions on the space of either all curves, closed or not, or all closed curves, and later on the space of either all (closed or not) or all closed r -dimensional manifolds (always with a given orientation), in \mathbb{R}^n . He seems to have had in mind embedded C^∞ -manifolds. Also, curves are allowed to have corners; for r -manifolds angles (locally of the type of two half-spaces with the same boundary $(r - 1)$ -space) are allowed. Continuity and differentiability of functionals is defined; the latter via infinitesimal variations of the manifold given by a vector field in \mathbb{R}^n defined on the manifold.

His interest in this topic came from physics, in particular electromagnetism: things like the force from a magnetic field or a current flowing through a wire.

In practice such functionals are of course mostly given by (multiple) integrals, but Volterra thought of them as “arbitrary” functions. However he singled out a special class: An r -functional Φ for closed r -manifolds is called *simple* or *of first degree*, if it satisfies the following additivity condition: Suppose two closed r -manifolds S_1, S_2 “overlap”, i.e., have in common a r -submanifold (with boundary) on which they induce opposite orientations (they might make an angle along the boundary of the submanifold). (Think of two spheres in 3-space that touch along a flattened disk.) Write S_{12} for the closed manifold obtained as the union of S_1 and S_2 with the common submanifold removed; then $\Phi(S_{12})$ equals $\Phi(S_1) + \Phi(S_2)$.

For such a Φ he defines a $(r + 1)$ -functional for arbitrary $(r + 1)$ -manifolds S , which one might well call $d\Phi$, by the Stokes rule $d\Phi(S) = \Phi(\delta S)$ (with δ meaning boundary) and then proves (it is not clear how rigorous the proofs are) that $d\Phi$ is what amounts to an $(r + 1)$ -form: $d\Phi(S)$ is given by an integral over S with skew-symmetric coefficients. For such systems of coefficients he immediately defines what amounts to the exterior derivative, states the Stokes Formula, and says that it can be established as in the standard case. He notes that $d\Phi$ is a closed form, i.e., that the coefficients satisfy the relevant integrability condition.

Chapitre 7

Cohomologie de deRham

1 Généralités, principaux résultats.

Définition 7.1. On dit que la forme ω est fermée si elle vérifie $d\omega = 0$, elle est exacte si il existe α telle que $\omega = d\alpha$. Comme $d \circ d = 0$, toute forme exacte est fermée. On appelle k -ième groupe de cohomologie de de Rham de M et on note $H^k(M)$ le quotient de l'espace des k -formes fermées par les k -formes exactes.

Le corollaire suivant s'obtient en appliquant la formule de Stokes au cas d'une variété à bord vide.

Corollaire 7.2. Soit V une sous-variété orientable sans bord contenue dans M , et ω une forme exacte. Alors

$$\int_V \omega = 0$$

La formule de Stokes permet d'affirmer que si V est une sous-variété orientable sans bord de dimension n contenue dans M , l'application \int_V définit une application linéaire de $H^n(M)$ dans \mathbb{R} .

Exercice 1.1. Montrer que la forme $\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$ définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ est fermée mais n'est pas exacte. On pourra calculer son intégrale sur le cercle.

Montrer que si $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction méromorphe sur \mathbb{C} alors $f(z)dz$ est fermée dans le complémentaire de l'ensemble des pôles, mais n'est exacte que si pour chaque pôle ζ de f , le résidu de f en ζ est nul. D'ailleurs la partie imaginaire de dz/z coïncide avec $\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$ (en posant $z = x + iy$)

Définition 7.3. On définit $H^k(M)$ comme le quotient de l'espace des k -formes fermées sur M par l'espace des formes exactes. On l'appelle k -ième espace de cohomologie de M . Si α est une forme fermée on note $[\alpha]$ sa classe. On note $H^*(M) = \bigoplus_{k=0}^n H^k(M)$. Si f est une application différentiable $f : M \rightarrow N$, on définit une application $f^* : H^k(N) \rightarrow H^k(M)$ donnée par $f^*([\alpha]) = [f^*(\alpha)]$.

Remarque 1.1. Le fait que $f^*(d\alpha) = df^*(\alpha)$ montre que f^* est bien définie.

Avant de calculer ces objets, montrons que f^* est invariante par homotopie.

Théorème 7.4. *Soit $f : M \times [0, 1] \rightarrow N$ une application C^∞ . On note $f_t(x) = f(x, t)$. On a alors $[f_0^*] = [f_1^*]$.*

Démonstration. Soit $j_t : M \rightarrow M \times [0, 1]$ donnée par $j_t(x) = (x, t)$, montrons que $j_1^*\alpha - j_0^*\alpha = dK(\alpha) + K(d\alpha)$ où K est une application linéaire de $\Omega^*(M \times [0, 1]) \rightarrow \Omega^{*-1}(M \times [0, 1])$ donnée par

$$K(\alpha(x, t) + \beta(x, t) \wedge dt) = \int_0^1 \beta(x, t) dt = \int_0^1 (j_t)^* i_{\frac{\partial}{\partial t}} \omega dt.$$

En effet, si $\varphi^s(x, s) = (x, s + t)$ est le flot de $\frac{\partial}{\partial t}$ défini sur $M \times \mathbb{R}$, on a $\varphi^t \circ j_0 = j_t$ et donc

$$\begin{aligned} j_1^*(\omega) - j_0^*(\omega) &= j_0^*[(\varphi^1)^* - (\varphi^0)^*](\omega) = j_0^* \int_0^1 \frac{d}{dt} (\varphi^t)^*(\omega) dt = \int_0^1 (\varphi^t)^*(L_{\frac{\partial}{\partial t}} \omega) dt = \\ &= \int_0^1 j_0^*(\varphi^t)^* di_{\frac{\partial}{\partial t}} \omega dt + \int_0^1 j_0^*(\varphi^t)^* i_{\frac{\partial}{\partial t}} d\omega dt = d \int_0^1 (j_t^* i_{\frac{\partial}{\partial t}} \omega) dt + \int_0^1 (j_t^* i_{\frac{\partial}{\partial t}} d\omega) dt = \\ &= dK\omega + Kd\omega \end{aligned}$$

On a alors $f_t = f \circ j_t$ et donc

$$f_1^*(\omega) - f_0^*(\omega) = (j_1)^* - (j_0^*(f^*(\omega))) = dK(f^*(\omega)) + Kd(f^*(\omega))$$

Il en résulte que si ω est fermée, $f_1^*(\omega) - f_0^*(\omega) = d(K(f^*(\omega)))$ et donc $[f_1^*(\omega)] = [f_0^*(\omega)]$ ce qui signifie que $[f_1^*] = [f_0^*]$. \square

Le lemme de Poincaré en découle aisément :

Proposition 7.5. *Soit U un domaine tel qu'il existe un point x_0 de U et une famille continue d'applications C^∞ telle que $r_0 = \text{Id}$ et r_1 est constante égale à x_0 . Alors toute forme fermée sur U de degré non nul est exacte. en d'autres termes $H^0(M) = \mathbb{R}$ et $H^k(M) = 0$ pour $k \neq 0$.*

Démonstration. On va supposer que la famille r_t est en fait lisse, le cas général se traitant par approximation. Comme dr_1 est nulle, $r_1^*\alpha = 0$ dès que α est de degré non nul.

Mais $r_1 = \text{Id}$ donc $r_1^* = \text{Id}$ donc $\text{Id} = 0$ sur $H^k(U)$ pour $k \neq 0$. Il en résulte que $H^k(U) = 0$ pour $k \neq 0$. \square

En utilisant un résultat d'approximation, on en déduit que $[f^*]$ est bien défini même si f n'est que continue (attention à l'abus de notation, car f^* n'est alors pas définie).

Proposition 7.6. *Soit f une application continue de M dans N . Alors pour ε assez petit, si g est C^∞ et $d(g(x), f(x)) < \varepsilon$ on a que $[g^*] : H^*(N) \rightarrow H^*(M)$ ne dépend pas du choix de g . On la note $[f^*]$.*

Démonstration. Au vu du théorème précédent, il suffit de prouver que si g_0, g_1 sont deux telles applications, elles sont homotopes. □

Le produit extérieur des formes différentielles induit un produit en cohomologie :

Proposition 7.7. *La classe de cohomologie du produit extérieur de deux formes fermées ne dépend que de la classe de cohomologie de chacune des formes. Le produit extérieur des formes induit donc une structure d'algèbre sur $H^*(M)$.*

Démonstration. En effet, si $\alpha = d\beta$,

$$\alpha \wedge \gamma = d\beta \wedge \gamma = d(\beta \wedge \gamma)$$

□

2 Cohomologie relative, à support compact

Soit $\Omega_c^k(M) = \{\alpha \in \Omega^k(M) \mid \text{supp}(\alpha) \text{ est compact}\}$ l'espace des k -formes à support compact. On pose

Définition 7.8. On définit $H_c^k(M)$ comme le quotient de l'espace des k -formes fermées sur M à support compact par l'espace des formes exactes à support compact. On l'appelle k -ième espace de cohomologie de M à support compact. Si α est une forme fermée à support compact on note $[\alpha]$ sa classe. On note $H_c^*(M) = \bigoplus_{k=1}^n H_c^k(M)$. Si f est une application différentiable **propre** $f : M \rightarrow N$, on définit une application $f^* : H_c^k(N) \rightarrow H_c^k(M)$ donnée par $f^*([\alpha]) = [f^*(\alpha)]$.

Le résultat suivant se démontre comme dans le cas à support quelconque :

Proposition 7.9. *Soit $F : [0, 1] \times M \rightarrow N$ une homotopie propre entre $f_0 = F(0, \bullet)$ et $f_1 = F(1, \bullet)$*

3 Suites exactes en cohomologie. Suites relatives et de Mayer-Vietoris

L'objet de cette section est de calculer la cohomologie d'un espace à partir d'une décomposition de cet espace en morceaux. Le cas le plus simple est bien sûr celui d'un ouvert contractile.

Proposition 7.10. Soit U un ouvert contractile, c'est-à-dire tel qu'il existe une famille continue r_t tel que $r_0 = \text{Id}$ et $r_1(U) = \{x_0\}$. Alors $H^0(U) = \mathbb{R}$ et $H^k(U) = \{0\}$ pour $k \geq 1$.

Ce cas particulier se généralise

Proposition 7.11. Soit U, V des ouverts on a alors une suite exacte (i.e. telle que le noyau de chaque application est l'image de la précédente)

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & H^0(U \cup V) & \longrightarrow & H^0(U) \oplus H^0(V) & \longrightarrow & H^0(U \cap V) \\
 & & & & \delta^0 & & \\
 & & \longleftarrow & & H^1(U \cup V) & \longrightarrow & H^1(U) \oplus H^1(V) & \longrightarrow & H^1(U \cap V) \\
 & & & & \delta^1 & & \\
 & & \longleftarrow & & H^2(U \cup V) & \longrightarrow & \dots & & \dots \\
 & & & & \dots & & \dots & & H^{n-1}(U \cap V) \\
 & & & & \delta^{n-1} & & \\
 \dashrightarrow & & H^n(U \cup V) & \longrightarrow & H^n(U) \oplus H^n(V) & \longrightarrow & H^n(U \cap V) \\
 & & \delta^n & & \\
 \dashrightarrow & & H^{n+1}(S^n) & \longrightarrow & & &
 \end{array}$$

Démonstration. Soit ρ_U, ρ_V une partition de l'unité associée à U, V . Nous allons définir une suite

$$0 \longrightarrow \Omega^*(U \cup V) \longrightarrow \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \longrightarrow \Omega^*(U \cap V) \longrightarrow 0$$

Si $\alpha \in \Omega^*(U \cup V)$ on lui associe leur restriction à U et V ce qui définit la première application. La deuxième application est la différence des restrictions. La seule exactitude posant problème est pour montrer que toute forme sur $U \cap V$ est différence d'une forme sur U et d'une forme sur V . Or si ρ_U, ρ_V est une partition de l'unité associée à la partition U, V de $U \cup V$ (attention $U \cup V$ n'est pas nécessairement compacte) i.e. ρ_U est dans $C^\infty(U \cup V)$ et à support¹ dans U , ρ_V à support dans V et ρ_U à support dans U

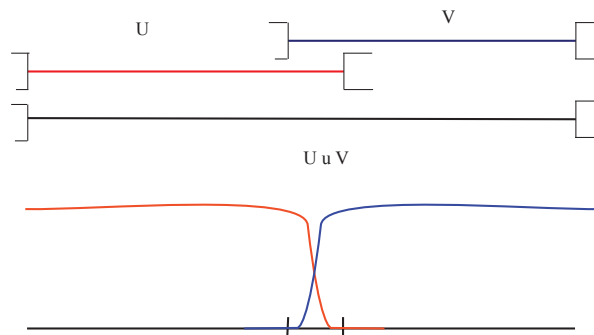


FIGURE 7.1 – Partition de l'unité de $U \cup V$

1. Attention, ici on considère le support d'une fonction f dans $U \cup V$, c'est-à-dire la fermeture dans $U \cup V$ de $\{x \mid f(x) \neq 0\}$.

□

4 Quelques calculs de cohomologie

Calculons alors la cohomologie des sphères. On peut écrire $S^n = D^+ \cup D^-$ où D^\pm sont des voisinages des hémisphères nord et sud, et $D^+ \cap D^-$ est un voisinage de l'équateur. Plus explicitement on peut poser $D^+ = \{(x_0, \dots, x_n) \mid x_0 \geq -\frac{1}{2}\}$ et $D^- = \{(x_0, \dots, x_n) \mid x_0 \leq \frac{1}{2}\}$ et donc $D^+ \cap D^- = \{(x_0, \dots, x_n) \mid -\frac{1}{2} \leq x_0 \leq \frac{1}{2}\}$ et cet ensemble se déforme sur l'équateur $\{x_0 = 0\}$ par

$$(x_0, \dots, x_n) \mapsto \left(tx_0, x_1 \sqrt{\frac{1-t^2x_0^2}{1-x_0^2}}, x_n \sqrt{\frac{1-t^2x_0^2}{1-x_0^2}} \right)$$

On a donc la suite exacte de Mayer-Vietoris

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(S^n) & \longrightarrow & H^0(D^+) \oplus H^0(D^-) & \longrightarrow & H^0(S^{n-1}) \\ & & & & \delta^0 & & \\ & \longleftarrow & H^1(S^n) & \longrightarrow & H^1(D^+) \oplus H^1(D^-) & \longrightarrow & H^1(S^{n-1}) \\ & & & & \delta^1 & & \\ & \longleftarrow & H^2(S^n) & \longrightarrow & \dots & & \dots \\ & & \dots & & \dots & & H^{n-1}(S^{n-1}) \\ & & & & \delta^{n-1} & & \\ & \dashleftarrow & H^n(S^n) & \longrightarrow & H^n(D^+) \oplus H^n(D^-) & \longrightarrow & H^n(S^{n-1}) \\ & & & & \delta^n & & \\ & \dashleftarrow & H^{n+1}(S^n) & \longrightarrow & & & \end{array}$$

Par récurrence, cela démontre

Proposition 7.12. *Soit $n \geq 1$. On a $H^k(S^n) = 0$ si $k \neq 0, n$ et $H^0(S^n) = \mathbb{R}$, $H^n(S^n) = \mathbb{R}$.*

Démonstration. Le résultat est évident pour $n = 1$, vu que S^1 est connexe et orientable. Supposons le vérifié à l'ordre $n - 1$. On peut écrire pour $k \geq 1$, en utilisant le fait que $H^k(D^+) = H^k(D^-) = 0$, un morceau de la suite de Mayer-Vietoris

$$0 \oplus 0 \longrightarrow H^k(S^{n-1}) \longrightarrow H^{k+1}(S^n) \longrightarrow 0$$

Ceci démontre que $H^p(S^n) = 0$ pour $2 \leq p \leq n - 1$ et $H^n(S^n) = \mathbb{R}$. Pour $p = 1$ on écrit

$$0 \longrightarrow H^0(S^n) \longrightarrow H^0(D^+) \oplus H^0(D^-) \longrightarrow H^0(S^{n-1}) \longrightarrow H^1(S^n) \longrightarrow 0$$

qui est donc

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow H^1(S^n) \longrightarrow 0$$

□

5 Exercices

(A) (Borsuk-Ulam complexe)

Soit S^{2n-1} la sphère unité de \mathbb{C}^n , munie de l'action de S^1 donnée par

$$e^{i\theta} \cdot (z_1, \dots, z_n) = (e^{i\theta} z_1, \dots, e^{i\theta} z_n)$$

où $z_j = x_j + iy_j \in \mathbb{C}$.

On dit d'une application $f : S^{2n-1} \longrightarrow S^{2k-1}$ qu'elle est équivariante si elle vérifie $f(e^{i\theta} \cdot (z_1, \dots, z_n)) = e^{i\theta} \cdot f(z_1, \dots, z_n)$. Le but de cet exercice est de montrer que si une telle application existe, on a $k \geq n$. on suppose dans la suite $k < n$.

- (a) Montrer que le quotient de S^{2n-1} par S^1 s'identifie à $\mathbb{C}P^{n-1}$. On pourra montrer qu'une droite de \mathbb{C}^n est définie par un vecteur directeur unitaire défini modulo un complexe de module 1.
- (b) Montrer que f induit une application de $\mathbb{C}P^{n-1}$ vers $\mathbb{C}P^{k-1}$.
- (c) Montrer que si X_n est le champ de vecteurs $X_n(z_1, \dots, z_n) = (iz_1, \dots, iz_n)$, il engendre l'action de S^1 , c'est à dire que son flot est donné par $\varphi^\theta(z_1, \dots, z_n) = (e^{i\theta} z_1, \dots, e^{i\theta} z_n)$.
- (d) Soit α_n une 1-forme sur S^{2n-1} telle que $i_{X_n} \alpha_n = 1$ et $L_{X_n} \alpha_n = 0$. Montrer que $d\alpha_n$ induit une forme ω_n sur $\mathbb{C}P^{n-1}$, c'est-à-dire que si $\pi : S^{2n-1} \longrightarrow \mathbb{C}P^{n-1}$ est la projection, $d\alpha_n = \pi^*(\omega_n)$. On pourra utiliser le fait que $T_z \mathbb{C}P^{n-1} = T_z S^{2n-1} / (\mathbb{R}X_n)$.
- (e) Montrer que ω_n est fermée et que sa classe de cohomologie dans $H^2(\mathbb{C}P^{n-1})$ ne dépend pas du choix de α_n . On pourra montrer que si $i_{X_n} \beta = 0$, $L_{X_n} \beta = 0$, β induit une forme $\bar{\beta}$ sur $\mathbb{C}P^{n-1}$ (i.e. $\beta = \pi^*(\bar{\beta})$).
- (f) Soit α_k une 1-forme sur S^{2k-1} telle que $i_{X_k} \alpha_k = 1$ et $L_{X_k} \alpha_k = 0$. Montrer que $f^*(\alpha_k)$ vérifie les mêmes propriétés que α_n , i.e. $i_{X_n} f^*(\alpha_k) = 1$ et $L_{X_n} f^*(\alpha_k) = 0$.
- (g) Montrer que si $\alpha_n = \frac{i}{2} \sum_j z_j d\bar{z}_j - \bar{z}_j dz_j = \sum_j x_j dy_j - y_j dx_j$ vérifie les propriétés de la question (d) et que $\omega_n = \sum dz_j \wedge d\bar{z}_j$ définit bien une 2-forme fermée sur $\mathbb{C}P^{n-1}$.
- (h) Montrer que ω_n^n est une forme volume sur $\mathbb{C}P^{n-1}$, que $[\omega_n]^{n-1}$ est un générateur de $H^{2n-2}(\mathbb{C}P^{n-1})$, et que la classe de cohomologie $[\omega_n]$ représente un générateur de $H^2(\mathbb{C}P^{n-1}) = \mathbb{R}$ (on rappelle que $H^2(\mathbb{C}P^{n-1}) = \mathbb{R}$).
- (i) Montrer que $f^*([\omega_k]) = [\omega_n]$ et que donc $f^*([\omega_k])^{n-1} \neq 0$.
- (j) En déduire une contradiction en utilisant que $[\omega_k]^k = 0$.

- (B) (Invariant de Hopf) Soit $n \geq 2$, S^k la sphère de dimension k , et $f \in C^\infty(S^{2n-1}, S^n)$ une application C^∞ . On admettra que sur S^{2n-1} et sur $S^{2n-1} \times [0, 1]$, toute n -forme fermée est exacte, et que sur S^{2n-1} , toute $(n-1)$ -forme fermée est exacte. Soit α une n -forme d'intégrale 1 sur S^n . On pose $f^*(\alpha) = d\beta$, puis on définit $H(f) = \int_{S^{2n-1}} d\beta \wedge \beta$.
- Montrer qu'il existe bien un tel β , et que $H(f)$ ne dépend pas du choix de β .
 - Montrer que $H(f)$ ne dépend pas du choix de α .
 - Montrer que si n est impair, $H(f) = 0$ pour tout f .
 - Montrer que si f_0 et f_1 sont différentiablement homotopes, $H(f_0) = H(f_1)$. On pourra noter $F(t, x) = f_t(x)$ et $F^*(\alpha) = d\tilde{\beta}$.
 - On fait $n = 2$. Si f est l'application de Hopf définie par $f(z_1, z_2) = [z_1, z_2]$ où $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$ et $[z_1, z_2] \in \mathbb{C}P^1 = S^2$, calculer $H(f)$.
- (C) Montrer qu'une application de S^{2n} dans CP^n est de degré nul.
- (D) Montrer qu'une application de S^2 sur une surface de genre g non nul est de degré nul. On montrera que si $g \neq 0$, il existe toujours deux classes $\alpha, \beta \in H^1(M_g)$ telles que $\alpha \wedge \beta \neq 0 \in H^2(M_g)$.
- (E) On admettra dans cet exercice la dualité de Poincaré : si N^{n+1} est une variété compacte orientée de bord M^n , alors la dualité

$$DP : H^q(N) \longrightarrow H^{n+1-q}(N, M)^*$$

donnée par

$$\alpha \longrightarrow [\beta \longrightarrow \int_N \alpha \wedge \beta]$$

est un isomorphisme.

Soit maintenant M une variété compacte orientée sans bord de dimension $n = 4k$. On considère l'application $B : \Omega^{2k}(M) \times \Omega^{2k}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $(\alpha, \beta) \longrightarrow \int_M \alpha \wedge \beta$.

- Montrer que B induit une application encore notée $B : H^{2k}(M) \times H^{2k}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ qui définit une forme bilinéaire symétrique sur $H^{2k}(M)$.
- Montrer que cette forme est non-dégénérée.
On note $\sigma(M)$ sa signature, c'est à dire la différence entre le nombre de valeurs propres positives et le nombre de valeurs propres négatives.
On veut montrer que si $M = \partial N^{4k+1}$ avec N compacte orientée, alors $\sigma(M) = 0$. On note $i : M \longrightarrow N$ l'inclusion.
- On note \overline{M} la variété M avec l'orientation opposée. Comparer $\sigma(M)$ et $\sigma(\overline{M})$.
- Soit B une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée sur un espace vectoriel réel V . Montrer que s'il existe un sous-espace isotrope (i.e. sur lequel B s'annule) W tel que $2 \dim(W) = \dim(V)$, alors B est de signature nulle.
- Montrer que si $[\omega] \in H^{4k}(N)$ alors $\int_M i^* \omega = 0$. En déduire que le sous-espace de $H^{2k}(M)$ donné par $(i^*)H^{2k}(N)$ est isotrope.

- (f) Montrer en utilisant la dualité de Poincaré que $2 \dim((i^*)H^{2k}(N)) = \dim H^{2k}(M)$. On pourra vérifier que $DP \circ i^* \circ DP^{-1}$ est l'adjoint de l'application cobord $\delta : H^{2k}(M) \rightarrow H^{2k+1}(N, M)$ qui apparaît dans la suite exacte longue de la paire (N, M) . Conclure.
- (g) Montrer que si deux variétés de dimension $n = 4k$ compactes orientées sans bord M_1, M_2 sont telles qu'il existe N compacte orientée avec $\partial N = M_1 \cup \overline{M_2}$, alors $\sigma(M_1) = \sigma(M_2)$.

Chapitre 8

Quelques propriétés des champs de sous-espaces

Il arrive souvent que des contraintes naturelles sur l'évolution d'un système s'expriment comme des contraintes infinitésimales, mais en nombre insuffisant pour déterminer cette évolution. C'est le cas de tous les systèmes « commandés », voitures, robots, etc... En général, nous pouvons faire évoluer un tel système à notre guise, pourvu de respecter certaines contraintes. Le cas le plus simple est celui d'une voiture : on peut la faire avancer ou reculer, et tourner le volant, mais le mouvement doit se faire dans la direction prescrite par les roues. De même, on peut agir sur un bras articulé, pourvu de respecter les contraintes de ses articulations.

Commençons par le cas le plus simple : celui du monocycle roulant sans glisser sur le plan horizontal. Un modèle simplifié consiste à le repérer par la position de son centre de gravité dans le plan (x, y) et l'angle θ entre la direction de la roue et celle de l'axe Ox . Le mouvement doit alors vérifier l'équation $\sin(\theta)\dot{x} - \cos(\theta)\dot{y} = 0$.

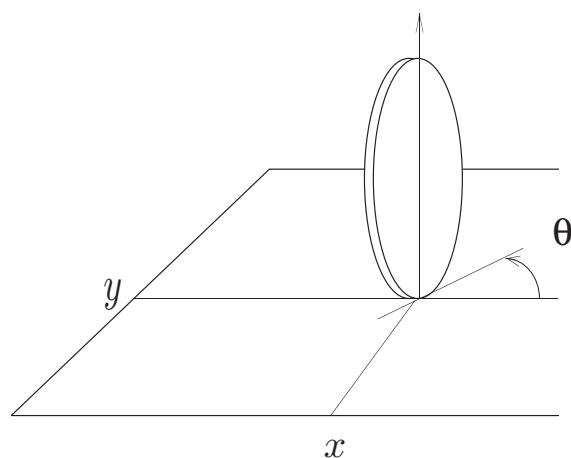


FIGURE 8.1 – Monocycle et ses coordonnées (d'après le chapitre 4 de [Bellaïche-Jean-Risler])

Dit autrement, le vecteur vitesse $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta})$ est contenu dans le plan $D(x, y, \theta) = \{(u, v, w) \mid \sin(\theta)u - \cos(\theta)v = 0\}$. On dit alors que l'on a deux degrés de liberté, et on peut se demander quels sont les points de l'espace que l'on peut rejoindre à partir d'un point donné, en suivant un chemin qui reste partout tangent au plan $D(x, y, \theta)$.

On verra que l'on peut atteindre n'importe quel point du plan et n'importe quelle direction de la roue, ce qui peut sembler surprenant, puisque l'espace a trois dimensions, alors que le mouvement est « limité à deux dimensions » .

La conduite d'une voiture est un problème analogue, ainsi que celui d'un semi-remorque. On a le même type de résultat, ce qui a pour conséquence théorique la possibilité de garer sa voiture. Les questions pratiques, que nous n'abordons pas ici (combien de manœuvres faut-il pour cela, quelle est la manœuvre optimale) sont encore l'objet de recherches actives.

1 Théorème de Frobenius

Soit M^n une sous-variété de \mathbb{R}^N . Supposons donné en chaque point $x \in M^n$ un sous-espace vectoriel, $D(x)$ de $T_x M$.

On suppose, en un sens que l'on va préciser, que $D(x)$ est C^∞ en x . On appelle la donnée de $x \rightarrow D(x)$ un champ de sous-espaces¹.

Définition 8.1. Le champ D est C^∞ s'il vérifie l'une des deux conditions équivalentes :

- (A) au voisinage de chaque point x , $D(x)$ est engendré par p champs de vecteurs C^∞ linéairement indépendants X_1, \dots, X_p
- (B) au voisinage de chaque point x , $D(x)$ est définie par $(n - p)$ formes différentielles (de degré 1), linéairement indépendantes en chaque point. En d'autres termes,

$$D(x) = \bigcap_{1 \leq j \leq n-p} \ker(\alpha_j)$$

On rappelle qu'une forme différentielle de degré un est la donnée en chaque point de $x \in M$ d'une forme linéaire sur $T_x M$, dont les coefficients dépendent de manière C^∞ du point. On notera que le procédé d'orthonormalisation de Schmidt conservant la propriété d'être C^∞ , on peut supposer que les X_i forment une famille orthonormée.

Pour montrer que (A) entraîne (B), considérons Y_1, \dots, Y_{n-p} complétant la famille (X_1, \dots, X_p) en une base de $T_x M$.

On peut encore supposer que $(X_1, \dots, X_p, Y_1, \dots, Y_{n-p})$ est orthonormée et C^∞ .

Alors $\alpha_i(x).h = \langle Y_i(x), h \rangle$ est une forme différentielle C^∞ sur M . Ces formes sont linéairement indépendantes sur $T_x M$ (car $\langle Y_i(x), Y_j(x) \rangle = \delta_{ij}$), et $D(x) = \bigcap_{1 \leq j \leq n-p} \ker(\alpha_j)$.

1. Souvent appelé dans la littérature « distribution » terminologie que nous avons évitée.

Étant donné un tel champ, il est naturel de considérer les sous-variétés tangentes à $D(x)$.

Définition 8.2. Une sous-variété V de M est dite tangente à D si et seulement si

$$\forall x \in V, T_x V \subset D(x)$$

On dit que V est une sous-variété intégrale de D si

$$\forall x \in V, T_x V = D(x)$$

Outre les sous-variétés intégrales, on s'intéresse surtout au cas des courbes tangentes ($\dim V = 1$).

Notons qu'il existe toujours des courbes tangentes à D : il suffit de prendre les trajectoires de champs de vecteurs X tels que $X(x) \in D(x)$. Par contre il n'existe pas toujours de sous-variété intégrales (sauf si $\dim D(x) = 1!$). Si une telle sous-variété V existe, on voit aisément que toute courbe tangente à D rencontrant V est entièrement contenue dans V . En effet, comme dans la démonstration de la proposition 6.6, il suffit de démontrer que si $\gamma(0) \in V$ alors $\gamma([0, \varepsilon]) \subset V$ pour ε assez petit. Or soient $X_1(x), \dots, X_p(x)$ des champs de vecteurs formant une base de $D(x)$. On peut alors écrire de manière unique

$$\dot{\gamma}(t) = \alpha_1(t)X_1(\gamma(t)) + \dots + \alpha_p(t)X_p(\gamma(t))$$

Posons $X(t, x) = \alpha_1(t)X_1(x) + \dots + \alpha_p(t)X_p(x)$, alors X vérifie les hypothèses de la Proposition 6.6, et donc, si $\gamma(0) \in V$, $\gamma([0, \varepsilon]) \subset V$.

Étant donné un champ D , les questions suivantes se posent naturellement, et sont étroitement liées

- soit $x \in M$. Quels sont les points que l'on peut atteindre par des courbes tangentes à D ? En d'autres termes, décrire

$$\mathcal{A}_x = \{\gamma(1) \mid \gamma(0) = x, \dot{\gamma}(t) \in D(\gamma(t)) \forall t \in [0, 1]\}$$

ensemble des points « accessibles » à partir de x .

- existe-t-il des sous-variétés intégrales pour D ?

- si $y \in \mathcal{A}_x$, décrire un chemin γ tangent à D reliant x à y ?

Théorème 8.3 (Frobenius). *Soit D un champ de sous-espaces. Pour chaque point de M passe une sous-variété intégrale si et seulement si quels que soient les champs de vecteurs X et Y tangents à D , $[X, Y]$ est aussi tangent à D .*

Démonstration : La nécessité est évidente d'après la proposition 6.6.

Pour l'existence, plaçons nous dans un ouvert assez petit, sur lequel $D(x) = \langle X_1(x), \dots, X_p(x) \rangle$. Traitons d'abord le cas simple où $[X_i, X_j] = 0$. Soit φ_t^j le flot de X_j , l'application

$$\begin{aligned} \psi : [-\varepsilon, \varepsilon]^p &\longrightarrow M \\ (t_1, \dots, t_p) &\longrightarrow \varphi_{t_1}^1 \circ \dots \circ \varphi_{t_p}^p(x_0) \end{aligned}$$

a pour image une sous-variété intégrale de D . En effet $(\frac{\partial}{\partial t_j} \psi)(t_1, \dots, t_p) =$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_j}(\varphi_{t_1}^{t_1} \circ \dots \circ \varphi_{t_p}^{t_p})(x_0) &= \frac{\partial}{\partial t_j}(\varphi_j^{t_j} \circ \varphi_1^{t_1} \circ \dots \circ \varphi_{j-1}^{t_{j-1}} \circ \varphi_{j+1}^{t_{j+1}} \circ \dots \circ \varphi_p^{t_p})(x_0) \\ &= X_j(\varphi_j^{t_j} \circ \varphi_1^{t_1} \circ \dots \circ \varphi_{j-1}^{t_{j-1}} \circ \varphi_{j+1}^{t_{j+1}} \circ \dots \circ \varphi_p^{t_p}(x_0)) \end{aligned}$$

comme les X_j sont linéairement indépendants, $d\psi(t_1, \dots, t_p)$ est injective et a son image dans $D(\psi(t_1, \dots, t_p))$, qui est donc une sous-variété tangente à D . Comme elle a même dimension que D , c'est une sous-variété intégrale.

Montrons que l'on peut ramener le cas général à ce cas. Comme X_1 ne s'annule pas, d'après le théorème de redressement, on peut, quitte à restreindre U trouver un système de coordonnées où $X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$.

En soustrayant à X_2 un multiple de X_1 il s'écrira comme combinaison linéaire de $\frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ et en permutant les coordonnées, on peut supposer le coefficient de $\frac{\partial}{\partial x_2}$ non nul. Divisant par ce coefficient (ce qui oblige éventuellement à réduire encore U), on peut supposer qu'en x_0

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + \sum_{j \geq 3} a_2^j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

et ainsi de suite

$$X_k = \frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{j \geq k+1} a_k^j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

En retirant de X_2 successivement des multiples de X_3, X_4, \dots, X_p , on obtient

$$X'_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + \sum_{k \geq p+1} b_2^k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

et de même avec X_3, \dots, X_p .

Pour finir on a

$$X'_j = \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{k \geq p+1} b_j^k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

On a toujours $[X'_j, X'_\ell] \in \langle X'_1, \dots, X'_p \rangle$ et $D(x) = \langle X'_1, \dots, X'_p \rangle$. Mais $[X'_j, X'_\ell] \in \langle \frac{\partial}{\partial x_{p+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \rangle$ et vu que $\langle X'_1, \dots, X'_p \rangle \cap \langle \frac{\partial}{\partial x_{p+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \rangle = \{0\}$ on a finalement $[X'_i, X'_j] = 0$. Comme les X'_i sont linéairement indépendants et tangents à D , $\langle X'_1, \dots, X'_p \rangle(x) = D(x)$, et donc les X'_j commutent entre eux. \square

Lorsque les hypothèses du théorème de Frobenius sont satisfaites, on dit que le champ de sous-espaces D est **intégrable**.

Corollaire 8.4. *Sous les hypothèses du théorème de Frobenius, l'ensemble d'accessibilité, \mathcal{A}_x est égal à la plus grande « sous-variété intégrale » connexe passant par x . On appelle les \mathcal{A}_x les feuilles. Les feuilles réalisent une partition de M et on appelle « feuilletage » la décomposition de M^n en réunion des feuilles. Localement on peut trouver au voisinage de chaque point une « carte distinguée » sur $]0, 1[^n$ telle que les feuilles rencontrent la « carte distinguée » en une réunion dénombrables de « plaques » i.e. d'ensembles $\{x\} \times \mathbb{R}^{n-p}$.*

2 Les théorèmes de Chow et Sussmann

Que se passe-t-il si les conditions du théorème de Frobenius ne sont pas vérifiées ? À quoi ressemble alors l'ensemble \mathcal{A}_x ?

Un premier élément de réponse est donné par le

Théorème 8.5 (Sussmann). *L'ensemble \mathcal{A}_x est l'image d'une variété par une immersion.*

Démonstration : On rappelle qu'une immersion est une application de différentielle injective. Être une sous-variété immergée est une propriété locale : il suffit de montrer que \mathcal{A}_x est réunion d'images d'ouverts par des immersions.

Soit $E = L^1([0, 1], \mathbb{R}^p)$, et si $u = (u_1, \dots, u_p) \in E$ on note γ_u la solution de

$$\begin{cases} \dot{\gamma}(t) &= X_u(\gamma(t)) = u_1(t)X_1(\gamma(t)) + \dots + u_p(t)X_p(\gamma(t)) \\ \gamma(0) &= x \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned} \varphi : E &\rightarrow M \\ u &\mapsto \gamma_u(1) \end{aligned}$$

On vérifie que cette application est différentiable en u est bien définie d'après Cauchy-Lipschitz à paramètres (nous la calculerons ultérieurement) et de rang évidemment inférieur à la dimension de M .

Soit r le maximum du rang $D\varphi(u)$ lorsque u parcourt E , et u_0 un élément de E tel que $D\varphi(u_0)$ soit de rang r .

On prétend qu'il existe un ouvert \mathcal{U} d'un espace de Banach F , et

$$\Psi : \mathcal{U} \rightarrow M$$

telle que

1) $\forall v, \text{rang } D\Psi(v) = r$

2) $\Psi(\mathcal{U}) = \varphi(E)$

En effet par semi-continuité inférieure du rang, $\text{rang } D\varphi(u) = r$ pour u dans un voisinage \mathcal{W} de u_0 .

Soit \mathcal{U} l'ensemble des chemins u de $[0, 1]$ dans E , de la forme :

$$\begin{cases} u(t) = u_1(3t) \text{ pour un } u_1 \in \mathcal{W}, t \in [0, \frac{1}{3}] \\ u(t) = u_2(2 - 3t) \text{ pour } u_2 \in \mathcal{W}, t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ u(t) = v(3t - 2) \text{ pour } v \in E, t \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

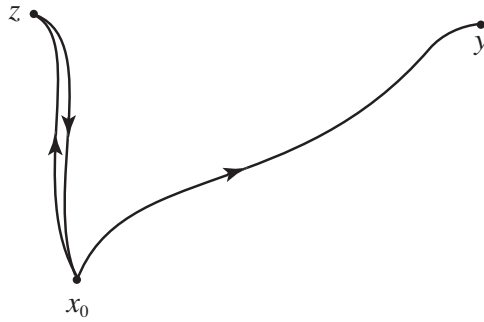


FIGURE 8.2 – Démonstration du théorème de Sussmann

On note alors $u = u_1 * u_2^{-1} * v$ et $\Psi(u_1, u_2, v) = \varphi(u_1 * u_2^{-1} * v)$.

On a bien que $u \in E$, et que $\Psi(u_1 * u_1 * v) = \varphi(v)$.

Montrons que $D\Psi$ est surjective. Or $\frac{\partial \Psi}{\partial u_1}(u_1, u_1, v)$ calcule la variation de $x(1)$ lorsque u_1 varie, pour x solution de

$$\begin{aligned} \dot{x} &= X_{u_1}(x(t))t \in [0, \frac{1}{3}] \\ &= -X_{u_2}(x(t))t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ &= X_v(x(t))t \in [\frac{2}{3}, 1] \end{aligned}$$

Or lorsqu'on varie u_1 , de δu_1 ,

$$\delta x(\frac{1}{3}) = D\varphi(u_1)\delta u_1,$$

$$x(\frac{2}{3}) = \varphi_2^{-1}(x(\frac{1}{3})) \text{ donc } \delta x(\frac{2}{3}) = d\varphi_2(x(\frac{1}{3}))\delta x(\frac{1}{3})$$

où $\varphi_1, \varphi_2, \psi$ sont les flots de X_{u_1}, X_{u_2}, X_v et $x(1) = \psi(x(\frac{2}{3}))$ d'où

$$\delta x(1) = d\psi(x(\frac{2}{3}))d\varphi_2(x(\frac{1}{3}))D\varphi(u_1)\delta u_1$$

Comme les flots sont des difféomorphismes, et que par hypothèse $D\varphi(u_1)$ est de rang r , on voit que

$$\frac{\partial}{\partial u_1} \varphi(u_1 * u_1^{-1} * v) = \frac{\partial}{\partial u_1} \psi(u_1, u_2, v)$$

est de rang r .

Nous pouvons maintenant conclure en utilisant le

Théorème 8.6 (Théorème du rang constant). *Soient E un espace de Banach, et F un espace de dimension finie. Soit $f : E \rightarrow F$ une application C^k ($k \geq 1$), telle que le rang de $df(x)$ soit constant au voisinage de x_0 et égal à p . Alors il existe g et h difféomorphismes locaux au voisinage de x_0 et $f(x_0)$ tels que, si $\pi = df(0) : E \rightarrow F$,*

$$h \circ f \circ g : x \longmapsto \pi(x)$$

En particulier si U est un voisinage assez petit de x_0 dans E , $f(U)$ est une sous-variété².

Corollaire 8.7. *Si X est une sous-variété, et $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue telle que pour tout $x \in X$, il existe Ω voisinage de x dans X , et il existe U voisinage de 0 dans un espace de Banach E , W voisinage de z dans \mathbb{R}^n et $f : U \rightarrow V$ tels que $df(x)$ est de rang constant au voisinage de 0 , $f(0) = z$, et $f(U) = V \cap W$. Alors $\varphi(X)$ est une « sous-variété immergée ».*

Démonstration du théorème du rang constant. Pour simplifier on suppose $x_0 = 0$ et $f(x_0) = 0$. Séparons les variables à la source et au but, afin que, écrivant

$$f(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) \in F_1 \oplus F_2$$

où $(x, y) \in E_1 \oplus E_2$, $\frac{\partial u}{\partial x}(0, 0)$ soit inversible.

Notons que l'on peut prendre $E_2 = \ker df(0)$, et pour E_1 un supplémentaire de E_2 , engendré par r vecteurs indépendants de E dont les images par $df(0)$ engendrent l'image de $df(x_0)$. On prendra $F_1 = \text{Im } df(0)$ et pour F_2 un supplémentaire de F_1 .

Alors par le théorème d'inversion locale, $g : (x, y) \longmapsto (u(x, y), y)$ est un difféomorphisme, et $f \circ g^{-1}(x, y) = (x, w(x, y))$. Mais $(x, y) \longmapsto (x, w(x, y))$ est de rang r au voisinage de 0 , si et seulement si $\frac{\partial w}{\partial y}$ est identiquement nulle au voisinage de 0 . On peut alors écrire $w(x, y) = \rho(x)$, et $f \circ g^{-1}(x, y) = (x, \rho(x))$.

Le difféomorphisme local $h : (u, v) \mapsto (u, v - \rho(u))$, vérifie $h \circ f \circ g^{-1}(x, y) = (x, 0)$ ce qui donne la réduction cherchée.

□

2. et si nous avons défini les sous-variétés d'un Banach, nous pourrions dire que $f^{-1}(x) \cap U$ est aussi une sous-variété.

Démonstration du Corollaire. Ψ définit une topologie sur son image : celle dont les ouverts sont les images d'ouverts de X . Muni de cette topologie (qui n'est pas nécessairement celle induite par l'espace ambiant), on voit que chaque point possède un voisinage, pour cette topologie, qui est l'image d'un voisinage de $x \in X$. Mais $\varphi(\Omega)$ est une sous-variété, d'après le théorème du rang constant. □

□

□

Exercice 2.1. Montrer que l'on peut remplacer L^1 par C^0 dans la démonstration ci-dessus.

Remarque 2.1. Dans le cas d'un champ de vecteurs, une orbite est « plus » que l'image d'une immersion. L'immersion est injective, même si ce n'est pas nécessairement une sous-variété. L'explication détaillée nécessiterait de définir la notion de sous-variété immergée, ce que nous ne souhaitons pas faire ici. Par contre, on voit que pour une immersion, j , la condition suivante nous assure que l'image n'a pas de « croisements » :

si $j(x) = j(y) = p$, il existe un voisinage U de x et V de y , U , un point z et un voisinage W de z tels que $j(z) = p$ et $j(U) \cup j(V) \subset j(W)$.

Pour voir que \mathcal{A}_x vérifie cette condition, il suffit de montrer que si $x \in \Psi(\mathcal{U}) \cap \Psi(\mathcal{U}')$ où \mathcal{U} et \mathcal{U}' sont deux ouverts, alors $\Psi(\mathcal{U}) \cap \Psi(\mathcal{U}')$ est un voisinage de x dans $\Psi(\mathcal{U})$.

Or si u_0, u'_0 sont les préimages de x dans \mathcal{U} et \mathcal{U}' , on peut considérer $u'' = u * u^{-1} * u'$ qui a aussi pour image par ψ le point x . De plus l'image par Ψ d'un voisinage de u'' contient à la fois $\Psi(\mathcal{U})$ (image de $v \mapsto v * u^{-1} * u'$ pour v voisin de u) et $\Psi(\mathcal{U}')$ (image de $v' \mapsto u * u^{-1} * v'$ pour v' proche de u'). Quitte à restreindre les voisinages \mathcal{U} et \mathcal{U}' , on voit que $\Psi(\mathcal{U}) \cup \Psi(\mathcal{U}') \subset \Psi(\mathcal{U}'')$.

Le théorème précédent nous permet de donner une condition suffisante pour que \mathcal{A}_x soit égal à l'espace tout entier.

Théorème 8.8 (Chow). *Si M est connexe et les crochets itérés $[X_1, [X_2 \dots [X_{k-1}, X_k] \dots]]$ de vecteurs tangents à D engendrent en chaque point tout l'espace, alors $\mathcal{A}_x = M$.*

Démonstration. D'après le théorème de Sussmann \mathcal{A}_x est une sous-variété immergée. Comme les vecteurs tangents à une sous-variété sont stables par crochets de Lie, que les X_i tangents à D sont évidemment tangents à \mathcal{A}_x , les crochets itérés sont tangents à \mathcal{A}_x . Il en résulte que l'espace tangent à \mathcal{A}_x en z est égal à $T_z M$. Comme la sous-variété est immergée, on en conclut que \mathcal{A}_x est ouverte dans M . Ce raisonnement montre que toutes les feuilles sont ouvertes, donc la réunion des feuilles distinctes de \mathcal{A}_x est aussi ouverte. On conclut que \mathcal{A}_x est à la fois ouvert et fermé, et par connexité $\mathcal{A}_x = M$. □

Exemples 2.1. (A) **Le monocycle**

Dans ce cas $X_1(x, y, \theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0)$ et $X_2(x, y, \theta) = (0, 0, 1)$. On a donc $[X_1, X_2] = (\sin(\theta), -\cos(\theta), 0)$ et X_1, X_2, X_3 engendrent \mathbb{R}^3 . On conclut d'après le théorème de Chow que l'on peut atteindre n'importe quelle position.

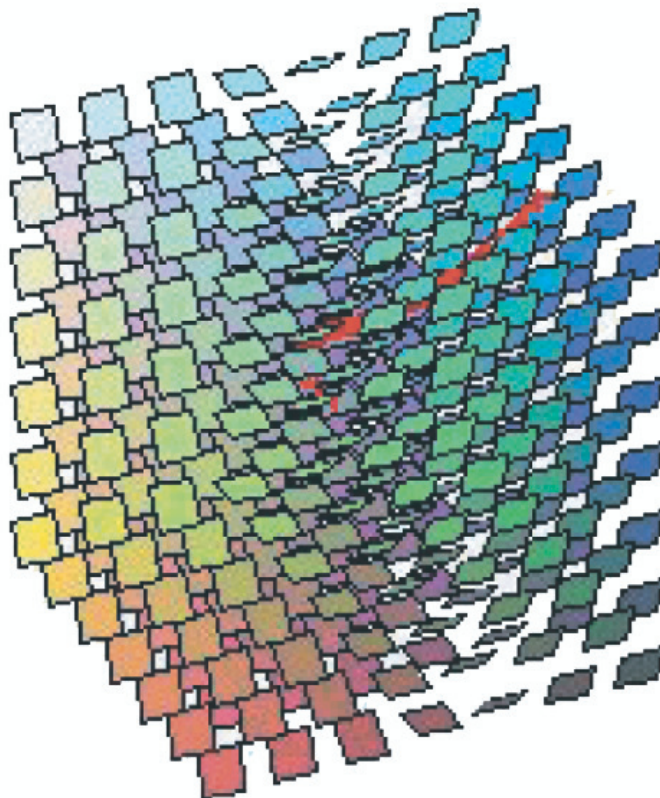


FIGURE 8.3 – Champ de plans non-intégrable et courbe tangente

(B) **L'entropie**(C. Caratheodory).

On considère un système « thermodynamique » décrit par un certain nombre de paramètres (pression, volume, température, etc...). On considère aussi avoir fixé l'énergie totale du système, et nous considérons les « transformations adiabatiques réversibles ». Il n'est pas nécessaire de savoir ce que cela signifie dans la pratique. Il suffit de savoir que, pour un chemin (différentiable) dans l'espace des états, la propriété d'être un chemin « de transformations adiabatiques réversibles » est une propriété qui se vérifie à chaque instant, de manière infinitésimale³.

En d'autres termes, en chaque point x de l'espace des phases, il existe un sous-espace vectoriel $D(x)$, tel que le chemin d'états $\gamma(t)$ est « adiabatique réversible » si et seulement si γ est en chaque point tangent à $D(x)$.

La question se pose alors de savoir si on peut passer de n'importe quel état du système à n'importe quel autre par une telle transformation. Et si ce n'est pas le cas, que peut on dire ?

Or si $D(x)$ est un champ d'hyperplans, et si on suppose une certaine « homogénéité »

3. Le lecteur pourra se convaincre que les « périphrases » des cours de physique de taupe pour définir de telles transformations se résument au fait que c'est une propriété du vecteur vitesse d'un chemin.

on a deux cas possibles⁴ :

-soit les crochets de champs de vecteurs de $D(x)$ engendrent l'espace, auquel cas on peut aller de n'importe quel point à n'importe quel autre par une transformation « adiabatique réversible »,

-soit les crochets de champs de $D(x)$ restent dans $D(x)$, auquel cas il existe un feuilletage dont les feuilles sont tangentes à $D(x)$.

Dans le cas décrit par la thermodynamique usuelle, le principe de Clausius⁵ nous dit que ce n'est pas le cas. Il y a des états qui ne peuvent être obtenus l'un de l'autre par une transformation « adiabatique réversible ».

Dans ce cas, supposons comme cela se produit en thermodynamique, que la condition infinitésimale d'adiabaticité soit donnée par une forme différentielle⁶, que l'on notera bien sûr δQ . Cela signifie que

$$\delta Q(x)h = 0 \Leftrightarrow h \in D(x)$$

Alors si S une fonction qui décrit localement les feuilles du feuilletage : $\mathcal{A}_x = \{y \mid S(y) = S(x)\}$. alors comme $T_x\mathcal{A}_x = \{h \mid \delta Q(x)h = 0\} = \{h \mid dS(x)h = 0\}$, et puisque $dS(x)$ et $\delta Q(x)$ ont même noyau elles sont proportionnelles : il existe donc une fonction que l'on notera $T(x)$, telle que $dS(x) = \frac{1}{T(x)}\delta Q(x)$.

On aura reconnu l'entropie S , et la température T .

(C) Boule roulant sans glissement

Nous allons maintenant traiter l'exemple de la contrainte de **roulement sans glissement** d'une boule sur un plan, qui s'exprime ainsi :

Soit $R(t)$ la matrice de rotation qui décrit la position de la boule à l'instant t , et $(x(t), y(t))$ les coordonnées de son centre.

Un point e de la boule, sera à l'instant t en

$$(x(t), y(t), 0) + R(t).e$$

La condition de roulement sans glissement nous dit que le point de contact avec la table, qui correspond à $(x(t), y(t), -1)$ et donc sur la boule à

$$R(t)e = (0, 0, -1) = v$$

a une vitesse nulle, c'est à dire

$$(\dot{x}(t), \dot{y}(t), 0) + \dot{R}(t)R(t)^{-1}v = 0.$$

Soit $\Omega(t)$ la matrice antisymétrique telle que $\dot{R}(t) = \Omega(t)R(t)$. La condition ci-dessus s'exprime par $(\dot{x}(t), \dot{y}(t), 0) = -\Omega(t)v$

4. cette partie de l'argumentation n'est pas rigoureuse, comme le lecteur est invité à le vérifier.

5. il s'agit d'un fait expérimental, irréductible à une démonstration mathématique : il n'existe pas de chemin adiabatique réversible dont le seul effet est de refroidir un corps isolé en produisant du travail mécanique.

6. Ici ce n'est rien d'autre qu'une forme linéaire définissant $D(x)$ en x , et dépendant de manière C^∞ de x .

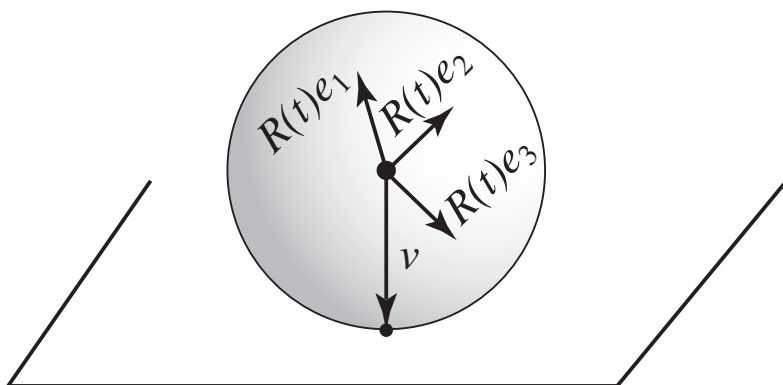


FIGURE 8.4 – Boule roulant sans glisser sur un plan

La position de la boule, qui est décrite par un point d'une sous-variété de dimension 5, $\mathbb{R}^2 \times SO(3)$ dans l'espace $\mathbb{R}^2 \times M_3(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{11}$, et la condition de « roulement sans glissement » s'exprime par la relation satisfaite par le vecteur vitesse $(\dot{Z}(t), \dot{R}(t))$:

$$\dot{Z}(t) - \dot{R}(t)R(t)^{-1}v = 0 .$$

Il s'agit de deux conditions, qui déterminent en chaque point de $\mathbb{R}^2 \times SO(3)$ un sous-espace de dimension 3 de son espace tangent.

Si on pose $\Omega(t) = \dot{R}(t)R(t)^{-1}$ qui est une matrice antisymétrique, et s'identifie donc à un vecteur $\omega(t)$ ($\Omega(t) = L_{\omega(t)}$), appelé le vecteur instantané de rotation.

L'espace $D(Z, R)$ est alors engendré par

$X_1 = (0, 1, e_1)$, générateur du roulement sans glissement dans la direction e_1

$X_2 = (1, 0, e_2)$, générateur du roulement sans glissement dans la direction e_2

$X_3 = (0, 0, e_3)$, générateur du roulement sans glissement autour de l'axe vertical e_3

On a alors que $[X_1, X_2] = (0, 0, e_1 \wedge e_2) = X_3$, et $[X_1, X_3] = (0, 0, e_1 \wedge e_3) = (0, 0, -e_2)$, $[X_2, X_3] = (0, 0, e_2 \wedge e_3) = (0, 0, e_1)$. Comme les vecteurs $X_1, X_2, X_3 = [X_1, X_2], [X_3, X_1], [X_3, X_2]$ forment en chaque point une base de $\mathbb{R}^2 \times T_R SO(3)$ on voit que D vérifie la condition de Chow. La connexité de l'espace des positions permet de dire que tout point peut-être atteint par un chemin tangent au champ de sous-espaces : on peut joindre deux positions quelconques de la boule par un roulement sans glissement sur le plan.

On peut d'ailleurs constater que les champs X_1, X_2 suffisent pour que leurs crochets itérés engendrent l'espace tangent tout entier. Il faut noter que les roulements dans la direction e_1 et e_2 préservent la composante verticale du moment cinétique. Ces mouvements peuvent en fait être réalisés sans force extérieure à la boule (autre que les forces de frottement du plan).

Cependant le théorème de Chow nous permet de réaliser une rotation quelconque autour de l'axe vertical en composant de tels roulements. Donc, bien que la composante verticale du moment cinétique de la boule soit de dérivée constante, cette composante verticale peut varier. L'explication est que si α_v est la forme différentielle mesurant cette composante verticale, $\ker(\alpha_v)$ qui contient $D(Z, R)$ mais est non intégrable (en effet, $X_1, X_2 \in \ker(\alpha_v)$ mais $\alpha_v(X_3) = 1$).

Un phénomène analogue explique pourquoi un chat lâché tête en bas, peut retomber sur ses pattes malgré la conservation du moment cinétique.

Une autre manière de revoir la dualité « intégrabilité/non-intégrabilité » est en termes de **formes différentielles** et leurs **facteurs intégrants**.

Soit alors α une forme différentielle de degré un sur M ne s'annulant pas. Cherchons la condition pour que $D(x) = \{h \mid \alpha(x)h = 0\}$ soit intégrable.

Rappelons pour cela⁷ que si X, Y sont des champs de vecteurs, on a

$$d\alpha(x)(X(x), Y(x)) = d(\alpha(x)X(x))Y(x) - d(\alpha(x)Y(x))X(x) - \alpha(x)[X, Y](x)$$

L'objet ainsi défini est bilinéaire alterné en les champs de vecteurs X et Y . On voit que si X, Y sont des champs de vecteurs dans le noyau de α , $[X, Y]$ sera dans ce noyau si et seulement si $d\alpha$ s'annule sur $\ker(\alpha)$. Cela revient à dire que $\alpha \wedge d\alpha \neq 0$. Prenons une base (v_1, \dots, v_{n-1}) de $\ker(\alpha)$ et soit v_n un vecteur non contenu dans ce noyau. Alors pour $i < j < k$ $\alpha \wedge d\alpha(v_i, v_j, v_k) = 0$ sauf si $k = n$, et il existe $i < j < n$ tels que $d\alpha(v_i, v_j) \neq 0$, i.e. $\alpha([v_i, v_j]) \neq 0$.

Proposition 8.9. *Soit α une 1-forme différentielle sans zéros. Le champ d'hyperplans $\ker(\alpha)$ est intégrable si et seulement si $\alpha \wedge d\alpha = 0$. Ceci équivaut à l'existence d'une fonction f ne s'annulant pas, telle que $1/f\alpha$ soit exacte.*

Démonstration. En effet, si $\alpha \wedge d\alpha = 0$, on a que $\ker(\alpha)$ est intégrable, et d'après le théorème de Frobenius, localement $\ker(\alpha)$ définit les niveaux d'une fonction g . Alors dg est proportionnel à α et donc $\alpha = fdg$. \square

3 Exercices

(A) Soient X_1, \dots, X_n des champs de vecteurs sur V formant en chaque point x de V une base de $T_x V$. Montrer que tout champ de vecteurs X sur V s'écrit comme combinaison linéaire à coefficients $C^\infty(V)$ des X_j .

Montrer que tout champ de vecteurs sur $SO(n)$ est combinaison linéaire à coefficients C^∞ des X_A , où A est antisymétrique.

(B) Soit $\mathfrak{X}^\infty(M)$ l'ensemble des champs de vecteurs C^∞ sur M et $X \in \mathfrak{X}^\infty(M)$ φ_t^X son flot.

Soit $\Psi : M \times \mathfrak{X}^\infty \rightarrow M$ l'application donnée par $\Psi(x_0, X) = \varphi_1^X(x_0)$

Calculer $D\Psi$. Indication : après avoir montré que Ψ est différentiable, on pourra utiliser les résultats de la théorie des perturbations pour calculer les différentielles partielles de Ψ par rapport à x_0 et X .

7. Attention, dans ce qui suit d n'est pas la différentielle usuelle, mais un « opérateur » associant à une un-forme différentielle une deux-forme. La différentielle usuelle est maintenant notée D , afin d'éviter toute confusion. Nous sommes là encore tributaires des **notations standard**.

(C) Soit G le groupe des difféomorphismes d'une variété connexe M contenant le flot de Y_1, \dots, Y_p où les Y_j engendrent l'espace tangent à M .

- (a) Montrer que G agit transitivement sur M (i.e. $\forall x, y \in M, \exists g \in G \mid gx = y$).
- (b) Soit $D(x)$ une distribution sur une variété M de dimension 3, engendrée (localement) par les champs de vecteurs X_1, X_2 .

Montrer (sans utiliser le théorème de Chow !) que si $X_1, X_2, [X_1, X_2]$ engendrent $T_x M$, alors deux points voisins de x sont toujours joints par une courbe tangente à D . On pourra au choix

- i. Calculer la différentielle de :

$$(1) \quad (t_1, t_2, t_3) \mapsto \exp(t_1 X_1) \exp(t_2 X_2) \exp(-|t_3|^{1/2} X_1) \exp(\epsilon(t_3) X_2) \exp(-|t_3|^{1/2} X_1) \exp(-\epsilon(t_3) X_2) x_0$$

où $\epsilon(t) = \text{signe}(t)(|t|)^{1/2}$

- ii. Raisonner sur le groupe G des difféomorphismes engendré par les flots des X_j , et montrer que si φ^t est le flot de X_i , G contient les difféomorphismes $(\varphi^t)_* X_j$, donc le flot de $Z_\epsilon = X_i + \epsilon[X_i, X_j] + \epsilon^2 \dots$ et utiliser l'exercice (C).
 - iii. Estimer le temps maximal nécessaire pour atteindre un point (supposant tous les champs de vecteurs de norme 1).
Commencer par le cas $n = 3, k = 2$, et montrer que l'on peut joindre deux points suffisamment proches, v et v' par une courbe de longueur au plus $d(v, v')^{1/2}$.
- (c) Soit D un champ de sous-espaces différentiable, et \mathcal{A}_x une feuille du feuilletage donné par le théorème de Sussmann. On veut déterminer la dimension de cette feuille et plus précisément son espace tangent.
- i. On note G_D le groupe engendré par les flots de champs de vecteurs tangents à D , et G_{D, x_0} le sous-groupe des éléments qui fixent x_0 (i.e. $\{\varphi \in G_D \mid \varphi(x_0) = x_0\}$). Montrer que $G_D(x)$ agit sur $T_x M$ par sa différentielle.
 - ii. Montrer que $T_x \mathcal{A}_x$ est invariant par $G_D(x)$. En déduire que $T_x \mathcal{A}_x$ contient le plus petit sous-espace invariant par $G_D(x)$ contenant $D(x)$, noté $\Delta_D(x)$. On veut montrer que $T_x \mathcal{A}_x$ est égal à ce sous-espace $\Delta_D(x)$.
 - iii. Utiliser l'exercice (B) pour montrer que $T_x \mathcal{A}_x$ est contenu dans $\Delta_D(x)$
 - iv. Montrer en utilisant le théorème de Frobenius que $\Delta(x)$ est stable par crochet de Lie et donc contient les crochets itérés d'éléments de D (i.e. les $[X_1, [X_2, \dots [X_{k-1}, X_k] \dots]]$)
- (d) Étudier le problème de la manœuvre d'une voiture, les roues avant faisant un angle de φ avec l'axe de la voiture, celle-ci faisant un angle égal à θ avec l'axe Ox . On note ℓ la distance entre les essieux. Écrire les équations du mouvement et des champs de vecteurs engendrant le champ de sous-espaces associé.

- (e) Étudier de même le problème de la manœuvrabilité d'un semi-remorque à deux remorques.

Chapitre 9

Groupes de Lie

1 Généralités sur les groupes de Lie

La théorie des groupes de Lie se trouve à l'intersection de la théorie des groupes et de la géométrie différentielle.

Définition 9.1. On appelle groupe de Lie une variété G munie d'une loi de groupe telle que l'application $G \times G \rightarrow G$ donnée par

$$(x, y) \mapsto xy^{-1}$$

est de classe C^∞ .

L'espace tangent à G à une structure particulière. Tout d'abord en tant que fibré, c'est un fibré trivial : on a un isomorphisme $\varphi : (x, v) \mapsto (x, dm_{x^{-1}}v)$ qui envoie TG sur $G \times T_eG$. Ensuite l'espace T_eG a une structure d'algèbre de Lie.

Définition 9.2. On appelle algèbre de Lie un espace vectoriel V muni d'une forme bilinéaire antisymétrique $(u, v) \mapsto [u, v]$ vérifiant l'identité de Jacobi

$$[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0.$$

Cette structure provient directement de la structure d'algèbre de Lie définie sur l'espace des champs de vecteurs sur G . En effet, à tout élément de T_eG on peut associer le champ de vecteurs invariant à gauche défini par $X_v(g) = dl_g(e)v$. Le terme "invariant à gauche" signifie que ce champ est invariant par l'action à gauche du groupe i.e. $(l_g)_*(X_v) = X_v$. Il est clair que tout champ de vecteurs invariant à gauche est de la forme $X_v(g) = dl_g(e)v$ et aussi puisque $(l_g)_*[X, Y] = [(l_g)_*(X), (l_g)_*(Y)]$ et donc le crochet de Lie de champs invariants à gauche est invariant à gauche.

On a donc

Proposition 9.3. *Soit G un groupe de Lie. L'espace tangent en e à G s'identifie à l'espace des champs de vecteurs invariants à gauche. Le crochet de Lie des champs de vecteurs induit une structure d'algèbre de Lie sur T_eG . On note \mathfrak{g} l'espace T_eG muni de cette structure et on l'appelle algèbre de Lie du groupe G .*

Démonstration. Un champ de vecteurs est invariant à gauche, si et seulement si $(l_g)_*X = X$ pour tout g . On a alors $(l_g)_*[X, Y] = [(l_g)_*X, (l_g)_*Y]$ et si X, Y sont invariants à gauche, $(l_g)_*[X, Y] = [X, Y]$ et donc $[X, Y]$ est invariant à gauche. \square

Exemples 1.1. (pour les deux premiers exemples, voir 2.1)

- (A) Le groupe $GL(n, \mathbb{R})$ a pour espace tangent $M(n, \mathbb{R})$ et la structure d'algèbre de Lie donnée par $(A, B) \mapsto [A, B]$
- (B) De même pour $GL(n, \mathbb{C})$
- (C) $SL(n, \mathbb{R})$ est le sous-groupe de $GL(n, \mathbb{R})$ des matrices de déterminant 1. L'application $M \mapsto \det(M)$ est différentiable, et 1 est valeur régulière, car

$$D \det(M)H = \det(M)^{-1} \text{trace}(MH)$$

Le noyau de cette application pour $M = \text{Id}$ est l'espace tangent en Id , c'est l'espace des matrices de trace nulle. Donc $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \{H \mid \text{trace}(H) = 0\}$, muni du crochet usuel.

- (D) Le groupe $O(n, \mathbb{R})$ est un groupe de Lie, car formé des matrices orthogonales telles que ${}^tMM = \text{Id}$. De nouveau, Id est valeur régulière de $m \mapsto {}^tMM$ dont la différentielle en M est $H \mapsto {}^tMH + {}^tHM$
- (E) Ne pas croire que tous les groupes de Lie apparaissent comme sous-variétés. Par exemple si H est un sous-groupe distingué discret de G , alors G/H est un groupe de Lie, dont l'algèbre de Lie coïncide avec \mathfrak{g} . On voit en particulier que l'algèbre de Lie ne détermine pas uniquement le groupe (mais on verra que c'est le cas à un revêtement près). De même le revêtement d'un groupe de Lie est un groupe de Lie. Par exemple si $n \geq 3$ le revêtement universel de $SO(n, \mathbb{R})$ est un revêtement à deux feuillets (car $\pi_1(SO(n)) = \mathbb{Z}/2$) noté $Spin(n, \mathbb{R})$.

Soit X un élément de \mathfrak{g} . on identifie X avec le champ de vecteurs invariant à gauche donné par $X(g) = dl_g(e)X$. on note $\exp(tX)$ le flot de X appliqué en e , i.e. $\varphi_X^t(e) = \exp(tX)$ et plus généralement $\varphi_X^t(g) = \exp(tX) \cdot g$.

Proposition 9.4. *Un champ de vecteurs invariant à gauche est complet, donc \exp est bien définie sur \mathfrak{g} . L'application \exp est un difféomorphisme local d'un voisinage de 0 sur un voisinage de e .*

Démonstration. En effet, φ_X^t sert défini pour $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ et $g \in U$ voisinage de e . Mais comme X est invariant à gauche, $\varphi_X^t(h \cdot g) = h \cdot \varphi_X^t(g)$ et donc les solutions sont définies pour un temps dans $]-\varepsilon, \varepsilon[$ quel que soit la condition initiale. Mais ceci n'est possible que si le temps de vie est infini.

Pour le second point, $D \exp(0)X = \frac{d}{dt} \exp(tX) = X$ donc $D \exp(0) = \text{Id}_{\mathfrak{g}}$ et la proposition découle du Théorème d'inversion locale. \square

Notons que si X est un champ de vecteurs invariant à gauche, on a $\varphi_X^t(g) = g \exp(tX)$ et du coup $\varphi_X^t(gh) = g\varphi_X^t(h)$.

Exemple 1.1. Si $G = GL(n, \mathbb{R})$, on a $X_A(M) = A \cdot M$ et donc le flot de X_A est donné par $\dot{M}(t) = A \cdot M(t)$ soit $M(t) = \exp(tA)M(0)$, ce qui explique la notation. Notons que pour tout sous-groupe de Lie de $GL(n, \mathbb{R})$, l'application exponentielle est donné par l'exponentielle des matrices.

Remarque 1.1. L'application exponentielle n'est, en général, ni injective, ni surjective. Par exemple comme $\exp(2i\pi) = 1$ elle n'est pas injective dans le cas du cercle. Et elle n'est pas surjective dans le cas de $SL(2, \mathbb{R})$ car $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas l'exponentielle d'une matrice de trace nulle (montrer que les valeurs propres de l'exponentielle sont les exponentielles des valeurs propres et qu'une matrice 2×2 dont l'exponentielle a pour valeur propre -1 , a pour valeurs propres $\pm i\pi$, est donc diagonalisable sur \mathbb{C} et donc son exponentielle aussi). On peut cependant démontrer que si G est compact connexe, l'exponentielle est surjective.

Soit alors $f : G \rightarrow H$ un morphisme de groupes C^∞ (on verra plus loin qu'ils le sont tous). Alors $df(e) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ est un morphisme d'algèbres de Lie. Cela signifie que $df(e)([\xi, \eta]) = [df(e)\xi, df(e)\eta]$. On prétend que

Proposition 9.5. *Si G est connexe, $df(e)$ détermine f .*

Démonstration. En effet on a $f(\exp(tX)) = \exp(tdf(e)X)$ puisque si X est un champ de vecteurs invariant à gauche, $t \mapsto f(\exp(tX))$ est un groupe à un paramètre invariant à gauche de dérivée en 0 donnée par $df(e)X$. L'égalité résulte de l'unicité du flot. Mais alors si $df(e)$ est donnée, f est bien définie sur un voisinage de e dans G . Or on a

Lemme 9.6. *Soit G un groupe de Lie connexe. Alors G est engendré par un quelconque voisinage de e .*

Démonstration. Soit H le sous groupe engendré par U , voisinage ouvert de e . Alors H est ouvert, vu que si $h = g_1 \cdot \dots \cdot g_k$ et h' est tel que $h'h^{-1} \in U$ alors posant $g_{k+1} = h'h^{-1}$, on a $h' = g_1 \cdot \dots \cdot g_k \cdot g_{k+1}$. Il en résulte que toutes les classes à droite de H dans G sont ouvertes, et donc $H = G \setminus \bigcup_{g \notin H} gH$ est fermé comme complémentaire d'un ouvert. Il en résulte que $G = H$. \square

Il résulte de ce lemme que la connaissance de $df(e)$ qui définit f au voisinage de e , la définit en fait partout. \square

Dans le cas où G est simplement connexe, la réciproque est vraie.

Proposition 9.7. *Soit $f : G \rightarrow H$ un morphisme de groupes de Lie. Alors $df(g)$ est de rang constant, et si f est injectif (resp. surjectif) alors $df(e)$ est injectif (resp. surjectif).*

Démonstration. En effet, $f \circ l_g = l_{f(g)} \circ f$ et donc $df(g) = dl_{f(g)}df(e)$ et comme $dl_{f(g)}$ est un isomorphisme, on en déduit que le rang de $df(e)$ et de $df(g)$ coïncident. Maintenant si $df(e)$ n'est pas injective, $df(g)$ n'est pas injective au voisinage de e , et donc par le théorème du rang constant, la forme normale de f n'est pas injective. De même si $df(e)$ n'est pas surjective, la forme normale des applications de rang constant montre qu'il existe un voisinage V de e tel que $f(V)$ soit d'intérieur vide dans H . Mais alors comme $G = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} g_j V$, on aura que $f(G)$ est réunion de fermés d'intérieur vide et donc d'intérieur vide par le théorème de Baire. Donc f n'est pas surjective. \square

Notons que f peut ne pas être injectif alors que $df(e)$ l'est (exemple : $\exp : \mathbb{R} \rightarrow S^1$). Par contre il résulte du lemme précédent que si H est connexe et $df(e)$ surjectif, f est surjectif.

Remarque 1.2. (A) On verra plus loin que les automorphismes simplement continus de G sont en fait C^∞ . Il n'y a donc pas d'ambiguïté sur le sens de $\text{Aut}(G)$

(B) Le troisième théorème de Lie affirme que toute algèbre de Lie est l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie. De plus si on a deux groupes ayant même algèbre de Lie, ils ont un revêtement commun. La plupart des groupes de Lie que nous avons vus sont des sous-groupes de $GL(n, \mathbb{R})$ mais ce n'est pas toujours le cas. Par exemple le revêtement universel de $SL(2, \mathbb{R})$ n'est pas un sous-groupe de $GL(n, \mathbb{R})$ quel que soit n . Notons qu'un morphisme $\rho : G \rightarrow GL(V)$ s'appelle une **représentation** de G sur V . Elle est dite **fidèle** si $\ker(\rho) = e$. D'un autre côté le théorème d'Ado affirme que toute algèbre de Lie possède une représentation fidèle (i.e. un morphisme injectif d'algèbre de Lie) dans $M_n(\mathbb{R})$ pour n assez grand. On peut en déduire que pour tout groupe de Lie G il existe un groupe de matrices ayant même algèbre de Lie.

1.1 Représentation adjointe et applications

Soit G un groupe de Lie. L'application $C_g : h \mapsto ghg^{-1}$ est un morphisme de groupes. Cela fournit un morphisme de G dans $\text{Aut}(G)$ qui est un morphisme de groupes de Lie. On note $Ad(g) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ la différentielle en e de C_g . Cela fournit un morphisme de groupes de G dans $\text{End}(\mathfrak{g})$. Enfin la linéarisée en e de $Ad : G \rightarrow \text{End}(\mathfrak{g})$ fournit une application de \mathfrak{g} dans $\text{End}(\mathfrak{g})$, notée ad .

Proposition 9.8. *On a $ad(X)Y = [X, Y]$*

Démonstration. Comme Ad a pour linéarisé ad on en déduit que $Ad(\exp(X))Y = \exp(ad(X)Y)$. Or le flot de $Ad(\exp(sX))Y$ est $\exp(sX) \exp(tY) \exp(-sX)$ donc $Ad(\exp(sX))Y = \exp(sX)_* Y$ et donc $ad(X)Y = \frac{d}{ds} Ad(\exp(sX))Y = \frac{d}{ds} \exp(sX)_* Y = [X, Y]$. \square

L'application $X \mapsto [X, \bullet]$ définit donc un morphisme de \mathfrak{g} dans $\text{End}(\mathfrak{g})$ appelée représentation adjointe. L'identité de Jacobi entraîne que $ad(X)ad(Y) - ad(Y)ad(X) =$

$ad([X, Y])$. On en déduit que ad est un morphisme d'algèbres de Lie. Son noyau est le centre de l'algèbre de Lie, $\mathfrak{z} = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid \forall \eta \in \mathfrak{g} [\xi, \eta] = 0\}$

Définition 9.9. On appelle forme de Killing de \mathfrak{g} la forme $(X, Y) \mapsto \text{trace}(ad(X)ad(Y))$. On dit que \mathfrak{g} est semi-simple si la forme de Killing est non-dégénérée.

1.2 Le théorème de Cartan

Tout d'abord on va montrer que si \mathfrak{h} est une sous-algèbre de Lie de \mathfrak{g} , il lui correspond un unique sous-groupe de Lie.

Théorème 9.10. Soit G un groupe de Lie connexe, d'algèbre de Lie \mathfrak{g} . Soit \mathfrak{h} une sous-algèbre de Lie de \mathfrak{g} . Il existe alors un unique sous-groupe de Lie H de G dont l'algèbre de Lie est \mathfrak{h} .

Démonstration. Soit D le champ de sous espaces défini par $D(g) = dl_g(e)\mathfrak{h}$. Que \mathfrak{h} soit une sous-algèbre de Lie entraîne que D soit intégrable. Soit F une feuille du feuilletage défini par D passant par e . Le champ de plans est invariant à gauche, donc la feuille passant par g est image de la feuille passant par e par l_g . Donc si $g \in F$, $l_g(F) = F$ puisque deux feuilles ayant un point commun sont égales. Ceci est équivalent à $l_g^{-1}(F) = F$ ce qui se traduit par $g \in F, h \in F \longrightarrow g^{-1}h \in F$, et $H = F$ est un sous-groupe de Lie. Par définition $T_e F = \mathfrak{h}$ donc son algèbre de Lie est \mathfrak{h} . \square

Attention, le sous-groupe H n'est pas nécessairement fermé.

Proposition 9.11. Avec les hypothèses du théorème précédent, H est le sous-groupe engendré par $\exp(\mathfrak{h})$.

Démonstration. Il est clair que $\exp(\mathfrak{h})$ est contenu dans H , vu que le champ de vecteurs invariant à gauche associé à $\xi \in \mathfrak{h}$ est tangent à D . Par ailleurs \exp donne un difféomorphisme entre un voisinage de 0 dans \mathfrak{h} et un voisinage de e dans la feuille H passant par e du feuilletage défini par D . Mais H est un groupe connexe et donc engendré par un voisinage de e . \square

Remarque 1.3. On aurait pu démontrer le théorème en montrant directement que les produits d'éléments de la forme $\exp(\xi)$ avec $\xi \in \mathfrak{h}$ forment un sous-groupe de G d'algèbre de Lie \mathfrak{h} .

Proposition 9.12. Soit $\varphi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ un morphisme entre l'algèbre de Lie \mathfrak{g} de G et l'algèbre de Lie \mathfrak{h} de H . Alors, si G est simplement connexe, il existe un unique morphisme de groupes de G dans H tel que $df(e) = \varphi$.

Démonstration. L'unicité a déjà été vue à la Proposition 9.5. Soit $G \times H$ le groupe de Lie produit d'algèbre de Lie $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$. Alors Si \mathfrak{k} est le graphe de φ , c'est une sous-algèbre de Lie, et correspond donc à un unique sous groupe de Lie K de $G \times H$. La projection de K

sur G est donnée par la projection de \mathfrak{k} sur \mathfrak{g} qui est un isomorphisme (vue que \mathfrak{k} est le graphe de φ). Donc la projection de K sur G est un difféomorphisme local, et c'est donc un revêtement. Mais si G est simplement connexe, un revêtement est un difféomorphisme (cf. la remarque 2.3). Il en résulte que K est le graphe d'un morphisme de G dans H . \square

L'un des résultats essentiels en théorie des groupes de Lie, est le

Théorème 9.13 (Cartan). *Un sous-groupe fermé d'un groupe de Lie est un sous-groupe de Lie, c'est-à-dire une sous-variété de G qui est un sous-groupe.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \forall t \exp(tX) \in H\}$. Alors \mathfrak{h} est un sous-espace vectoriel. Que $X \in \mathfrak{h}$ entraîne $\lambda \cdot X \in \mathfrak{h}$ est clair. Il faut donc montrer que $X, Y \in \mathfrak{h}$ entraîne que $X + Y \in \mathfrak{h}$. On a en effet que $\exp(X + Y) = \lim_n (\exp(\frac{X}{n}) \exp(\frac{Y}{n}))^n$, car $\exp(X) \exp(Y) = \exp(X + Y + o(|X|, |Y|))$, et donc comme H est fermé, \mathfrak{h} est un sous-espace vectoriel. Montrons que c'est une sous-algèbre de Lie. Or $[X, Y] = \frac{d}{ds} Ad(\exp(sX))Y$ et il suffit de montrer que $Ad(\exp(sX))Y \in \mathfrak{h}$. Mais $\exp(Ad(\exp(sX))tY) = \exp(sX) \exp(tY) \exp(-sX)$ qui est donc dans H vu que H est un sous-groupe.

Maintenant, il faut montrer que H est une sous-variété d'espace tangent \mathfrak{h} en l'identité. On va d'abord montrer cela au voisinage de e , c'est-à-dire qu'il existe un voisinage V de e dans G et un voisinage U de 0 dans \mathfrak{h} tel que \exp soit un difféomorphisme de U sur $H \cap V$. En effet, par définition, $\exp(\mathfrak{h}) \subset H$. Il suffit donc de montrer que si $h \in H$ est assez proche de e , il est de la forme $\exp(\xi)$ avec $\xi \in \mathfrak{h}$.

Lemme 9.14. *Soit X_n une suite d'éléments de \mathfrak{g} convergeant vers X et telle qu'il existe une suite t_n de réels strictement positifs convergeant vers 0 telle que $\exp(t_n X_n)$ appartienne à H alors X appartient à \mathfrak{h} .*

Démonstration. On note k_n la partie entière de t/t_n alors $\exp(tX) = \lim_n \exp(k_n t_n X_n) = \lim_n (\exp(t_n X_n))^{k_n}$ et comme H est fermé, $\exp(tX)$ est dans H et donc X dans \mathfrak{h} . \square

Reste à montrer que $V \cap H \subset \exp(U)$ pour U voisinage de 0 dans \mathfrak{h} . Or s'il n'existe pas de voisinage de e tel que $V \cap H \subset \exp(\mathfrak{h})$, il existerait une suite g_n de G convergeant vers e telle que $g_n \in H \setminus \exp(\mathfrak{h})$. Alors on peut écrire $g_n = \exp(X_n) \exp(Y_n)$ où $X_n \in \mathfrak{h}$ et $Y_n \in S$ où S est un supplémentaire de \mathfrak{h} dans \mathfrak{g} . L'existence d'une telle décomposition résulte de ce que $(X, Y) \mapsto \exp(X) \exp(Y)$ de $\mathfrak{h} \times S$ dans G est un difféomorphisme local près de 0 . Mais alors $\exp(|Y_n| \frac{Y_n}{|Y_n|})$ est dans H et donc après extraction d'une sous-suite convergente, $\lim_n \frac{Y_n}{|Y_n|} \in \mathfrak{h}$. Mais ceci contredit le fait que $\frac{Y_n}{|Y_n|}$ est dans la sphère unité de S .

\square

Corollaire 9.15. *Soit f un morphisme continu entre deux groupes de Lie, G et H . Alors f est un morphisme de groupes de Lie.*

Démonstration. En effet, le graphe de f donné par $\Gamma = \{(g, h) \mid h = f(g)\}$ est un sous-groupe fermé du groupe produit $G \times H$. Il est fermé par continuité de f , c'est donc par le théorème de Cartan un sous-groupe de Lie. Les deux projections $p_1 : G \times H \rightarrow G$ et $p_2 : G \times H \rightarrow H$, alors p_1, p_2 sont C^∞ , et on doit montrer que la restriction de p_1 à Γ est un difféomorphisme. Or une bijection entre groupes de Lie qui est C^∞ est nécessairement un difféomorphisme. En effet si $dp_1((e, e))_{|\Gamma}$ n'est pas inversible elle est de rang strictement inférieur à la dimension de G , mais alors $p_1(\Gamma)$ est un sous-groupe propre.

□

Proposition 9.16. *Soit G un groupe de Lie. Alors $Aut(G)$ ensemble des automorphismes de G est un groupe de Lie. Son algèbre de Lie est $Der(\mathfrak{g})$, l'algèbre des dérivations linéaires de \mathfrak{g} dans lui-même c'est-à-dire des applications $D : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ telles que $D([X, Y]) = [DX, Y] + [X, DY]$.*

Démonstration. Soit f un élément de $Aut(G)$. Il est déterminé par $df(e) \in GL(\mathfrak{g})$ d'après les Propositions 9.5 et 9.7, qui est un élément de $Aut(\mathfrak{g}) = \{\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \mid \varphi([\xi, \eta]) = [\varphi(\xi), \varphi(\eta)]\}$. Il en résulte que $Aut(G)$ s'identifie à un sous-ensemble de $GL(\mathfrak{g})$, que l'on note $Aut(\mathfrak{g})$ des automorphismes de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} . qui est évidemment un groupe de Lie. Comme $Aut(\mathfrak{g})$ est fermé, le théorème de Cartan montre que c'est un groupe de Lie. Son algèbre de Lie est obtenue en linéarisant l'équation $\varphi([\xi, \eta]) = [\varphi(\xi), \varphi(\eta)]$, c'est-à-dire $D([\xi, \eta]) = [D\xi, \eta] + [\xi, D\eta]$. L'espace des dérivations est une sous-algèbre de Lie de $End(\mathfrak{g})$.

□

2 Cohomologie des groupes de Lie

Soit G un groupe de Lie d'algèbre de Lie \mathfrak{g} . Parmi les formes différentielles sur G , notées $\Omega^*(G)$ on peut distinguer celles qui sont invariantes à gauche. Comme pour les champs de vecteurs, une forme invariante à gauche est déterminée par sa valeur en e , qui est un élément de $\Lambda^*(\mathfrak{g}^*)$. En effet, $\omega(g)(\xi_1, \dots, \xi_k) = \omega(e)(dl_g^{-1}\xi_1, \dots, dl_g^{-1}\xi_k)$. Notons que posant r_g la multiplication à droite, et l_g la multiplication à gauche, comme $d(l_g)^* = (l_g)^*d$, la différentielle d'une forme invariante à gauche est invariante à gauche.

On peut donc écrire l'application induite par la différentielle de $\Lambda^k(\mathfrak{g}^*)$ dans $\Lambda^{k+1}(\mathfrak{g}^*)$.

Proposition 9.17. *L'identification des formes invariantes à gauche à l'algèbre $\Lambda^*(\mathfrak{g}^*)$ induit une différentielle*

$$d : \Lambda^k(\mathfrak{g}^*) \longrightarrow \Lambda^{k+1}(\mathfrak{g}^*)$$

donnée par la formule

$$d(\omega)(\xi_1, \dots, \xi_{k+1}) = \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([\xi_i, \xi_j], \xi_1, \dots, \widehat{\xi}_i, \dots, \widehat{\xi}_j, \dots, \xi_{k+1})$$

Démonstration. On a vu que

$$d\omega(X_1, \dots, X_{p+1}) = \sum_{j=0}^p (-1)^{j-1} X_j \omega(X_1, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{p+1}) + \sum_{j < k} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{p+1})$$

Or si les X_i sont invariants à gauche, et ω est invariant à gauche, les $\omega(X_1, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{k+1})$ sont des fonctions invariantes à gauche, c'est-à-dire constantes sur chaque composante connexe de G . Et donc les $X_j \omega(X_1, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{k+1})$ s'annulent, et donc il reste les termes mentionnés. \square

Définition 9.18. Si \mathfrak{g} est une algèbre de Lie quelconque (pas nécessairement associée à un groupe de Lie ni même de dimension finie) on note $H^k(\mathfrak{g})$ sa cohomologie définie à partir de l'opérateur d donné par

$$d(\omega)(\xi_1, \dots, \xi_{k+1}) = \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([\xi_i, \xi_j], \xi_1, \dots, \widehat{\xi}_i, \dots, \widehat{\xi}_j, \dots, \xi_{k+1})$$

On note

$$H^k(\mathfrak{g}) = \frac{\ker(d : \Lambda^k(\mathfrak{g}^*) \longrightarrow \Lambda^{k+1}(\mathfrak{g}^*))}{\text{Im}(d : \Lambda^{k-1}(\mathfrak{g}^*) \longrightarrow \Lambda^k(\mathfrak{g}^*))}$$

Exemple 2.1. On a $H^1(\mathfrak{g})$ est l'ensemble des éléments de \mathfrak{g}^* qui s'annulent sur $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, et s'identifie au dual de $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Cet espace est par définition nul si le groupe est parfait.

Nous allons montrer qu'à une forme différentielle quelconque, ω on peut associer une forme invariante à gauche en faisant la moyenne sur G des $I_g^* \omega$, pourvu que cette moyenne ait un sens.

Définition 9.19. Soit G un groupe de Lie de dimension d . Soit ω une forme non-nulle invariante à gauche de degré maximal. Alors ω définit une mesure sur G appelée **mesure de Haar**, et une telle mesure est unique à un coefficient près. De plus $(r_g)^* \omega(e) = \Delta(g) \omega(e)$ car $\dim(\Lambda^d(\mathfrak{g}^*)) = 1$. Le morphisme $\Delta : G \longrightarrow (\mathbb{R}^*, \times)$ est appelée fonction modulaire. Si la fonction modulaire vaut toujours 1, on dit que G est **unimodulaire**

Exemple 2.2. (A) Un groupe compact connexe est toujours **unimodulaire**. En effet si $\chi : G \longrightarrow \mathbb{R}^*$ est un morphisme, on a $\chi(g^n) = \chi(g)^n$ mais comme la suite g^n a une limite, il en est de même pour $\chi(g)^n$, ce qui entraîne que $\chi(g) \in \{-1, 1\}$. la connexité de G entraîne que $\chi(g) = 1$ quel que soit g .

(B) Si G est abélien, il est évidemment unimodulaire.

(C) $GL(n, \mathbb{R})$ est unimodulaire la mesure de Haar est donnée par

$$\int_{M(n, \mathbb{R})} f(A) \frac{dA}{|\det(A)|^n}$$

(D) Le groupe linéaire affine de la droite des transformations $x \mapsto ax + b$ ($a \neq 0$) n'est pas unimodulaire. La mesure invariante à gauche est $\frac{da db}{a^2}$. on vérifie qu'elle n'est pas invariante à droite. En effet $a(cx + d) + b = acx + (ad + b)$ et l'application $(a, b) \mapsto (ac, ad + b)$ envoie $\frac{da \wedge db}{a^2}$ sur $\frac{1}{c} \frac{da \wedge db}{a^2}$.

Proposition 9.20. *Si le groupe G est unimodulaire, alors il existe une mesure sur G invariante à droite et à gauche.*

Démonstration. On prend une forme invariante à gauche. Elle définit une forme de degré maximale qui définit une mesure par $\mu_\omega(V) = \int_V \omega$ qui est invariant à gauche. Comme $\Delta(g) = 1$ on a que $r_g^*(\omega) = \omega$ et donc μ_ω est aussi invariante à droite. \square

Proposition 9.21. *Si le groupe G est compact (donc unimodulaire), alors il existe une application*

$$L : \Omega^k(G) \longrightarrow \Lambda^k(\mathfrak{g}^*)$$

qui associe à chaque forme différentielle une forme invariante à gauche. De plus L commute avec l'opérateur de différentiation extérieure, et si ω est fermée, $L\omega$ est cohomologue à ω . Chaque classe de cohomologie admet donc un représentant invariant à gauche (qui n'est en général pas unique).

Démonstration. On pose $L\omega = \int_G l_g^* \omega d\mu$ où μ est la mesure de Haar de masse totale 1, qui est bi-invariante car le groupe est compact donc unimodulaire.

Comme le groupe est connexe, l_g est homotope à $l_e = id$. Pour tout chemin de e à g , on obtient un opérateur K_g tel que $l_g^* \alpha - \alpha = K_g d\alpha + dK_g \alpha$. De plus-, la construction de l'opérateur K montre que si g est dans un voisinage V de e sur lequel l'exponentielle est un difféomorphisme local, alors $g \mapsto K_g$ est C^∞ en g . Maintenant on peut écrire d'une part que

$$l_{gh}^* \alpha - \alpha = l_g^*(l_h^* \alpha - \alpha) + l_g^* \alpha - \alpha = l_g^*(dK_h + K_h d) + K_g d + dK_g = d(l_g^* K_h + K_g) + (l_g^* K_h + K_g) d$$

et d'autre part que $G = \bigcup_j g_j \cdot V$. On peut donc en notant K_j un choix quelconque de l'opérateur d'homotopie associé à g_j et K_g pour $g \in V$ un choix C^∞ en g , que si $g_j \cdot h \in g_j V$ le choix de $K_{g_j \cdot h} = l_{g_j}^* K_h + K_j$ qui sera donc aussi C^∞ en h et donc en g pour g dans $g_j \cdot V$. Maintenant si χ_j est une partition de l'unité subordonnée au recouvrement de G par les $g_j \cdot V$,

$$\int_G l_g^*(\alpha) d\mu(g) = \sum_j \int_G l_g^*(\alpha) \chi_j(g) d\mu(g)$$

Or

$$\int_G l_g^*(\alpha) \chi_j(g) d\mu(g) = \sum_j \left(\int_G \chi_j(g) d\mu(g) \right) \alpha + d \int_G \sum_j \chi_j(g) K_g \alpha d\mu(g) + d \int_G \sum_j \chi_j(g) K_g \alpha d\mu(g)$$

Donc en posant $K = \sum_j \int_V \chi_j(g_j \cdot g) (l_{g_j}^* K_g + K_{g_j}) d\mu(g)$ on a

$$L\alpha - \alpha = dK(\alpha) + Kd\alpha$$

\square

Soit maintenant r_g la multiplication à droite. On peut appliquer à une forme invariante à gauche la moyenne des $r_g^*\omega$, et on obtient alors, puisque la mesure de Haar est bi-invariante, une forme bi-invariante. Si $\omega \in \Lambda^k \mathfrak{g}^*$ on a $\frac{d}{dt} r_{\exp(tY)}^* \omega|_{t=0} = L_Y \omega$ et

Proposition 9.22. *On a*

$$(L_Y \omega)(X_1, \dots, X_p) = \sum_j \omega(X_1, \dots, [Y, X_j], \dots, X_p)$$

Démonstration. En effet, on a d'après la Proposition 6.14 du chapitre 6

$$L_Y(\omega(X_1, \dots, X_p)) = (L_Y \omega)(X_1, \dots, X_p) - \sum_j \omega(X_1, \dots, [Y, X_j], \dots, X_p)$$

et comme si les X_j sont invariants, $\omega(X_1, \dots, X_p)$ est constante, $L_Y(\omega(X_1, \dots, X_p)) = 0$ et on conclut. \square

On en déduit qu'une forme invariante à droite (et à gauche) vérifie pour tout Y, X_1, \dots, X_p , que $\sum_j \omega(X_1, \dots, [Y, X_j], \dots, X_p) = 0$. Comme

$$\begin{aligned} d(\omega)(X_1, \dots, X_{k+1}) &= \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{k+1}) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_j \sum_i (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{k+1}) \end{aligned}$$

et pour tout j fixé, la somme précédente sur les i s'annule.

Proposition 9.23. *Soit G un groupe de lie compact. alors $H^k(G)$ s'identifie au sous-espace $\Lambda^k(\mathfrak{g}^*)^{ad}$ de $\Lambda^k(\mathfrak{g}^*)$ des formes bi-invariantes.*

Démonstration. On a une application $LR : \Omega^k(G) \longrightarrow \Lambda^k(\mathfrak{g}^*)^{ad}$ donnée par

$$LR(\omega) = \int_{G \times G} l_g^* r_h^* \omega d\mu(g) d\mu(h)$$

Comme précédemment la classe de cohomologie de $LR(\omega)$ est égale à celle de ω . Inversement, il existe une application de $\Lambda^k(\mathfrak{g}^*)^{ad}$ dans $H^k(G)$, vu que toute forme bi-invariante est fermée. Montrons que l'application est injective. En effet, si une forme bi-invariante, ω est exacte, en appliquant l'opérateur LR qui commute avec d on trouve que $\omega = d\alpha$ avec α bi-invariante, donc fermée, donc $\omega = d\alpha = 0$. \square

Remarque 2.1. La notation $\Lambda^k(\mathfrak{g}^*)^{ad}$ est due à l'action de \mathfrak{g} sur $\Lambda^k(\mathfrak{g}^*)$ donnée par

$$(Y \cdot \omega)(X_1, \dots, X_p) = \sum_i \omega(X_1, \dots, [Y, X_i], \dots, X_p)$$

qui est le linéarisé de l'action de G donnée par r_g^* .

Corollaire 9.24. *Soit G un groupe de Lie compact simplement connexe. Alors $H^3(G) \neq 0$.*

Démonstration. Comme G est simplement connexe, $H^1(\mathfrak{g}) = 0$ et donc $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. En effet, soit $\langle X, Y \rangle$ un produit scalaire bi-invariant sur \mathfrak{g} . Cela signifie que $\langle [Z, X], Y \rangle + \langle X, [Z, Y] \rangle = 0$. Alors $\omega(X, Y, Z) = \langle X, [Y, Z] \rangle$ est une forme trilinéaire alternée, non nulle. Elle est bi-invariante par l'identité de Jacobi

$$\begin{aligned} & \langle [T, X], [Y, Z] \rangle + \langle X, [[T, Y], Z] \rangle + \langle X, [Y, [T, Z]] \rangle = \\ & \quad \langle [T, X], [Y, Z] \rangle + \langle X, [Z, [Y, T]] + [Y, [T, Z]] \rangle = \\ & \quad \langle [T, X], [Y, Z] \rangle - \langle X, [T, [Y, Z]] \rangle = 0 \end{aligned}$$

par bi-invariance du produit scalaire. □

3 Appendice 1 : Classification des groupes de Lie

On peut classifier les groupes de Lie, ce qui a été fait par Lie, Weyl, Cartan. On a d'une part les groupes classiques, $GL(n, \mathbb{R})$, $SL(n, \mathbb{R})$, $GL(n, \mathbb{C})$, $SL(n, \mathbb{C})$, $O(p, q)$, $U(p, q)$, $SU(p, q)$, $Sp(n, \mathbb{R})$ et d'autre part des groupes exceptionnels, à savoir E_2, E_4, E_6, F_4, G_2 pour lesquelles on renvoie aux ouvrages spécialisés.

4 Quotients de variétés par des groupes de Lie

Le résultat de base est le « slice theorem » qui affirme que

Proposition 9.25. *Soit G une action d'un groupe de Lie compact sur une variété M , $x \in M$, et $G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$. Alors il existe une représentation linéaire ρ_x of G_x sur l'espace vectoriel V telle qu'un voisinage de l'orbite $G \cdot x$ s'identifie par une difféomorphisme G -equivariant à $G \times_{G_x} D(V) = \{(g, v) \in G \times D(V)\} / \simeq$ où $(g, v) \simeq (h \cdot g, \rho_x(h)v)$ pour $h \in G_x$.*

5 Exercices

- (A) Soit G un groupe de Lie connexe, et \mathfrak{g} son algèbre de Lie. On suppose que $[X, Y] = 0$ quels que soient $X, Y \in \mathfrak{g}$.
- (a) Montrer que $\exp(Y)\exp(X) = \exp(X) \cdot \exp(Y)$. On pourra utiliser le fait que $t \mapsto \exp(sX)\exp(tY)\exp(-sX)$ est le flot de $(\exp(sX))_* Y$, et calculer $(\frac{d}{ds}(\exp(sX))_* Y)|_{s=s_0}$.

- (b) En déduire que $\exp(X + Y) = \exp(X) \cdot \exp(Y)$
- (c) En déduire que \exp est un morphisme de groupes de $(\mathbb{R}^n, +)$ vers G
- (d) Montrer que \exp est surjective.
- (e) Montrer que le noyau de \exp est un sous groupe discret de \mathbb{R}^n . On admettra qu'un tel sous-groupe est isomorphe à \mathbb{Z}^k et donc que G est isomorphe à $\mathbb{R}^{n-k} \times T^k$.
- (B) Montrer que les seules sphères qui peuvent avoir une structure de groupe de Lie sont S^1 et S^3 .
- (C) Montrer que si C est un sous-groupe distingué de G , groupe connexe, alors C est contenu dans le centre de G (on pourra considérer l'application de G dans C donnée par $\varphi_c : g \mapsto gcg^{-1}$).
- (D) Montrer que si G est un groupe de Lie, alors $Aut(G)$ l'ensemble des automorphismes de G est un groupe de Lie. On pourra identifier $Aut(G)$ à un sous-groupe de Lie de $GL(\mathfrak{g})$ en utilisant le théorème de Cartan.
- (E) Montrer que si G est un groupe de Lie, son centre Z est un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{z} = \{X \mid \forall Y \in \mathfrak{g}, [X, Y] = 0\}$.
- (F) Montrer que si H est un sous-groupe de Lie d'un groupe de Lie connexe, il est distingué si et seulement si \mathfrak{h} est un idéal de \mathfrak{g} . En d'autres termes $\forall X \in \mathfrak{g}, \forall Y \in \mathfrak{h}, [X, Y] \in \mathfrak{h}$.
- (G) Soit G un groupe de Lie, V un espace vectoriel et $\rho : G \rightarrow GL(V)$ un morphisme de groupes de Lie (i.e. une représentation de G sur V). Si $g \in G, X \in \mathfrak{g}$ et $v \in V$, on notera $g \cdot v$ pour $\rho(g)v$ et $X \cdot v$ pour $(d\rho(e)X)v$.
- (a) Montrer que le sous-groupe d'isotropie G_v de v , i.e. $G_v = \{g \in G \mid g \cdot v = v\}$ est un groupe de Lie ayant pour algèbre de Lie $\mathfrak{g}_v = \{X \in \mathfrak{g} \mid X \cdot v = 0\}$.
- (b) Soit maintenant une algèbre de Lie \mathfrak{g} . On cherche sous certaines hypothèses un groupe dont \mathfrak{g} soit l'algèbre de Lie. Soit $Aut(\mathfrak{g})$ l'ensemble $\{g \in GL(\mathfrak{g}) \mid \forall \xi, \eta \in \mathfrak{g}, [g(\xi), g(\eta)] = g([\xi, \eta])\}$. Montrer que c'est un sous-groupe de Lie de $GL(\mathfrak{g})$.
- (c) Soit V l'espace vectoriel des formes bilinéaires $B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$. Montrer qu'il existe une représentation de $GL(\mathfrak{g})$ sur V telle que $(g \cdot B)(\xi, \eta) = g \cdot B(g^{-1} \cdot \xi, g^{-1} \cdot \eta)$.
- (d) Soit $\theta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ la forme bilinéaire donnée par le crochet de Lie. Montrer que $G = (GL(\mathfrak{g}))_\theta$ est un groupe égal à $Aut(\mathfrak{g})$, dont l'algèbre de Lie est $Der(\mathfrak{g})$, l'algèbre des dérivations de \mathfrak{g} , c'est-à-dire des applications linéaires $D : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ telles que $D([\xi, \eta]) = [D\xi, \eta] + [\xi, D\eta]$. Montrer que $ad(\xi) : \eta \mapsto [\xi, \eta]$ est dans $Der(\mathfrak{g})$.
- (e) On appelle forme de Killing la forme bilinéaire sur \mathfrak{g} donnée par $K : (\xi, \eta) \mapsto Tr(\zeta \mapsto [\xi, [\eta, \zeta]])$ ou en d'autres termes $K(\xi, \eta) = Trace(ad(\xi) \circ ad(\eta))$. Montrer que $K([\xi, \eta], \zeta) = K(\xi, [\eta, \zeta])$. On pourra utiliser que $ad([\xi, \eta]) = ad(\xi)ad(\eta) - ad(\eta)ad(\xi)$.

- (f) On suppose désormais que la forme de Killing est non-dégénérée. Montrer que toute dérivation est de la forme $ad(\xi)$ pour un $\xi \in \mathfrak{g}$. On écrira la forme linéaire $\eta \mapsto \text{Trace}(D \circ ad(\eta))$ sous la forme $K(\xi, \eta)$ et on montrera que $D(\eta) = ad(\xi)\eta$. On pourra montrer que $ad(D(\eta)) = D \circ ad(\eta) - ad(\eta) \circ D$, puis que $K([\xi, \eta], \zeta) = \text{Trace}(ad(D(\eta)) \circ ad(\zeta))$.
- (g) Conclure que l'algèbre de Lie de G est \mathfrak{g} .
- (h) Montrer que si la forme de Killing est définie négative, alors G_θ est compact. On pourra montrer que $Aut(\mathfrak{g})$ préserve la forme de Killing.

Chapitre 10

Théorie des revêtements, groupe fondamental

1 Groupe fondamental

Soit (X, x_0) un espace topologique pointé. On note $\Gamma(X, x_0)$ l'espace des lacets basée en x_0 , c'est-à-dire des chemins de $I = [0, 1]$ à valeurs dans X tels que $c(0) = c(1) = x_0$. La composition des chemins est la mise bout à bout de deux chemins, mais reparamétrisés pour que l'intervalle de définition reste $[0, 1]$.

Définition 10.1. Soient c_1, c_2 deux lacets. On pose

$$c_1 \star c_2(t) = \begin{cases} c_1(2t) & \text{for } 0 \leq t \leq 1/2 \\ c_2(2t - 1) & \text{for } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Notons que nous ne nous intéressons aux chemins qu'à homotopie près.

Définition 10.2. Deux chemins, c_0, c_1 sont homotopes, s'il existe une famille continue de lacets c_t reliant c_0 à c_1 . L'homotopie entre chemins est une relation d'équivalence.

Remarque 1.1. Si c_1 est obtenu à partir de c par changement de paramètre préservant les extrémités, c'est-à-dire qu'il existe une application de $[0, 1]$ dans lui-même $t \rightarrow \theta(t)$ telle que $\theta(0) = 0, \theta(1) = 1$ et $c_1(t) = c(\theta(t))$ alors c et c_1 sont homotopes. En effet, il existe une homotopie à extrémités fixes entre θ et l'identité, donnée par $\theta_s(t) = (1 - s)t + s\theta(t)$ et alors $c_s(t) = c(\theta_s(t))$ fournit une homotopie entre $c_0 = c$ et c_1 .

Proposition 10.3. Soit $\Pi(X, x_0)$ le quotient de $\Gamma(X, x_0)$ par la relation d'homotopie. Alors la composition des chemins passe au quotient et définit une loi associative qui fait de $\Pi(X, x_0)$ un groupe.

Démonstration. Il faut montrer que si c_1, c'_1 sont homotopes alors $c_1 \star c_2$ est homotope à $c'_1 \star c_2$ et l'analogie pour c_2, c'_2 . La démonstration est laissée au lecteur. Enfin il faut montrer que $(c_1 \star c_2) \star c_3$ est homotope à $c_1 \star (c_2 \star c_3)$.

Or

$$(c_1 \star c_2) \star c_3(t) = \begin{cases} c_1(4t) & \text{for } 0 \leq t \leq 1/4 \\ c_2(4t - 1) & \text{for } 1/4 \leq t \leq 1/2 \\ c_3(2t - 1) & \text{for } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

alors que

$$c_1 \star (c_2 \star c_3)(t) = \begin{cases} c_1(2t) & \text{for } 0 \leq t \leq 1/2 \\ c_2(4t - 2) & \text{for } 1/2 \leq t \leq 3/4 \\ c_3(4t - 3) & \text{for } 3/4 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Posant $\theta(t) = t/2$ sur $[0, 1/2]$ et $\theta(t) = t - 1/2$ pour $1/4 \leq t \leq 3/4$ et $\theta(t) = 2t - 1$ pour $3/4 \leq t \leq 1$ Alors $c_1 \star (c_2 \star c_3)(t) = (c_1 \star c_2) \star c_3(\theta(t))$. D'après la remarque 1.1, ils sont donc homotopes.

Enfin si c est un lacet, son inverse est donné par $\bar{c}(t) = c(1 - t)$. En effet $\bar{c} \star c(t) = c(1 - 2t)$ sur $[0, 1/2]$ et $c(2t - 1)$ sur $[1/2, 1]$. Mais ceci est de la forme $c(\theta(t))$ avec $\theta[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ mais maintenant $\theta(0) = \theta(1) = 1$. on peut homotoper θ à extrémités fixes en en l'application constante en 1 par $\theta_s(t) = (1 - s)\theta(t) + s$, et donc déformer $\bar{c} \star c(t)$ en le lacet constant en x_0 . \square

Proposition 10.4. *Si x, y sont dans la même composante connexe de X , alors $\pi_1(X, x)$ est isomorphe à $\pi_1(X, y)$. Lorsque X est connexe, on note $\pi(X)$ ce groupe. Si f est une application continue de X dans Y elle induit un morphisme f_* du groupe $\pi_1(X, x_0)$ dans $\pi_1(Y, f(x_0))$.*

2 Revêtements

Définition 10.5. Soit E, B des espaces topologiques, $p : E \rightarrow B$ une application continue. on dit que (E, B, p) (où simplement p) est un revêtement si tout point x de B possède un voisinage V tel qu'il existe un homéomorphisme $\varphi : p^{-1}(V) \rightarrow V \times F$ où F est un ensemble discret, et l'application commute avec la projections sur V . On appelle φ une carte (ou une trivialisations) au dessus de V . On appelle revêtement trivial le revêtement $(B \times F, B, p_1)$.

Définition 10.6. Soit (E, B, p) et (E', B', p') deux revêtements. Un morphisme entre ces deux revêtements est une paire d'applications continues (F, f) où $F : E \rightarrow E'$, $f : B \rightarrow B'$ telle que $p' \circ F = f \circ p$.

Définition 10.7. Soit (E, B, p) un revêtement. On appelle **section** du revêtement une application $s : B \rightarrow E$ telle que $p \circ s = id$

Remarque 2.1. (A) L'ensemble des automorphismes du revêtement (E, B, p) est par définition l'ensemble des morphismes inversibles (dans l'ensemble des morphismes) de (E, B, p) dans lui-même. C'est un groupe noté $Aut((E, B, p))$.

- (B) Si $E = B \times F$, est le revêtement trivial, $Aut(B \times F, B, p)$ est l'ensemble des applications continues $g : B \rightarrow Aut(F)$. Comme F est discret, il en est de même pour $Aut(F)$ et une telle application est constante si B est connexe. Dans ce cas, $Aut(E, B, p) = Aut(F)$.
- (C) Soit $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ l'application $t \rightarrow \exp(it)$. Alors (\mathbb{R}, S^1, p) est un revêtement.

Proposition 10.8. *Soient E, B des variétés différentielles compactes. Alors si $p : E \rightarrow B$ sa différentielle bijective en tout point, c'est un revêtement.*

Démonstration. En effet, si e_1, \dots, e_m est l'image réciproque de b . La compacité de E montre que si les U_j sont des voisinages de e_j , il existe un voisinage V de b dont l'image réciproque est contenue dans e . Dans le cas contraire, on aurait une suite y_j telle que $p(y_j)$ converge vers b mais par compacité de E il existe une sous-suite convergente de y_j et sa limite est nécessairement un des e_j . on peut trouver $b \in V_j \subset B$ et $e_j \in U_j \subset E$ tels que p soit un difféomorphisme de U_j sur V_j . Mais alors p est un difféomorphisme la préimage de $\bigcup_j V_j = V$ sur V . La compacité de E permet de montrer que $p^{-1}(V)$ est contenu dans la réunion des U_j . □

Proposition 10.9. *Soit $f : B \rightarrow B'$ une application continue, et (E', B', p') un revêtement. On note $f^*(E')$ l'espace $f^*(E') = \{(b, e') \mid f(b) = p'(e')\}$. La projection $p : f^*(E') \rightarrow B$ donnée par $f(b, e') = f(b)$ fait de $(f^*(E'), B, p)$ un revêtement.*

Démonstration. En effet, si V' est un ouvert de B' et $\varphi' : (p')^{-1}(V') \rightarrow V' \times F$ une trivialisations, on a que $(b, e') \rightarrow (b, \pi_2(\varphi'(e')))$ est une carte de $(f^*(E), B, p)$ au dessus de V tel que $f(V) \subset V'$. □

Il y a alors un morphisme (F, f) de $(f^*(E'), B, p)$ dans (E', B', p') donnée par $F(b, e') = e'$.

Soit $I = [0, 1]$ et $c : I \rightarrow B$ une application continue. Alors $(c^*(E), I, p)$ est un revêtement.

Proposition 10.10. *Soit (E, I, p) (resp. (E, I^k, p)) un revêtement. C'est alors un revêtement trivial.*

Démonstration. Si on découpe I en intervalles $I_{k,n} = [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$, le lemme de Lebesgue affirme que pour n assez grand, on peut trivialisier $(E_{I_{k,n}}, I_{k,n}, p)$. Posons $J_{k,n} = [0, \frac{k}{n}]$ et supposons que l'on ait construit un isomorphisme $\psi_{k,n}$ de $(E_{I_{k,n}}, I_{k,n}, p)$ sur $(I_{k,n} \times F, I_{k,n}, \pi_1)$, et soit $\varphi_{k,n} : E_{I_{k,n}} \rightarrow J_{k,n} \times F$ une trivialisations de $E_{I_{k,n}}$. Comme $\varphi_{k,n}, \psi_{k,n}$ sont définies sur $p^{-1}(\frac{k}{n})$ la composée $\varphi_{k,n} \circ \psi_{k,n}^{-1} : \{\frac{k}{n}\} \times F \rightarrow \{\frac{k}{n}\} \times F$ commute avec la projection et se réduit donc à une permutation $g : F \rightarrow F$. Mais alors l'application $\psi_{k+1,n}$ égale à $\varphi_{k,n}$ sur $p^{-1}(I_{k,n})$ et à $g \circ \psi_{k,n}$ sur $p^{-1}(I_{k,n})$ est continue et fournit une trivialisations de $(E_{J_{k+1,n}}, J_{k+1,n}, p)$. Par récurrence, on prouve l'existence d'une trivialisations sur I tout entier. Notons que si φ, ψ sont deux trivialisations de E , on a $\varphi \circ \psi^{-1}$ qui est un automorphisme de $I \times F$, donc de la forme $(t, f) \rightarrow (t, g(f))$ où $g \in Aut(F)$. Soit alors (E, I^2, p)

un revêtement. On peut décomposer I^2 en une suite I_1, \dots, I_{n^2} de carrés de côtés $1/n$ tels que posant $J_k = \bigcup_{1 \leq j \leq k} I_j$ on a que $J_k \cap I_{k+1}$ soit connexe. Alors si on prend n assez grand on peut trivialisier (E_{I_k}, I_k, p) et notons ψ_k une trivialisiation. Supposons que l'on puisse aussi trivialisier (E_{J_k}, J_k, p) et soit φ_k une trivialisiation de E_{J_k} . Alors $\varphi_k \circ \psi_k^{-1}$ est une automorphisme d'un fibré trivial au dessus de $J_k \cap I_k$ et donc cet automorphisme est de la forme $(t, f) \longrightarrow (t, g(f))$. On recolle alors comme précédemment les applications ψ_k et φ_k en utilisant g de la manière suivante : $\varphi_{k+1}(e) = \varphi_k(e)$ si $p(e) \in J_k$ $\varphi_{k+1}(e) = g \circ \psi_k(e)$ si $p(e) \in I_k$ Ceci définit une trivialisiation de $(E_{J_{k+1}}, J_{k+1}, p)$. Par récurrence on trivialisie (E, I^2, p) . Le même argument s'étend à I^k .

□

Soit alors $c : I \longrightarrow B$ une application continue. On considère le revêtement $(c^*(E), I, p_c)$ induit par c . D'après la proposition précédente ce revêtement est trivial. Si on se fixe $e_0 \in E$ et donc $(0, e_0) \in c^*(E)$, il existe une unique section passant par $(0, e_0)$ en 0 . Elle est donnée par $(t, e(t))$ où $t \longrightarrow e(t)$ est continue et telle que $e(0) = e_0$, et $p(e(t)) = c(t)$. On a donc relevé le chemin $c : I \longrightarrow B$ en un chemin $e : I \longrightarrow E$. On note en général $\tilde{c}(t) = (e(t))$.

Proposition 10.11. *Soit $c : I \longrightarrow B$ un chemin continu, et (E, B, p) un revêtement. Soit $e_0 \in E$ tel que $p(e_0) = c(0)$. Alors il existe un unique chemin continu $\tilde{c} : I \longrightarrow E$ tel que $p \circ \tilde{c} = c$ et $\tilde{c}(0) = e_0$. De plus si c_1, c_2 sont deux chemins homotopes à extrémités fixées, les relèvements \tilde{c}_1 et \tilde{c}_2 sont aussi homotopes à extrémités fixées et ont en particulier les mêmes extrémités.*

On considère alors un revêtement (E, B, p) d'une base B connexe, et $x_0 \in B$ un point fixé. on prétend que $\pi_1(B, x_0)$ agit sur E par automorphismes de revêtement (au dessus de l'identité). En effet, si c est un lacet de B en x_0 , le relèvement des lacets basés en x_0 définit une permutation de $p^{-1}(x_0)$.

Proposition 10.12. *Soit (E, B, p) un revêtement. Alors $p_* : \pi_1(E, e_0) \longrightarrow \pi_1(B, x_0)$ est injective.*

Démonstration. En effet, si c est un lacet de E basé en e_0 , $p \circ c : I \longrightarrow B$ est un lacet dans B basé en x_0 dont c est l'unique relèvement. Si $p \circ c$ est homotope à un lacet constant, la proposition précédente affirme que c est aussi homotope à un lacet constant. □

Proposition 10.13. *Soit (E, B, p) un revêtement. X un espace connexe et localement connexe par arcs. Soit $f : X \longrightarrow B$ une application continue, x_0 un point de X , e_0 un point tel que $p(e_0) = f(x_0)$. Alors f se relève de manière unique en une application $F : X \longrightarrow E$ telle que $p \circ F = f$ et $F(x_0) = e_0$ si et seulement si $f_* \pi_1(X, x_0) \subset p_* \pi_1(E, e_0)$.*

Démonstration. La nécessité est évidente. Soit donc c un chemin de x_0 à x , et γ un relèvement de $f \circ c$ tel que $\gamma(0) = e_0$. On pose $F(x) = \gamma(1)$. Il faut bien entendu vérifier que $\gamma(1)$ ne dépend pas du choix de c . Supposons d'abord $x = x_0$. Alors $f \circ c$ est dans

$f_*(\pi_1(X, x_0)) \subset p_*(\pi_1(E, e_0))$ et donc est homotope à un lacet c' obtenu en projetant un lacet γ' de E basé en e_0 . Mais d'après la proposition 10.11 de relèvement des homotopies, l'homotopie entre c et c' se relève en une homotopie à extrémités fixes entre γ' et γ ce qui entraîne que $\gamma(1) = e_0$.

Maintenant si x est un point quelconque, et si c' est un autre chemin de x_0 à x , γ' le relèvement correspondant de $f \circ c'$. Alors le lacet $u = c \star (c')^{-1}$ basé en x_0 a, d'après ce qui précède, pour relèvement un lacet v basé en e_0 . Mais par unicité des relèvements, on a nécessairement $v(t/2) = \gamma(t)$ et $v(1 - t/2) = \gamma'(t)$ pour $t \in [0, 1]$. Donc $\gamma(1) = \gamma'(1) = v(1/2)$.

Enfin la locale connexité par arcs permet de démontrer la continuité de F . □

Remarque 2.2.

Corollaire 10.14. *Soit (E, B, p) une revêtement connexe. Si $d = [\pi_1(B, b_0) : p_*(\pi_1(E, e_0))]$ alors le revêtement est à d feuillets. En particulier, p est un homéomorphisme si et seulement si $\pi_1(B, b_0) = p_*(\pi_1(E, e_0))$.*

Démonstration. En effet, si e_1, \dots, e_d sont les élément de $p^{-1}(b)$, il existe par hypothèse un chemin γ_i dans E entre e_1 et e_i . Sa projection est un lacet, et $\gamma_i \gamma_j^{-1}$ est un chemin reliant e_i à e_j sa projection n'est donc pas homotope à la projection d'un lacet de E . Réciproquement si c est un lacet, on lui associe le relevé γ et l'élément $\gamma(1)$. On a $\gamma(1) = e_0$ si et seulement si γ est dans $p_*(\pi_1(E, e_0))$ et plus généralement c_1 et c_2 donnent le même élément si et seulement si $c_1 \star c_2^{-1}$ est dans $p_*(\pi_1(E, e_0))$. □

Remarque 2.3. Si B est simplement connexe et connexe, les revêtements de B sont tous triviaux. En effet, le resultat précédent dit qu'un revêtement connexe est à un feuillet, donc trivial.

2.1 Automorphismes de revêtement

Soit B un espace connexe et localement connexe par arcs. on dit qu'un revêtement est connexe si son espace total est connexe. Par défaut tous les morphismes seront au dessus de l'identité.

Proposition 10.15. *Soit (E, B, p) et $(E', B, p)'$ deux revêtements connexes et $e \in p^{-1}(b), e' \in (p')^{-1}(b)$. Pour qu'il existe un morphisme de (E, B, p) dans $(E', B, p)'$ tel que $F(e) = e'$ il faut et il suffit que $p_*(\pi_1(E, e)) \subset p'_*(\pi_1(E', e'))$. F est alors unique. Pour que F soit un isomorphisme, il faut et il suffit que l'on ait égalité.*

Démonstration. En effet, F n'est rien d'autre qu'un relèvement de p . Ceci démontre le premier cas. Enfin dans le cas d'égalité, on a un morphisme dans l'autre sens, et la composée des deux est unique, c'est donc l'identité. □

Théorème 10.16. *Soit (E, B, p) un revêtement connexe. Soit N le normalisateur de $p_*(\pi_1(E, e_0))$ dans $\pi_1(B, x_0)$. Il existe un morphisme $h : N \rightarrow \text{Aut}_{Id}(E, B, p)$ ayant la propriété suivante. Si c est un lacet de N de relèvement \tilde{c} avec $\tilde{c}(0) = e_0$ et $\tilde{c}(1) = e$ alors $h([c])e_0 = e$.*

Démonstration. Le relèvement des chemins permet à $\pi_1(B, b_0)$ donc à N d'agir sur $p^{-1}(b)$. On note $e \mapsto [c] \cdot e$ cette action. Si $[c] \in N$ et $e_0, e_1 = [c]e_0$ sont deux points de $p^{-1}(b)$ on a que $p_*(\pi_1(E, e_0)) = p_*(\pi_1(E, e_1))$. En effet, soit γ est un chemin de E reliant e_1 à e_2 et c sa projection sur B . On suppose que c est dans N , donc $p_*(\pi_1(E, e_2)) = [c]^{-1}p_*(\pi_1(E, e_1))[c] = p_*(\pi_1(E, e_1))$ par hypothèse. Donc il existe un morphisme de (E, B, p) dans lui-même tel que $F(e_0) = e_1$. C'est un isomorphisme, car le même argument donne un morphisme envoyant e_1 sur e_0 et la composée des deux fixe e_0 , et est donc l'identité (par unicité). □

Proposition 10.17. *Sous les hypothèses de la proposition ci-dessus, le noyau de h est donné par $p_*(\pi_1(E, e_0))$. On a donc une suite exacte*

$$1 \longrightarrow p_*(\pi_1(E, e_0)) \longrightarrow N \xrightarrow{h} \text{Aut}_{Id}(E) \longrightarrow 1$$

Démonstration. En effet, un lacet induit un automorphisme fixant e_0 si et seulement si il est dans $p_*(\pi_1(E, e_0))$. Mais un tel automorphisme est nécessairement égal à l'identité. □

Définition 10.18. On dit qu'un revêtement est Galoisien, si le groupe $\text{Aut}_{id}(E)$ agit transitivement sur $p^{-1}(b)$.

Exemple 2.1. Soit G un groupe opérant librement et proprement sur E . alors $(E, E/G, p)$ est un revêtement Galoisien de groupe $G = \text{Aut}_{Id}(E)$.

Proposition 10.19. *Un endomorphisme d'un revêtement galoisien au dessus de l'identité est un isomorphisme.*

Démonstration. En effet, si h est un endomorphisme, il existe un automorphisme tel que $h(e_0) = g(e_0)$ et alors $h = g$. □

Théorème 10.20. *Un revêtement est Galoisien si et seulement si il est connexe et $p_*(\pi_1(E, e_0))$ est un sous groupe normal de $\pi_1(B, b_0)$. Dans ce cas $\text{Aut}_{Id}(E) = \pi_1(B, b_0)/p_*(\pi_1(E, e_0))$.*

Démonstration. En effet, si $p_*(\pi_1(E, e_0))$ est normal dans $\pi_1(B, b_0)$, h est défini sur $\pi_1(B, b_0)$ tout entier, et si $e_1 \in p^{-1}(b_0)$ la projection $[c]$ du chemin reliant e_0 à e_1 vérifie $h([c])e_0 = e_1$.

Inversement si le revêtement est Galoisien, k un automorphisme envoyant e_0 sur e_1 , et c la projection d'un lacet reliant e_0 à e_1 . Alors

$$[c]^{-1}p_*(\pi_1(E, e_0))[c] = p_*(\pi_1(E, e_1)) = p_*(\pi_1(E, k(e_0))) = p_*(\pi_1(E, e_0))$$

□

Revêtement universel :

Corollaire 10.21. *Soit (E, B, p) un revêtement connexe tel que E soit simplement connexe. Alors le revêtement est galoisien, et $\text{Aut}_{id}(E) = \pi_1(B, b_0)$.*

Théorème 10.22. *Tout espace B connexe, localement simplement connexe possède un revêtement E tel que $G = \text{Aut}_{id}(E) = \pi_1(B, b_0)$. Dans ce cas E est simplement connexe. Si H est un sous-groupe de G , alors $E/H \rightarrow B$ est un revêtement et $\pi_1(E/H) = H$.*

2.2 Application : Théorème de Nielsen Schreier

Théorème 10.23. *Tout sous-groupe d'un groupe libre est libre.*

Proposition 10.24. *Soit K un graphe. Alors $\pi_1(K)$ est un groupe libre.*

Soit F_r un groupe libre à r générateurs, et K un bouquet de r cercles. Alors $\pi_1(K) = F_r$. Si H est un sous-groupe de F_r il existe un revêtement de K tel que $\pi_1(L)$ soit isomorphe à H . Mais le quotient d'un graphe est un graphe, et le groupe fondamental d'un graphe connexe est un groupe libre.

Soient x_1, \dots, x_r les générateurs de F_r . On considère le graphe dont les sommets sont les éléments de G et il existe une unique arête reliant x et $x \cdot x_j^{\pm 1}$. C'est un graphe de valence $2r$, c'est-à-dire que de chaque sommet partent $2r$ arêtes.

3 Exercices

(A) Soit G un groupe topologique (ou un groupe de Lie). Montrer que $\pi(G)$ est abélien.

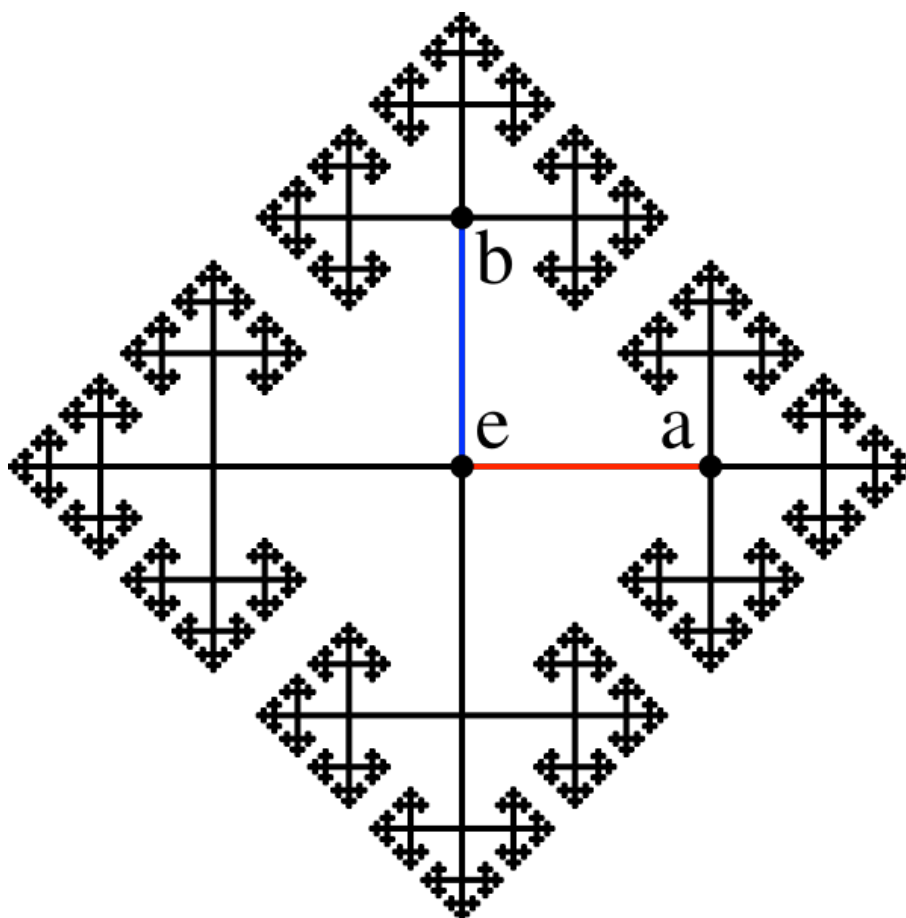


FIGURE 10.1 – Revêtement universel du bouquet de deux cercles

Avertissement : La lecture de chapitres des ouvrages ci-dessous fait partie intégrante du cours. Il est illusoire de croire que l'on peut acquérir une culture mathématique raisonnable en se limitant à la lecture des photocopiés des cours suivis.

Bibliographie

Sur variétés et sous-variétés : les indispensables

- [Do Carmo] M. Do Carmo *Differential Geometry of curves and surfaces* Prentice-Hall, 1976.
- [Milnor] J. Milnor *Topology from the differentiable viewpoint*. The University Press of Virginia. Charlottesville, 1965.
- [Milnor 2] J. Milnor *Morse Theory*. Princeton University Press, 1966.
- [Munkres] J. Munkres *Elementary differential Topology*. Princeton University Press, 1966.

Ouvrages plus avancés

- [Chavel] I. Chavel *Introduction to riemannien Geometry*. Cambridge University Press, 2006 (2nd édition)
- [Dieudonné] J. Dieudonné *Éléments d'Analyse*. Gauthier-Villars, 1974.
- [Gallot-Hulin-Lafontaine] S. Gallot, D. Hulin et J. Lafontaine *VRiemannian Geometry*. Springer, 2004 (3rd édition)
- [deRham] G. deRham *Variétés différentiables*. Hermann, Paris, 1960
- [Sternberg] S. Sternberg, *Lectures on Differential Geometry*. Prentice Hall, 1962

Sur Frobenius, Chow et la robotique :

- [Bellaïche-Risler] A. Bellaïche, J.J. Risler. *Sub-Riemannian Geometry*. Birkhäuser, 1996.
- [Bellaïche-Jean-Risler] A. Bellaïche, F .Jean, J.-J. Risler. *The Geometry of nonholonomic systems*.
ftp ://ftp.laas.fr/pub/ria/promotion/chap2.pdf
- [Godbillon] C. Godbillon *Géométrie différentielle et Mécanique analytique* Hermann, 1985.

Articles de recherche

[Kervaire-Milnor]

Michel A. Kervaire ; John W. Milnor. *Groups of Homotopy Spheres : I* The Annals of Mathematics, 2nd Ser., Vol. 77, No. 3. (May, 1963), pp. 504-537.