MATH 256 — **Mathématiques S4**
Université Paris - Saclay — **2021-2022**

Feuille d'exercices 1

Nombre complexes, trigonométrie

1.1. Vrai ou faux ? Parmi les assertions suivantes,, dire lesquelles sont vraies et lesquelles sont fausses en justifiant :

1. Pour tout nombre complexe t, le nombre complexe e^{it} est de module 1.
2. Si un nombre complexe vérifie $z^n = 1$ pour un entier n alors $z = e^{it}$ pour un $t \in \mathbb{R}$
3. Si r, t sont réels, le conjugué du nombre complexe re^{it} est re^{-it}
4. Si $t_1, ..., t_n$ sont des réels, alors le module $|e^{it_1} + ... + e^{it_n}|$ de $e^{it_1} + ... + e^{it_n}$ est égal n

1.2. Soit $u = a + ib$ un nombre complexe avec $a, b \in \mathbb{R}$. On cherche à résoudre l'équation

$$z^2 = u \tag{E}$$

avec $u \in \mathbb{C}$. On pose $u = c + id$ avec $c, d \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que c et d doivent vérifier les conditions suivantes
$$c^2 - d^2 = a, 2cd = b, c^2 + d^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$$
2. Montrer que si c, d vérifient les deux premiéres conditions, alors u est solution de (E)
3. $\sqrt{a^2 + b^2} + a, \sqrt{a^2 + b^2} - a$ sont positifs ou nuls.
4. On suppose que $c + id$ est solution de (E). Montrer que $c = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}$ ou $c = -\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}$. Montrer que $d = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$ ou $d = -\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$.
5. Trouver toutes les solutions de (E)
6. Expliciter les solutions de (E) quand $u = i$.

1.3.

1. Soit x un réel. Calculer $\sin(x + \frac{\pi}{2})$ et $\cos(x + \frac{\pi}{2})$ en fonction de $\sin(x)$ et $\cos(x)$
2. Même question pour $\sin(x + \frac{\pi}{3})$ et $\cos(x + \frac{\pi}{3})$
3. Même question pour $\sin(2x)$ et $\cos(2x)$

1.4. Racines de l'unité. Soit $n \geq 2$ un entier.

1. En cherchant z sous la forme trigonémétrique, montrer qu'il existe exactement n nombres complexes vérifiant $z^n = 1$. Expliciter ces n nombres complexes.
2. Soit u un nombre complexe non nul. Combien de solutions dans $\mathbb{C}$ possè de l'équation (d'inconnue z) $z^n = u$. (On montrera d'abord qu'il existe une solution z_0, puis en utilisant la première question on exprimera les autres solutions en fonction de z_0).