Université Paris – Saclay
Parcours élève ingénieur Polytech
2020 – 2021

Mathématiques S3

Notes de Cours

Chapitre 1 : Déterminants
Chapitre 2 : Diagonalisation

José Montesinos
jose.montesinos@universite-paris-saclay.fr

Chapitre 1

Déterminants

1.1 Introduction. Notations

Le déterminant est un objet mathématique riche et complexe. Il n'est pas facile de motiver sa définition ni de montrer ses propriétés sans trop s'étendre.

Pour nous, le déterminant est un outil de calcul qui permet de dire si une matrice carrée est inversible. Nous donnerons aussi une interprétation du déterminant en termes d'aire et volume.

Le chapitre est conçu pour faciliter une prise en main rapide, c'est cette visée pratique qui pilote l'agencement de définitions et résultats.

Précisons avant de commencer quelques **notations** :

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. $\mathbb{K}^n$ sera vu toujours comme espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, $\mathcal{B}_{can}$ est sa base canonique.

Si $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ est une application linéaire et $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{K}^n$, alors $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B})$ note la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

$\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble de matrices $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$.

I_n note la matrice identité d'ordre n (s'il n'y a pas de confusion possible, on notera tout simplement I).

1.2 Définition. Développement selon une ligne ou une colonne

1.2.1 Déterminant d'une matrice 2×2

Si $A = (a)$ est une matrice 1×1, son déterminant est défini par $\det(A) = a$.

Définition 1.2.1 Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

Par définition, le **déterminant** de A est la quantité

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Si les vecteurs colonnes $C_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$ et $C_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ de A sont colinéaires, on voit facilement que $\det(A) = 0$.

S'ils sont libres et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nous verrons dans la Sect. 1.6 que $\det(A)$ est l'aire « algébrique » (c'est-à-dire avec signe) du parallélogramme construit sur la base (C_1, C_2) (le signe du déterminant dépend de l'orientation de la base).

1.2.2 Déterminant d'une matrice 3×3

Définition 1.2.2 Soit Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$.

On peut définir le **déterminant** de A « en développant selon la première ligne » comme suit

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{1+1} a_{11} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{\Delta_{11}} + (-1)^{1+2} a_{12} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}}_{\Delta_{12}} + (-1)^{1+3} a_{13} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}_{\Delta_{13}} \end{aligned}$$

Remarques

1. Dans la formule apparaissent :

1. Les éléments a_{11}, a_{12} et a_{13} de la première ligne (a_{ij} est multiplié par $(-1)^{i+j}$).
2. Des déterminants Δ_{ij} de matrices d'ordre 2 qu'on sait calculer.
   Δ_{ij} s'appelle *cofacteur de A associé à* (i, j) : il s'agit du déterminant de la matrice 2×2 obtenue en rayant la i-ème ligne et la j-ème colonne de la matrice A.

2. On obtient le même résultat en développant selon une autre ligne ou colonne. Par exemple, le développement selon la deuxième colonne s'écrit

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^{1+2} a_{12} \Delta_{12} + (-1)^{2+2} a_{22} \Delta_{22} + (-1)^{3+2} a_{32} \Delta_{32} \\ &= -a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

3. On peut mémoriser le résultat final grâce à la **règle de Sarrus**. Quelle que soit la ligne ou colonne choisie pour le développement, on obtient

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \underbrace{a_{11}a_{22}a_{33}}_{D_1} + \underbrace{a_{12}a_{23}a_{31}}_{D_2} + \underbrace{a_{13}a_{21}a_{32}}_{D_3} - \underbrace{a_{13}a_{22}a_{31}}_{AD_1} - \underbrace{a_{12}a_{21}a_{33}}_{AD_2} - \underbrace{a_{11}a_{23}a_{32}}_{AD_3}$$

Les termes avec signe « + » sont ceux des « diagonales » D_1 (la diagonale principale de A), D_2 et D_3 (« parallèles » à D_1), que nous matérialisons dans le schéma suivant

$$\begin{pmatrix} \text{terme de } D_1 & \text{terme de } D_2 & \text{terme de } D_3 \\ \text{terme de } D_3 & \text{terme de } D_1 & \text{terme de } D_2 \\ \text{terme de } D_2 & \text{terme de } D_3 & \text{terme de } D_1 \end{pmatrix}$$

Les termes avec signe « − » sont ceux des « antidiagonales » AD_1, AD_2 et AD_3

$$\begin{pmatrix} \text{terme de } AD_3 & \text{terme de } AD_2 & \text{terme de } AD_1 \\ \text{terme de } AD_2 & \text{terme de } AD_1 & \text{terme de } AD_3 \\ \text{terme de } AD_1 & \text{terme de } AD_3 & \text{terme de } AD_2 \end{pmatrix}$$

4. Le déterminant de la matrice A est nul si les vecteurs colonnes C_1, C_2, C_3 de A sont liés (nous préciserons ce résultat général dans la Sect 1.5).

Nous montrerons à la fin de ce Chapitre que si les $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathcal{B} = (C_1, C_2, C_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, alors $\det(A)$ est le volume « algébrique » (avec signe) du parallélépipède construit sur les vecteurs de $\mathcal{B}$ (le signe du déterminant dépend de l'orientation de cette base).

1.2.3 Déterminant d'une matrice $n \times n$

On peut utiliser le développement selon la première ligne pour définir le déterminant d'une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_4(\mathbb{K})$:

$$\det(A) = (-1)^{1+1}a_{11}\Delta_{11} + (-1)^{1+2}a_{12}\Delta_{12} + (-1)^{1+3}a_{13}\Delta_{13} + (-1)^{1+4}a_{14}\Delta_{14}$$

Les cofacteurs Δ_{ij} sont des déterminants de matrices d'ordre 3 qu'on sait calculer.

Plus généralement, on définit par récurrence le déterminant d'une matrice d'ordre n :

Définition 1.2.3 Soit la matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On définit le **déterminant** de A de la manière suivante

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j}\Delta_{1j}$$

Remarques

1. Ici, les **cofacteurs** Δ_{ij} sont des déterminants de matrices d'ordre $n-1$.
Ils sont définis comme dans la section précédente : Δ_{ij} **est le déterminant de la matrice obtenue à partir de** A **en supprimant la ligne** i **et la colonne** j**.**

2. On peut montrer que **le résultat ne dépend pas de la ligne ou colonne choisie pour développer le déterminant**.

3. Les signes de $(-1)^{i+j}$ sont alternés, par exemple si $n=4$ on a la disposition suivante

$$\begin{matrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{matrix}$$

Exemples

1. Pour calculer

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 & 2 \\ 6 & 7 & 0 & 8 \\ 9 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

on peut développer selon la première ligne :

$$\begin{aligned} \Delta &= 3\Delta_{11} - 5\Delta_{12} + 1\Delta_{13} - 2\Delta_{14} \\ &= 3\begin{vmatrix} 7 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 6 & 0 & 8 \\ 9 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 9 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 6 & 7 & 0 \\ 9 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \cdots \end{aligned}$$

mais il est plus astucieux de développer selon la troisième colonne :

$$\Delta = 1\Delta_{13} - 0\Delta_{23} + 0\Delta_{33} - 5\Delta_{43} = \begin{vmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 9 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 6 & 7 & 8 \\ 9 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \cdots$$

2. En développant à chaque étape selon la première colonne, on a

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 1 \times 5 \times \begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} = 1 \times 5 \times 8 \times 10$$

On aura compris que

> **Proposition 1.2.4** *Le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure ou inférieure est le produit des éléments de la diagonale*

En particulier

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$$

1.3 Propriétés fondamentales du déterminant

Rappelons que si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors la **transposée** de A est la matrice $A^T = (\alpha_{ij})$ définie par $\alpha_{ij} = a_{ji}$ pour tous $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$.

> **Théorème 1.3.1** *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, *alors* $\det(A) = \det\left(A^T\right)$.

Grâce à ce résultat, chacune des propriétés du déterminant relative aux colonnes de la matrice fournit, en utilisant la transposée, la propriété analogue pour les lignes (les lignes de A sont les colonnes de A^T).

Si C_1, C_2, ..., C_n sont les vecteurs colonnes d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on notera

$$A = (C_1, C_2, \ \ldots \ , C_n)$$

> **Théorème 1.3.2** *Le déterminant d'une matrice est « linéaire » par rapport à chaque colonne de la matrice*
>
> $$\begin{aligned} \det\left(C_1, C_2, \ \ldots \ , \lambda C_i' + \mu C_i'', \ \ldots \ , C_n\right) = & \ \lambda \det\left(C_1, C_2, \ \ldots \ , C_i', \ \ldots \ , C_n\right) \\ & + \mu \det\left(C_1, C_2, \ \ldots \ , C_i'', \ \ldots \ , C_n\right) \end{aligned}$$
>
> *pour tous* $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

Remarques

1. A partir du Th. 1.3.1, on a la même propriété pour les lignes :

> *Le déterminant d'une matrice est « linéaire » par rapport à chaque ligne de la matrice*

2. Si $A = (C_1, C_2, \ \ldots \ , C_n)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\lambda A = (\lambda C_1, \lambda C_2, \ \ldots \ , \lambda C_n)$. En appliquant n fois le Théorème, on obtient

> *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$, *alors*
>
> $$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$$
>
> *En particulier* $\det(-A) = (-1)^n \det(A)$.

> **Théorème 1.3.3** *Si l'on échange deux colonnes (ou deux lignes) d'une matrice, alors le déterminant est multiplié par* -1.
> *En particulier, si une matrice a deux colonnes (ou deux lignes) égales, alors son déterminant est nul.*

Proposition 1.3.4 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

1. *On ne modifie pas $\det(A)$ en ajoutant à une colonne de A une combinaison linéaire des autres colonnes.*
2. *Si les vecteurs colonnes de A sont liés, alors $\det(A) = 0$*

On a les mêmes propriétés pour les lignes de la matrice A.

Démonstration : Soit $A = (C_1, C_2, \ldots, C_p, \ldots, C_n)$.
a) Ajoutons à la colonne p une combinaison linéaire des autres

$$\begin{aligned}\det(C_1, C_2, \ldots, C_p + \sum_{\substack{i=1\\i\neq p}}^{n} \lambda_i C_i, \ldots, C_n) &= \det(C_1, C_2, \ldots, C_p, \ldots, C_n)\\ &\quad + \sum_{\substack{i=1\\i\neq p}}^{n} \lambda_i \underbrace{\det(C_1, C_2, \ldots, C_i, \ldots, C_n)}_{=0}\\ &= \det(C_1, C_2, \ldots, C_p, \ldots, C_n)\end{aligned}$$

d'après les Théorèmes 1.3.2 et 1.3.3.
b) Si les vecteurs C_1, C_2, ..., C_n sont liés, il existe $1 \leq p \leq n$ tel que $C_p = \sum_{\substack{i=1\\i\neq p}}^{n} \mu_i C_i$.

Par conséquent

$$\begin{aligned}\det(C_1, C_2, \ldots, C_p, \ldots, C_n) &= \det(C_1, C_2, \ldots, \sum_{\substack{i=1\\i\neq p}}^{n} \mu_i C_i, \ldots, C_n)\\ &= \sum_{\substack{i=1\\i\neq p}}^{n} \mu_i \det(C_1, C_2, \ldots, \underbrace{C_i}_{\text{colonne } p}, \ldots, C_n) = 0\end{aligned}$$

toujours grâce aux Th. 1.3.2 et 1.3.3. □

Théorème 1.3.5 *Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\det(AB) = \det(A)\det(B)$*

Remarque

Le résultat se généralise pour un nombre quelconque de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ grâce à la propriété associative du produit :

$$\det(A \cdot B \cdot C) = \det((A \cdot B) \cdot C) = \det(A \cdot B)\det(C) = \det(A)\det(B)\det(C)$$

en appliquant deux fois le théorème.

1.4 Méthode pratique de calcul d'un déterminant

On peut calculer un déterminant en développant le long de n'importe quelle ligne ou colonne, mais il sera plus simple de choisir la ligne ou la colonne ayant le maximum de zéros.

D'autre part, ajouter à une colonne (resp. ligne) une combinaison linéaire des autres colonnes (resp. lignes) ne change pas le déterminant : on se servira de ces opérations pour augmenter le nombre de zéros sur les colonnes ou les lignes.

Exemple 1. Calculer le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & -5 & 0 \\ 5 & 0 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

On remarque qu'il y a deux zéros dans la deuxième colonne, mais avant de développer par rapport à cette colonne on va remplacer la ligne L_3 par $L_3 + L_1$ (on notera $L_3 \to L_3 + L_1$) : le déterminant ne change pas et nous faisons apparaître un zéro supplémentaire :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & 2 \\ 4 & 0 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & 7 & 1 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 5 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

Les manipulations successives $L_2 \to L_2 - L_3$ et $L_1 \to L_1 - 2L_3$ ne changent pas le déterminant et

$$-\begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 5 & 7 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -8 & -9 & 0 \\ -1 & -9 & 0 \\ 5 & 7 & 1 \end{vmatrix} = -(+1\begin{vmatrix} -8 & -9 \\ -1 & -9 \end{vmatrix}) = -((-8)(-9) - (-9)(-1)) = -63$$

en développant par rapport à la dernière colonne.

Exemple 2. Factoriser le polynôme

$$P(x) = \begin{vmatrix} x & b & c \\ b & x & c \\ c & b & x \end{vmatrix} \in \mathbb{K}[x]$$

En ajoutant à la première colonne les deux autres ($C_1 \to C_1 + C_2 + C_3$) on a

$$P(x) = \begin{vmatrix} x+b+c & b & c \\ x+b+c & x & c \\ x+b+c & b & x \end{vmatrix} = (x+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & x & c \\ 1 & b & x \end{vmatrix} = (x+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & x-b & 0 \\ 0 & 0 & x-c \end{vmatrix}$$

où la dernière égalité découle de $L_2 \to L_2 - L_1$ et $L_3 \to L_3 - L_1$.
Comme la matrice est triangulaire son déterminant vaut $1 \cdot (x-b) \cdot (x-c)$ et

$$P(x) = (x+b+c)(x-b)(x-c)$$

1.5 Déterminant et rang

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Rappelons que le rang de A est la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ engendré par les vecteurs colonnes de A.
On peut montrer que $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^T)$ et donc que le rang d'une matrice est aussi la dimension de l'espace vectoriel engendré par ses vecteurs lignes.

On sait que

> *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, les propriétés suivantes son équivalentes :*
>
> 1. *$rang(A) = n$*
> 2. *Il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $B \cdot A = I$ (la matrice identité d'ordre n).*
> 3. *Il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A \cdot B = I$.*
> 4. *Il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A \cdot B = B \cdot A = I$.*
>
> *On dira alors que A est inversible.*
> *De plus, la matrice B est unique : on note $B = A^{-1}$ et on appelle B la matrice inverse de A*

Voici le résultat central du Chapitre :

> **Théorème 1.5.1** *La matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si* $\det(A) \neq 0$.
> *Dans ce cas*
> $$\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}$$

Démonstration : Si A n'est pas inversible, $rang(A) < n$: ses vecteurs colonnes sont liés et, d'après la Prop. 1.3.4, $\det(A) = 0$. *Ceci montre (contraposée) que*

$$\det(A) \neq 0 \ \Rightarrow \ A \textit{ inversible}$$

Supposons maintenant que A est inversible. Alors $A \cdot \left(A^{-1}\right) = I$ et

$$1 = \det\left(I_n\right) = \det\left(A \cdot \left(A^{-1}\right)\right) = \det(A) \cdot \det\left(A^{-1}\right)$$

d'après le Th. 1.3.5. Ainsi $\det(A) \neq 0$ *et* $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det(A)}$. □

Remarques

On dispose de formules pour calculer A^{-1} en fonction des cofacteurs Δ_{ij} de A (rappelons que Δ_{ij} est le déterminant de la matrice obtenue à partir de A en supprimant la ligne i et la colonne j).

On construit d'abord la **comatrice** de A, c'est-à-dire la matrice $C = (c_{ij})$ définie par

$$c_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$$

On peut montrer que

$$A \cdot \left(C^T\right) = (\det(A))\, I$$

En effet : on retrouve dans chaque élément de la diagonale de $A \cdot \left(C^T\right)$ l'expression du développement de déterminant de A le long d'une ligne. Les éléments en dehors de la diagonale sont nuls : chacun d'entre eux correspond au développement du déterminant d'une matrice avec deux lignes égales. Par conséquent

> *Si A est une matrice inversible, alors on a*
>
> $$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \left(C^T\right)$$
>
> *où C est la comatrice de A.*

Cette formule a assez peu d'intérêt pratique, sauf si $n = 2$ où elle s'écrit

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

1.5.1 Matrices semblables. Déterminant d'un endomorphisme

Définition 1.5.2 Soient A et B des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est **semblable** à B s'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$B = P^{-1}AP$$

Remarque

Si A est semblable à B, alors B est semblable à A ($A = Q^{-1}BQ$ avec $Q = P^{-1}$).
On dira simplement que les matrices A et B sont semblables.

> **Proposition 1.5.3** *Si les matrices A et B sont semblables, alors*
>
> $$\det(A) = \det(B)$$

Démonstration : Dans les notations de la définition

$$\det(B) = \det\left(P^{-1}AP\right) = \det\left(P^{-1}\right)\det(A)\det(P) = \frac{1}{\det(P)}\det(A)\det(P) = \det(A)$$

□

Soit $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ une application linéaire (on dit alors que f est un **endomorphisme** de $\mathbb{K}^n$)

Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de $\mathbb{K}^n$, alors les matrices $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B})$ et $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}')$ sont semblables. En effet

$$\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}') = P^{-1}\,\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B})\;P$$

avec $P = P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$, la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Par conséquent $\det\left(\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B})\right) = \det\left(\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}')\right)$:

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$. Le nombre

$$\det\left(\mathrm{Mat}(f,\mathcal{B})\right)$$

ne dépend pas du choix de la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^n$, il s'appelle le ***déterminant de l'endomorphisme** f et se note* $\det(f)$.

1.5.2 Équation cartésienne d'un hyperplan

Définition 1.5.4 Un **hyperplan** de $\mathbb{K}^n$ est un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$ de $\mathbb{K}^n$

Soit $X \in \mathbb{K}^n$ et $(C_1, C_2, \ \dots\ C_{n-1})$ une suite libre de vecteurs de $\mathbb{K}^n$.
Considérons l'hyperplan $H = \mathrm{Vect}(C_1, C_2, \ \dots\ C_{n-1})$.
Nous pouvons donner une équation cartésienne de H grâce au déterminant :

$$X \in H \ \Leftrightarrow\ \mathrm{rang}(X, C_1, C_2, \ \dots\ C_{n-1}) = n-1 \ \Leftrightarrow\ \det(X, C_1, C_2, \ \dots\ C_{n-1}) = 0$$

(nous considérons X et les C_i comme vecteurs colonnes dans le déterminant).

Exemple. Soit $X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ et considérons l'hyperplan de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$H = \mathrm{Vect}\left(\ (1,2,3,0),\ (4,5,6,0),\ (2,0,1,4)\ \right)$$

Une équation cartésienne de H est

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 4 & 2 \\ y & 2 & 5 & 0 \\ z & 3 & 6 & 1 \\ t & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

1.5.3 Systèmes de Cramer

Définition 1.5.5 On dit qu'un système linéaire à n équations et n inconnues est un **système de Cramer** s'il admet une solution unique

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $b \in \mathbb{K}^n$ donnés. Considérons le système linéaire

$$A \cdot X = b \qquad (S)$$

Proposition 1.5.6 *Le système (S) est de Cramer si et seulement si* $\det(A) \neq 0$

Démonstration : Supposons que $\det(A) \neq 0$, alors la matrice A est inversible et $AX = b$ équivaut à $X = A^{-1}b$: le système (S) a une solution unique.

Supposons maintenant que (S) est de Cramer.
Si X_1 est une solution de (S), alors l'ensemble de solutions du système est $X_1 + \ker(A)$.
Par conséquent, $\ker(A) = 0$ (puisque X_1 est l'unique solution) donc $\mathrm{Im}(A) = \mathbb{K}^n$, ainsi $\mathrm{rang}(A) = n$: A est inversible et $\det(A) \neq 0$. □

1.5.4 Rang d'une matrice $m \times n$

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

Par définition, le rang de A est la dimension de l'espace vectoriel engendré par les vecteurs colonnes de A. On peut montrer que

$$\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}\left(A^T\right)$$

et donc que le rang d'une matrice est aussi la dimension de l'espace vectoriel engendré par ses vecteurs lignes. Ainsi

$$\mathrm{rang}(A) \leq \min\{\, m,\ n \,\}$$

Définition 1.5.7 Un **mineur** de taille p extrait de la matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est le déterminant d'une matrice $A' \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ extraite de A (c'est-à-dire que A' est obtenue à partir de A en supprimant $m - p$ lignes et $n - p$ colonnes de A)

Par exemple, si

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 & 0 \\ 7 & 9 & -3 & 4 & -1 \\ 6 & -5 & -2 & -9 & 8 \\ 0 & 1 & -8 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

Deux mineurs de taille 3 extraits de la matrice A sont :

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 7 & 9 & -3 \\ 0 & 1 & -8 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 7 & -3 & -1 \\ 6 & -2 & 8 \\ 0 & -8 & -4 \end{vmatrix}$$

Pour obtenir le premier, on a supprimé L_3, C_4, C_5 dans A et pour le deuxième, L_1, C_2 et C_4.

Proposition 1.5.8 *Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice non nulle.*

1. *S'il existe un mineur de taille p non nul extrait de A, alors $\mathrm{rang}(A) \geq p$.*
2. *Il existe un mineur non nul extrait de A de taille $\mathrm{rang}(A)$.*

En résumé, le rang de A est le plus grand entier p tel qu'il existe un mineur de taille p non nul extrait de A

Démonstration :
a) Si le déterminant de A' (matrice $p \times p$ extraite de A) est non nul, alors les vecteurs colonnes de A' son libres et à fortiori les p vecteurs colonnes correspondants de A sont libres aussi

(supposer qu'ils sont liés...). Par conséquent, $\mathrm{rang}(A) \geq p$.

b) Soit $r = \mathrm{rang}(A)$*, il existe* r *vecteurs colonnes de* A *libres :* $C_{j_1}, C_{j_2}, \ldots, C_{j_r}$*. Soit alors la matrice extraite de* A *de rang* r

$$A' = (C_{j_1}, C_{j_2}, \ \ldots \ , C_{j_r})$$

Le rang de cette matrice $m \times r$ *est aussi la dimension de l'espace vectoriel engendré par ses vecteurs lignes : il existe donc* r *vecteurs lignes de* A' *libres :* $L'_{i_1}, L'_{i_2}, \ldots, L'_{i_r}$*.*
Soit A'' *la matrice* $r \times r$ *extraite de* A' *(et donc de* A*) en gardant ces* r *vecteurs lignes. On a* $\det(A'') \neq 0$ *(ses vecteurs lignes sont libres !) : il existe bien un mineur non nul extrait de* A *de taille* r*.* $\square$

Dans les applications pratiques, il est plus simple de déterminer le rang d'une matrice en utilisant la méthode du pivot.

1.6 Déterminant, aire et volume

1.6.1 Le produit vectoriel

Soit $\mathcal{B}_{can} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On définit le **produit vectoriel** de deux vecteurs $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ et $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ de $\mathbb{R}^3$ par

$$\vec{b} \wedge \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & b_1 & c_1 \\ \vec{e_2} & b_2 & c_2 \\ \vec{e_3} & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \vec{e_1} - \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \vec{e_2} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \vec{e_3}$$

(la première égalité est une astuce mnémotechnique, la définition rigoureuse est donnée par la deuxième égalité).

Remarquons que si $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, le produit scalaire $< \vec{a}, \ \vec{b} \wedge \vec{c} >$ s'écrit

$$< \vec{a}, \ \vec{b} \wedge \vec{c} > = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \tag{1}$$

Propriétés du produit vectoriel

A partir des propriétés du déterminant on montre facilement que

Proposition 1.6.1 *Pour tous* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ *et tous* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *on a*

1. $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\ \vec{b} \wedge \vec{a}$.
2. $(\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}) \wedge \vec{c} = \lambda\vec{a} \wedge \vec{c} + \mu\vec{b} \wedge \vec{c}$.
3. $\vec{a} \wedge (\lambda\vec{b} + \mu\vec{c}) = \lambda\vec{a} \wedge \vec{b} + \mu\vec{a} \wedge \vec{c}$.
4. $\vec{a} \wedge \vec{b} = 0$ *si et seulement si* $\vec{a}$ *et* $\vec{b}$ *sont colinéaires.*
5. $\vec{a} \wedge \vec{b}$ *est orthogonal à* $\vec{a}$ *et* $\vec{b}$ *:* $< \vec{a} \wedge \vec{b}, \ \vec{a} > = < \vec{a} \wedge \vec{b}, \ \vec{b} > = 0$.

La norme du produit vectoriel

Un calcul élémentaire montre que

$$\|\vec{b} \wedge \vec{c}\|^2 = \|\vec{b}\|^2 \, \|\vec{c}\|^2 - <\vec{b},\ \vec{c}>^2 \tag{2}$$

Soit $\theta \in [0, \pi]$ l'angle entre les vecteurs $\vec{b}$ et $\vec{c}$. On sait que

$$<\vec{b},\ \vec{c}> = \|\vec{b}\| \, \|\vec{c}\| \cos\theta$$

et (2) s'écrit

$$\|\vec{b} \wedge \vec{c}\|^2 = \|\vec{b}\|^2 \, \|\vec{c}\|^2 (1 - \cos^2\theta) = \|\vec{b}\|^2 \, \|\vec{c}\|^2 \sin^2\theta$$

Comme $\sin\theta \geq 0$ on obtient

$$\|\vec{b} \wedge \vec{c}\| = \|\vec{b}\| \, \|\vec{c}\| \sin\theta$$

> *Si les vecteurs $\vec{b}$ et $\vec{c}$ de $\mathbb{R}^3$ sont libres, on peut interpréter la norme du produit vectoriel $\vec{b} \wedge \vec{c}$ comme l'aire du parallélogramme construit sur ces deux vecteurs.*

En effet : $\|\vec{b}\|$ est la longueur de sa base et $\|\vec{c}\| \sin\theta$ la hauteur.

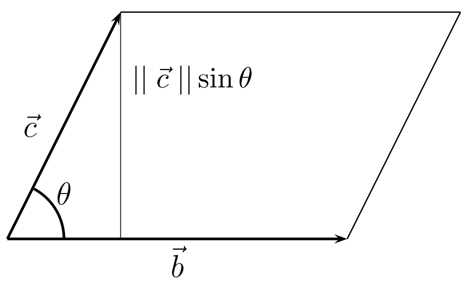

FIGURE 1.1 – L'aire du parallélogramme construit sur $\vec{b}$ et $\vec{c}$ est $\|\vec{b}\| \, \|\vec{c}\| \sin\theta$

1.6.2 Déterminant et aire

On peut transcrire facilement ce résultat à $\mathbb{R}^2$:

Si $\vec{b} = (b_1, b_2, 0)$ et $\vec{c} = (c_1, c_2, 0)$, le produit vectoriel s'écrit

$$\vec{b} \wedge \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & b_1 & c_1 \\ \vec{e_2} & b_2 & c_2 \\ \vec{e_3} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \vec{e_3}$$

et sa norme est

$$\|\vec{b} \wedge \vec{c}\| = \left| \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \right|$$

A partir de l'interprétation de $\|\vec{b} \wedge \vec{c}\|$ en termes d'aire, on a

> *La valeur absolue du déterminant* $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$ *est l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs* (b_1, b_2) *et* (c_1, c_2) *de* $\mathbb{R}^2$

Remarque. Si (b_1, b_2) et (c_1, c_2) sont libres, le déterminant $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$ est positif si la base $(\ (b_1, b_2),\ (c_1, c_2)\ )$ est directe et négatif si elle n'est pas directe.

1.6.3 Déterminant et volume

Revenons aux vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$.
Si $\varphi \in [0, \pi]$ est l'angle entre les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b} \wedge \vec{c}$, on a

$$< \vec{a},\ \vec{b} \wedge \vec{c} > = ||\ \vec{a}\ ||\ ||\ \vec{b} \wedge \vec{c}\ || \cos \varphi$$

par conséquent, $|\ < \vec{a},\ \vec{b} \wedge \vec{c} >\ |$ est le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

En effet :
$||\ \vec{b} \wedge \vec{c}\ ||$ est l'aire de sa base (le parallélogramme construit sur $\vec{b}$ et $\vec{c}$),
$||\vec{a}||\ |\cos \varphi|$ est la hauteur (puisque $\vec{b} \wedge \vec{c}$ est orthogonal à $\vec{b}$ et $\vec{c}$)
et grâce à l'identité (1) nous avons prouvé que

> *La valeur absolue du déterminant*
>
> $$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$
>
> *est le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs* $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ *et* $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ *de* $\mathbb{R}^3$

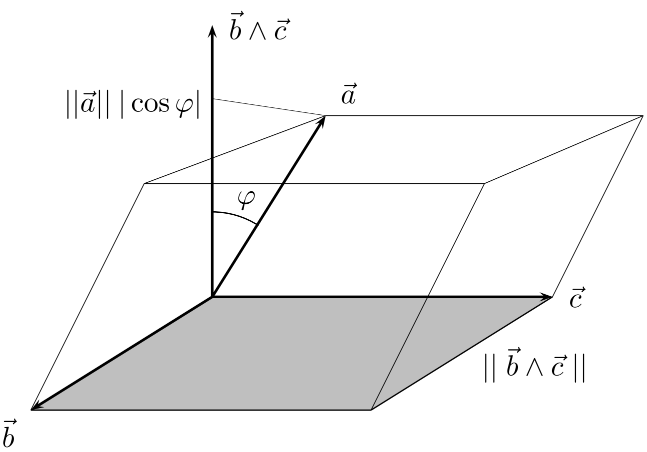

Figure 1.2 – Le parallélépipède construit sur les vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

Remarques

1. Si $\mathcal{B} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ est une base de $\mathbb{R}^3$, le déterminant Δ est positif si et seulement si $\mathcal{B}$ est une base directe.

2. Nous avons vu que le déterminant en dimension 2 ou 3 est lié aux notions d'aire ou volume, et orientation : il permet de généraliser ces concepts en dimension n.

Chapitre 2

Diagonalisation

2.1 Endomorphisme diagonalisable. Matrice diagonalisable

Définition 2.1.1 Soit f un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ (c'est-à-dire que $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ est une application linéaire).
On dit que f est **diagonalisable** s'il existe une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{K}^n$ telle que $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}')$ est une matrice diagonale :

$$\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Si $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, \ \ldots \ , v_n)$ on a donc $f(v_i) = \lambda_i v_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

Définition 2.1.2 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On dit que la matrice A est **diagonalisable** sur $\mathbb{K}$ si elle est semblable à une matrice diagonale, c'est-à-dire qu'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible telle que $P^{-1}AP$ est diagonale

Remarques

1. Les deux notions sont liées :

> *Si f est un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ diagonalisable et $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{K}^n$, alors la matrice $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B})$ est diagonalisable sur $\mathbb{K}$*

En effet : par hypothèse, il existe une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{K}^n$ telle que $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}')$ est diagonale.
On sait que

$$\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}') = P^{-1} \ \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}) \ P$$

avec $P = P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$ (la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$) et $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B})$ est bien semblable à une matrice diagonale

Réciproquement :

> *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable sur $\mathbb{K}$ et $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{K}^n$.*
> *Si f est l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ tel que $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}) = M$, alors f est diagonalisable.*

En effet, maintenant on part de l'existence d'une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible telle que $D = P^{-1}MP$ est diagonale.

Soit alors $\mathcal{B}'$ la base de $\mathbb{K}^n$ telle que $P = P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$ (les vecteurs colonnes de P donnent les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$).

On déduit de $D = P^{-1}MP$ que $D = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}')$ et f est un endomorphisme diagonalisable.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et soit f_A l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ défini par $f_A(X) = A \cdot X$, pour tout $X \in \mathbb{K}^n$ (X est vu comme vecteur colonne dans l'expression matricielle).

On dira que f_A **est l'endomorphisme associé à la matrice** A (on aura remarqué que $\mathrm{Mat}(f_A, \mathcal{B}_{can}) = A$).

Nous écrirons d'un façon un peu abusive $\ker(A)$ ou $\mathrm{Im}(A)$ pour désigner le noyau ou l'image de l'endomorphisme f_A.

D'après la remarque précédente on a

> *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*
> *La matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ si et seulement si f_A, l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ associé à A, est diagonalisable*

2.2 Vecteur propre. Valeur propre. Espace propre

Définition 2.2.1 Soit f un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$.
Un vecteur $v \in \mathbb{K}^n$ est un **vecteur propre** de f si

1. $v \neq 0$
2. Il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(v) = \lambda v$

On dit alors que le nombre λ est une **valeur propre** de f.
Le vecteur propre v est dit associé à la valeur propre λ.

Le lien avec la diagonalisation est immédiat

> *L'endomorphisme f de $\mathbb{K}^n$ est diagonalisable si et seulement si il existe une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{K}^n$ formée de vecteurs propres de f.*
> *Les coefficients diagonaux de $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}')$ sont les valeurs propres de f.*

Remarques. Exemples

1. Pour que la définition soit pertinente, on doit exclure le vecteur 0 comme vecteur propre (car $f(0) = 0 = \mu 0$ pour tout $\mu \in \mathbb{K}$: tout scalaire serait alors valeur propre !).

2. Si $\ker(f) \neq \{0\}$, alors tout vecteur non nul de $\ker(f)$ est vecteur propre de f associé à la valeur propre 0.

3. Soit id l'endomorphisme identité de $\mathbb{K}^n$. Tout vecteur non nul de $\mathbb{K}^n$ est vecteur propre de id associé à la valeur propre 1.

Si $c \in \mathbb{K}$, l'endomorphisme $c \cdot id$ s'appelle **homothétie** de $\mathbb{K}^n$ de rapport c. Son unique valeur propre est c et tout vecteur non nul de $\mathbb{K}^n$ est vecteur propre associé à c.

Définition 2.2.2 Soit f un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de f.
Le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$

$$E_\lambda = \ker(f - \lambda id)$$

s'appelle **espace propre** associé à la valeur propre λ

Remarques

1. Puisque

$$v \in \ker(f - \lambda id) \;\Leftrightarrow\; (f - \lambda id)(v) = 0 \;\Leftrightarrow\; f(v) = \lambda v$$

il vient que

> *Le sous-espace vectoriel E_λ est constitué par*
> 1. *Le vecteur* 0
> 2. *Tous les vecteurs propres associés à la valeur propre* λ

2. A partir du Th. noyau-image

$$\dim E_\lambda = \dim \ker(f - \lambda id) = n - \dim \operatorname{Im}(f - \lambda id)$$

3. Si f est un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ et $\ker(f) \neq \{0\}$, alors le scalaire 0 est valeur propre de f et $E_0 = \ker(f)$.

4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et f_A l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ associé.
On parlera (abusivement) de valeur propre, vecteur propre ou espace propre de la matrice A pour désigner ceux de l'endomorphisme f_A.

Soit $X \in \mathbb{K}^n$, alors $f_A(X) = \lambda X$ s'écrit $AX = \lambda X$ (on considère ici X comme vecteur colonne) ou encore $(A - \lambda I)X = 0$ (si I désigne la matrice identité de $\mathbb{K}^n$).

Si E_λ est un espace propre de A (c'est-à dire de f_A) alors $E_\lambda = \ker(A - \lambda I)$ et l'égalité de la Remarque 2 s'écrit

$$\dim E_\lambda = \dim \ker(A - \lambda I) = n - \operatorname{rang}(A - \lambda I)$$

2.2.1 Projections, symétries

Soient $F \neq \{0\}$ et $G \neq \{0\}$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$ en **somme directe**

$$F \oplus G = \mathbb{K}^n$$

Rappelons que cette notion est caractérisée par chacune des conditions suivantes, qui sont équivalentes :

1. Tout vecteur $u \in \mathbb{K}^n$ s'écrit de façon unique $u = u_F + u_G$, avec $u_F \in F$ et $u_G \in G$.
2. Si $\mathcal{B}_F$ est une base de F et $\mathcal{B}_G$ est une base de G, alors $(\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G)$, c'est-à-dire la suite formée par les vecteurs de $\mathcal{B}_F$ suivis des vecteurs de $\mathcal{B}_G$, est une base de $\mathbb{K}^n$.
3. $F \cap G = \{0\}$ et $F + G = \mathbb{K}^n$.

Dans ces notations

• **La projection sur** G **parallèlement à** F est l'endomorphisme p de $\mathbb{K}^n$ défini par

$$p(u) = p(u_F + u_G) = u_G$$

On peut voir facilement la signification géométrique de p sur $\mathbb{R}^2$ (se donner deux droites vectorielles en somme directe comme dans la Figure 2.1) ou $\mathbb{R}^3$ (prendre une droite et un plan en somme directe).

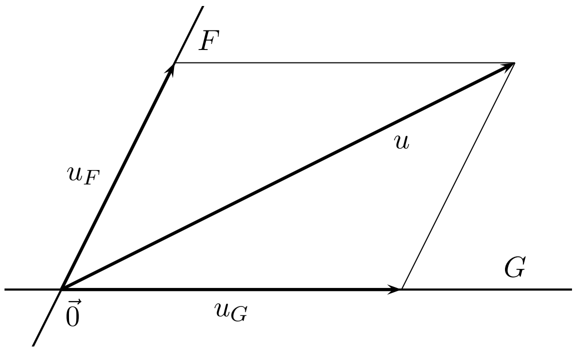

FIGURE 2.1 – La projection sur G parallèlement à F : $p(u) = u_G$

On montre en effet que p est linéaire.

On a $\ker(p) = F$: 0 est valeur propre de p et l'espace propre correspondant est $E_0 = F$.

D'autre part, $p(u) = u$ si et seulement si $u \in G$: 1 est valeur propre de p et $E_1 = G$.

Ainsi p est diagonalisable puisque $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G)$ est une base de $\mathbb{K}^n$ formée de vecteurs propres.

La matrice $D = (d_{ij})$ de la projection dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale : si $k = \dim(F)$ on trouve d'abord sur la diagonale k coefficients nuls :

$$d_{11} = \cdots = d_{kk} = 0$$

suivis de $n - k = \dim(G)$ coefficients égaux à 1 :

$$d_{k+1\,k+1} = \cdots = d_{nn} = 1$$

Réciproquement, si un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ admet dans une base une matrice diagonale avec des 0 et 1 sur la diagonale, il s'agit d'une projection.

• **La symétrie par rapport à** G **parallèlement à** F est l'endomorphisme s de $\mathbb{K}^n$ défini par

$$s(u) = s(u_F + u_G) = u_G - u_F$$

Comme précédemment, on motive facilement cette définition à partir d'exemples dans le plan (Fig 2.2) ou l'espace.

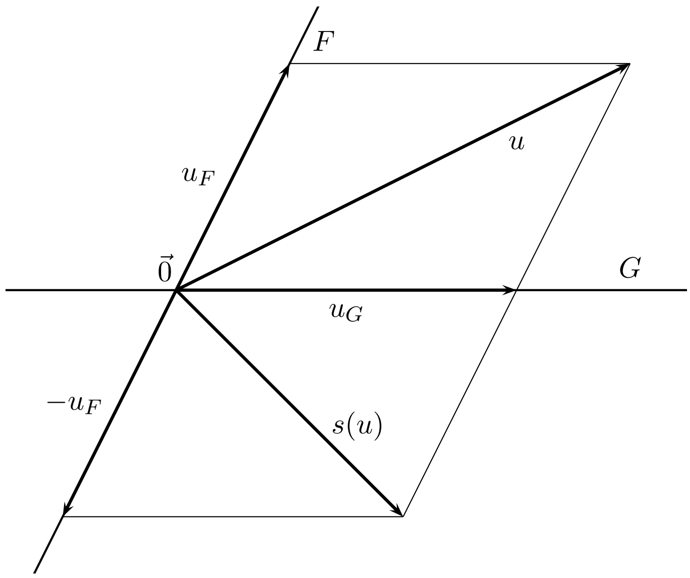

FIGURE 2.2 – La symétrie par rapport à G parallèlement à F : $s(u) = u_G - u_F$

On montre (exercice) que

1. s est bien linéaire.
2. 1 est valeur propre de s et $E_1 = G$.
3. -1 est valeur propre de s et $E_{-1} = F$

Ainsi, $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G)$ est une de $\mathbb{K}^n$ formée de vecteurs propres de s. La matrice $D = (d_{ij})$ de la symétrie dans cette base est donc diagonale. Si $k = \dim(F)$:

$$d_{11} = \ \cdots \ = d_{kk} = -1 \ \text{ et } \ d_{k+1\,k+1} = \ \cdots \ = d_{nn} = 1$$

Réciproquement, si un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ admet dans une base une matrice diagonale avec des -1 et 1 sur la diagonale, il s'agit d'une symétrie.

2.3 Les espaces propres sont en somme directe

Proposition 2.3.1 *Soit f un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$.*
Si λ et μ sont deux valeurs propres distinctes de f, alors $E_\lambda \cap E_\mu = \{0\}$.

Démonstration : Si $v \in E_\lambda \cap E_\mu$, alors $\lambda v = f(v) = \mu v$ donc $(\lambda - \mu)v = 0$ ce qui implique $v = 0$, puisque $\lambda - \mu \neq 0$. □

Mieux encore

Théorème 2.3.2 *Soit f un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$.*
Si $\lambda_1, \lambda_2, \ \dots \ , \lambda_p$ sont p valeurs propres distinctes de f et $\mathcal{B}_i$ est une base de l'espace propre E_{λ_i}, pour tout $1 \leq i \leq p$, alors la suite

$$\mathcal{L} = (\ \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ \dots \ , \mathcal{B}_p\ )$$

*construite en mettant bout à bout les suites libres $\mathcal{B}_i$, est une suite libre (on dit alors que la famille d'espaces propres E_{λ_i}, $1 \leq i \leq p$, est en **somme directe**).*
Par conséquent, la suite $\mathcal{L}$ est une base de $E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} + \ \cdots \ + E_{\lambda_p}$ et

$$\dim\left(E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} + \ \cdots \ + E_{\lambda_p}\right) = \dim\left(E_{\lambda_1}\right) + \dim\left(E_{\lambda_2}\right) + \ \cdots \ + \dim\left(E_{\lambda_p}\right)$$

Le résultat qui suit est immédiat à partir du Théorème et nous donne une condition nécessaire et suffisante pour la diagonalisation :

Corollaire 2.3.3 *Un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de tous ses espaces propres est égale à n*

Pour établir le Th. nous avons besoin du lemme suivant

Lemme 2.3.4 *Dans le notations du Théorème, soit $v_i \in E_{\lambda_i}$ pour tout $1 \leq i \leq p$.*
Si $v_1 + v_2 + \ \cdots \ + v_p = 0$, alors $v_1 = v_2 = \ \cdots \ = 0$.

***Démonstration du Théorème** :*
Considérons une combinaison linéaire de vecteurs de $(\ \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ \dots \ , \mathcal{B}_p\ )$ égale à $\vec{0}$, elle s'écrira

$$\underbrace{(\text{c. l. de vecteurs de } \mathcal{B}_1)}_{v_1} + \underbrace{(\text{c. l. de vecteurs de } \mathcal{B}_2)}_{v_2} + \ \cdots \ + \underbrace{(\text{c. l. de vecteurs de } \mathcal{B}_p)}_{v_p} = 0$$

et d'après le Lemme, tous les v_i sont nuls : nous avons donc une combinaison linéaire de vecteurs de la famille libre $\mathcal{B}_i$ égale à 0, par conséquent ses coefficients sont nuls, et ceci pour tout $1 \leq i \leq p$.
*Finalement **tous** les coefficients de la combinaison linéaire de vecteurs de $(\ \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ \dots \ , \mathcal{B}_p\ )$ sont nuls et cette suite est libre.* □

***Démonstration du Lemme** : Elle se fait par récurrence sur p. Nous montrerons le cas $p = 2$ (initialisation), puis le cas $p = 3$ à partir du précédent (l'argument illustre l'hérédité sans* *alourdir les notations).*

Le cas $p = 2$:
Soient $v_1 \in E_{\lambda_1}$ et $v_2 \in E_{\lambda_2}$ tels que $v_1 + v_2 = 0$.
Alors $v_1 = -v_2 \in E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0\}$ (d'après la Proposition 2.3.1).

Montrons la propriété pour $p = 3$:
Soient $v_i \in E_{\lambda_i}$ pour $i = 1, 2, 3$, vérifiant $v_1 + v_2 + v_3 = 0$.
On a alors $f(v_1 + v_2 + v_3) = 0$, qui s'écrit

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$$

et comme $v_3 = -v_2 - v_1$ on obtient

$$(\lambda_1 - \lambda_3) v_1 + (\lambda_2 - \lambda_3) v_2 = 0$$

Le cas $p = 2$ montre alors que $(\lambda_1 - \lambda_3) v_1 = 0$ et $(\lambda_2 - \lambda_3) v_2 = 0$.
Puisque $\lambda_1 - \lambda_3 \neq 0$ et $\lambda_2 - \lambda_3 \neq 0$ il vient $v_1 = v_2 = 0$ (et $v_3 = 0$ aussi). □

2.4 Le polynôme caractéristique

2.4.1 Comment trouver les valeurs propres d'un endomorphisme ?

> **Proposition 2.4.1** *Soit f un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$.*
> *Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{K}^n$ et $M = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B})$.*
> *Les valeurs propres de f sont les racines dans $\mathbb{K}$ du polynôme $P \in \mathbb{K}[x]$ défini par*
>
> $$P(x) = \det(xI - M)$$
>
> *où $x \in \mathbb{K}$ est une indéterminée et I est la matrice identité d'ordre n.*

Démonstration :
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $v \in \mathbb{K}^n$.
Soit enfin X le vecteur colonne des coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}$. On a

$$f(v) = \lambda v \iff \lambda v - f(v) = 0 \iff (\lambda I - M) \cdot X = 0$$

Rappelons que $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de f si et seulement si il existe $v \neq 0$ tel que $f(v) = \lambda v$, ce qui équivaut à affirmer que le système d'équations linéaires

$$(\lambda I - M) \cdot X = 0 \qquad (S)$$

admet une solution $X \neq 0$: autrement dit, (S) n'est pas un système de Cramer, ce qui est caractérisé par la condition

$$\det(\lambda I - M) = 0$$

(voir Sect. 1.5.3). □

Remarques

1. Par exemple, si $M = (a_{ij})$ est une matrice 3×3 :

$$P(x) = \det(xI - M) = \begin{vmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & x - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & x - a_{33} \end{vmatrix}$$

2. Les systèmes $(\lambda I - M) \cdot X = 0$ et $(M - \lambda I) \cdot X = 0$ sont équivalents.

Si λ est valeur propre, ces systèmes donnent les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ des vecteurs de E_λ, l'espace propre associé à λ. Par ailleurs

$$\det(M - \lambda I) = \det(\,-(\lambda I - M)\,) = (-1)^n \det(\lambda I - M)$$

Pour des raisons pratiques, nous utiliserons le polynôme $P(x) = \det(xI - M)$, plutôt que $\det(M - xI)$: on verra que P est de degré n et $P(x) = x^n + \cdots$, donc $\det(M - xI) = (-1)^n x^n + \cdots$, ce qui est moins agréable à manipuler.

2.4.2 Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme

Soit $x \in \mathbb{K}$ fixé, alors $x \cdot id - f$ est un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$.
Si $M = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B})$, alors $\mathrm{Mat}(\,x \cdot id - f,\ \mathcal{B}\,) = x \cdot I - M$.

On sait que le déterminant de la matrice d'un endomorphisme dans une base ne dépend pas de la base choisie (voir Sect. 1.5.1), en particulier si $\mathcal{B}'$ est une autre base de $\mathbb{K}^n$ on a

$$\det\big(\,\mathrm{Mat}(\,x \cdot id - f,\ \mathcal{B}'\,)\,\big) = \det(\,\mathrm{Mat}(\,x \cdot id - f,\ \mathcal{B}\,)\,) = \det(x \cdot I - M)$$

On parle alors du déterminant de l'endomorphisme $x \cdot id - f$, qu'on note $\det(x \cdot id - f)$: il s'agit du polynôme de la Proposition 2.4.1.

Récapitulons :

> *Soit f un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ et $x \in \mathbb{K}$ une indéterminée.*
> *Le déterminant de l'endomorphisme $x \cdot id - f$ s'appelle le* ***polynôme caractéristique*** *de f, on le note P_f :*
> $$P_f(x) = \det(x \cdot id - f)$$
> *Si $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{K}^n$ et $M = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B})$, alors*
> $$P_f(x) = \det(x \cdot I - M)$$
> *Les valeurs propres de f sont les racines, dans $\mathbb{K}$, de son polynôme caractéristique P_f*

Voici un cas où le calcul des valeurs propres est très simple

> *Si $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}) = T$ est triangulaire, alors les valeurs propres de f sont les éléments de la diagonale de T*

En effet, $xI - T$ est aussi une matrice triangulaire et son déterminant est le produit des éléments de la diagonale. Si $T = (t_{ij})$, on a

$$P_f(x) = \det(xI - T) = (x - t_{11})(x - t_{22})\ \cdots\ (x - t_{nn})$$

et les racines du polynôme sont les t_{ii}.

2.4.3 Le polynôme caractéristique d'une matrice.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $f_A : X \to A \cdot X$ l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ associé.
Le **polynôme caractéristique de la matrice** A , qu'on notera P_A est, par définition,

$$P_A(x) = \det(x \cdot I - A)$$

Il s'agit donc du polynôme caractéristique de l'endomorphisme f_A (ce qui est cohérent avec les abus de langage précédents : $\mathrm{Im}(A)$, $\ker(A)$, valeur propre, vecteur propre, espace propre de A... désignent les notions correspondantes pour f_A). Par conséquent

> *Les valeurs propres de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont les racines, dans $\mathbb{K}$, de son polynôme caractéristique P_A*

Remarquons que

> *Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique*

En effet : si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ semblables, alors les matrices $x \cdot I - A$ et $x \cdot I - B$ le sont aussi ($B = P^{-1}AP$ implique $x \cdot I - B = P^{-1}(x \cdot I - A)P$) et par conséquent elles ont le même déterminant (voir Sect 1.5.1).

2.4.4 Trace, déterminant et valeurs propres.

Rappelons que si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, sa **trace** est la somme des éléments de la diagonale

$$\mathrm{trace}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

La trace et le déterminant d'une matrice apparaissent dans l'écriture de son polynôme caractéristique :

Si $A = (a_{ij})$ est une matrice 2×2, alors un simple calcul montre que

$$\begin{aligned} P_A(x) = \det(xI - A) &= \begin{vmatrix} x - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & x - a_{22} \end{vmatrix} \\ &= x^2 - (a_{11} + a_{22})x + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = x^2 - \mathrm{trace}(A)x + \det(A) \end{aligned}$$

Si $A = (a_{ij})$ est une matrice 3×3, on obtient

$$\begin{aligned} P_A(x) = \det(xI - A) &= \begin{vmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & x - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & x - a_{33} \end{vmatrix} \\ &= x^3 - \mathrm{trace}(A)x^2 + \text{ Terme de degré 1 } + (-1)^3 \det(A) \end{aligned}$$

Voici le résultat général :

> *Soit f un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{K}^n$ et $M = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}) = (a_{ij})$, on peut montrer que*
>
> $$\begin{aligned} P_f(x) &= \det(xI - M) = P_M(x) \\ &= x^n - \ \mathrm{trace}(M)x^{n-1} + \ \text{(termes de degré } n-2, \ \dots 1\text{)} \ + \ (-1)^n \det(M) \end{aligned}$$
>
> *Comme P_f ne dépend pas du choix de $\mathcal{B}$, tous ses coefficients sont intrinsèques à f (on le savait déjà pour le déterminant).*
>
> *On définit ainsi la **trace de l'endomorphisme** f par*
>
> $$\mathrm{trace}(f) = \mathrm{trace}(M) = a_{11} + a_{22} + \ \cdots \ + a_{nn}$$
>
> *Si M est semblable à M', on sait que $P_M = P_{M'}$ et en particulier*
>
> $$\mathrm{trace}(M) = \mathrm{trace}(M')$$

Par conséquent

> *Supposons qu'il existe une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{K}^n$ telle que $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}')$ est triangulaire (supérieure, par exemple) :*
>
> $$\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}') = T = \begin{pmatrix} t_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & t_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & t_{nn} \end{pmatrix}$$
>
> *(c'est en particulier le cas si f est diagonalisable !)*
> *Les matrices $M = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}) = (a_{ij})$ et T sont semblables et $\mathrm{trace}(M) = \mathrm{trace}(T)$:*
>
> $$a_{11} + a_{22} + \ \cdots \ + a_{nn} = t_{11} + t_{22} + \ \cdots \ + t_{nn}$$
>
> *De même*
>
> $$\det(f) = \det(M) = \det(T) = t_{11} \cdot t_{22} \ \cdots \ t_{nn}$$

Nous sommes en mesure maintenant d'attaquer les premiers

2.5 Exemples de diagonalisation

Exemple 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On cherche à diagonaliser A sur $\mathbb{R}$.

Soit $f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \ \rightarrow \ A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ associé à la matrice A.

• **Calcul du polynôme caractéristique. Valeurs propres.**

$$P_f(x) = P_A(x) = \det(xI - A) = \begin{vmatrix} x-1 & 0 \\ -2 & x+1 \end{vmatrix} = (x-1)(x+1)$$

Les valeurs propres de f sont les racines, dans $\mathbb{R}$, de P_f : 1 et -1.

• **Détermination des espaces propres.**

Soit E_1 l'espace propre correspondant à la valeur propre 1 :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in E_1 \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (A-I) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

et $E_1 = \mathrm{Vect}((1,1))$.

Soit E_{-1} l'espace propre associé à la valeur propre -1 :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in E_{-1} \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (A+I) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1 = 0$$

et $E_{-1} = \mathrm{Vect}((0,1))$.

• **Diagonalisation de f et de A.**

Comme $\dim(E_1) + \dim(E_{-1}) = 2$, la Corollaire 2.3.3 nous dit que f est diagonalisable : $\mathcal{B} = (\ (1,1),\ (0,1)\ )$ est une base de $\mathbb{R}^2$ formée de vecteurs propres de f et

$$\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = D$$

On remarque que f est une symétrie (voir Sect. 2.2).

La matrice de passage de $\mathcal{B}_{can}$ à $\mathcal{B}$ est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et on a $D = P^{-1}AP$.

Exemple 2. Soit maintenant $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

• **On cherche à diagonaliser A sur** $\mathbb{R}$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ associé.

Le polynôme caractéristique

$$P_A(x) = \det(xI - A) = \begin{vmatrix} x & 1 \\ -1 & x \end{vmatrix} = x^2 + 1$$

n'a aucune racine réelle : f **n'a pas de valeurs propres et A n'est pas diagonalisable sur** $\mathbb{R}$. Ceci n'est pas surprenant car

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

avec $\theta = \frac{\pi}{2}$: f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.

• On peut voir A comme matrice à coefficients complexes et chercher à diagonaliser A sur $\mathbb{C}$.

Soit $g : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ associé. Puisque

$$P_A(x) = x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$$

les valeurs propres de g sont i et $-i$.

Remarque. Si P est un polynôme à coefficients réels et $a + ib$ est racine de P, alors son conjugué $a - ib$ l'est aussi.

Déterminons les espaces propres :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in E_i \Leftrightarrow (A - iI) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_2 = -ix_1$$

et $E_i = \mathrm{Vect}((1, -i))$.

E_{-i} se détermine de la même manière, mais on peut éviter le calcul :

> *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{C}$ et $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, alors*
>
> $$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow A \cdot \begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \\ \vdots \\ \overline{x_n} \end{pmatrix} = \overline{\lambda} \begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \\ \vdots \\ \overline{x_n} \end{pmatrix}$$
>
> *Ainsi, si g_A est l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ associé à A, et λ est une valeur propre non réelle de g, alors*
>
> 1. *$\overline{\lambda}$ est aussi valeur propre de g_A.*
> 2. *Si $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ est une base de E_λ, alors $(\overline{v_1}, \overline{v_2}, \ldots, \overline{v_k})$ est base de $E_{\overline{\lambda}}$ (ici $\overline{v_i}$ note le vecteur obtenu à partir de v_i par conjugaison composante à composante).*

Dans notre cas $E_{-i} = \mathrm{Vect}((1, i))$ car $E_i = \mathrm{Vect}((1, -i))$ et $\overline{(1, -i)} = (\overline{1}, \overline{-i}) = (1, i)$.

Comme $\dim(E_i) + \dim(E_{-i}) = 2$, l'endomorphisme g est diagonalisable : $\mathcal{B} = (\ (1, -i),\ (1, i)\ )$ est une base de $\mathbb{C}^2$ formée de vecteurs propres de g et

$$\mathrm{Mat}(g, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = D$$

Ainsi, A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$: $D = P^{-1}AP$ avec $P = P_{\mathcal{B}_{can} \to \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$.

Exemple 3. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ associé. On a

$$P_A(x) = \det(xI - A) = \begin{vmatrix} x & -1 \\ 0 & x \end{vmatrix} = x^2$$

L'unique valeur propre de f est 0, l'espace propre associé est $E_0 = \ker(f)$ et

$$\dim(\ker(f)) = 2 - \mathrm{Im}(f) = 2 - \mathrm{rang}(A) = 2 - 1 = 1 < 2$$

et A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$ (le même argument montre qu'elle n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{C}$).

On peut remarquer aussi que si A était diagonalisable, elle serait semblable à une matrice diagonale... nulle (puisque 0 est sa seule valeur propre) et donc $A = 0$, absurde ! !

2.6 Multiplicité d'une valeur propre et dimension de son espace propre

Définition 2.6.1 Soit $P \in \mathbb{K}[x]$ et λ une racine de P.
La **multiplicité** de λ est le plus grand $m \in \mathbb{N}$ tel que $(x-\lambda)^m$ divise P. Autrement dit

$$P(x) = (x-\lambda)^m Q(x), \text{ où } Q \text{ est un polynôme tel que } Q(\lambda) \neq 0$$

Par exemple si $P(x) = 5(x-1)(x+2)^3$, alors 1 est racine de P de multiplicité 1 et -2 est racine de multiplicité 3.

Définition 2.6.2 Soit f un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ et λ une valeur propre de f.
La **multiplicité de la valeur propre** λ (qu'on notera $m(\lambda)$) est sa multiplicité comme racine de P_f, le polynôme caractéristique de f.

Voici le lien entre la multiplicité d'une valeur propre et la dimension de son espace propre

Proposition 2.6.3 *Soit f un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$, λ une valeur propre de f de multiplicité $m(\lambda)$ et E_λ son espace propre. Alors*

$$\dim(E_\lambda) \leq m(\lambda)$$

Démonstration : Si $m(\lambda) = n$ c'est évident car $E_\lambda \subset \mathbb{K}^n$.
Supposons que $m(\lambda) < n$ et raisonnons par l'absurde :
Si $\dim(E_\lambda) > m(\lambda)$, il existe dans E_λ une suite libre de $m(\lambda)+1$ vecteurs : $(v_1, v_2, \ldots, v_{m(\lambda)+1})$.
Complétons cette suite en une base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_{m(\lambda)+1}, w_{m(\lambda)+2}, \ldots, w_n)$ de $\mathbb{K}^n$.

Comme $f(v_i) = \lambda v_i$, on a

$$A = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(v_1) & f(v_2) & \cdots & f(v_{m(\lambda)+1}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda & & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix} \end{array}$$

et $P_f(x) = \det(xI - A) = (x-\lambda)^{m(\lambda)+1} Q(x)$, en développant successivement $m(\lambda)+1$ fois par rapport à la première colonne.
La multiplicité de λ, $m(\lambda)$, serait alors supérieur ou égale à $m(\lambda)+1$: absurde ! □

Corollaire 2.6.4 *Si λ est une valeur propre de multiplicité $m(\lambda) = 1$, alors $\dim(E_\lambda) = 1$*

Démonstration : $1 \leq \dim(E_\lambda) \leq m(\lambda)$ □

2.7 Conditions nécessaires pour la diagonalisation

Définition 2.7.1 Soit P un polynôme à coefficients réels ou complexes.
On dit que P est **scindé** sur $\mathbb{R}$ (resp. sur $\mathbb{C}$) s'il s'écrit comme un produit de polynômes de degré 1 à coefficients réels (resp. complexes)

Exemples

Le polynôme $P(x) = 3(x-1)^5(x+3)^2(x-7)$ est scindé sur $\mathbb{R}$ (et donc sur $\mathbb{C}$).

Le polynôme $Q(x) = X^2 + 1 = (x-i)(x+i)$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ mais il est scindé sur $\mathbb{C}$.

Rappelons le

Théorème 2.7.2 ***(D'Alembert-Gauss)***
Soit $P \in \mathbb{C}[x]$ un polynôme de degré $n \geq 1$ et α le coefficient de x^n dans P, alors il existe $k \geq 1$ nombres complexes distincts $r_1, r_2, \ldots, r_k$ tels que

$$P(x) = \alpha(x-r_1)^{m_1}(x-r_2)^{m_2} \cdots (x-r_k)^{m_k}$$

avec $m_i \in \mathbb{N}^*$ pour tout $1 \leq i \leq k$.

Remarque. L'entier m_i est la multiplicité de la racine r_i et $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$

Par conséquent

1. *Tout polynôme à coefficients complexes est scindé sur $\mathbb{C}$.*
2. *Un polynôme à coefficients réels est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si toutes ses racines sont réelles.*
3. *Un polynôme à coefficients réels de degré n est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si la somme des multiplicités de ses racines réelles vaut n.*
   (En général elle sera inférieure ou égale à n).

Les deux propositions suivantes donnent des condition nécessaires pour la diagonalisation

Proposition 2.7.3 *Soit f un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$.*
Si f est diagonalisable, alors son polynôme caractéristique P_f est scindé sur $\mathbb{K}$.

Démonstration : Par hypothèse, il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^n$ telle que

$$\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}) = D = (d_{ij})$$

est diagonale. La matrice $xI - D$ est diagonale aussi et les éléments de la diagonale sont $x - d_{ii}$, par conséquent

$$P_f(x) = \det(xI - D) = (x - d_{11})(x - d_{22}) \ \cdots \ (x - d_{nn})$$

est bien scindé sur $\mathbb{K}$. □

Proposition 2.7.4 *Soit f un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$.*
Si f est diagonalisable, alors

$$\dim(E_\lambda) = m(\lambda)$$

pour toute valeur propre λ de f.

Démonstration : Comme f est diagonalisable, la somme des dimensions de ses espaces propres est n (Corollaire 2.3.3). D'autre part on sait que $\dim(E_\lambda) \leq m(\lambda)$, donc

$$n = \sum_\lambda \dim(E_\lambda) \leq \sum_\lambda m(\lambda) \leq n$$

et l'égalité n'est possible que si $\dim(E_\lambda) = m(\lambda)$ pour toute valeur propre λ. □

2.8 Condition nécessaire et suffisante de diagonalisation

Théorème 2.8.1 *Soit f un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$.*
f est diagonalisable si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites

1. *P_f, le polynôme caractéristique de f, est scindé sur $\mathbb{K}$.*
2. *Pour toute valeur propre λ de f de multiplicité $m(\lambda)$ on a $\dim(E_\lambda) = m(\lambda)$*

Démonstration : On a vu que f diagonalisable implique 1) et 2).
Supposons maintenant 1) et 2) : D'après 1)

$$P_f(x) = (x-\lambda_1)^{m_1}(x-\lambda_2)^{m_2} \ \cdots \ (x-\lambda_k)^{m_k}$$

avec $m_i \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_i \in \mathbb{K}$ et $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$. Ainsi, les λ_i sont les valeurs propres de f et $m_i = m(\lambda_i)$, la multiplicité de λ_i. On a donc

$$n = m_1 + m_2 + \ \cdots \ + m_k = \dim(E_{\lambda_1}) + \dim(E_{\lambda_2}) + \ \cdots \ + \dim(E_{\lambda_k})$$

puisque, d'après 2), $m(\lambda_i) = \dim(E_{\lambda_i})$.
Comme la somme des espaces propres de f est n et f est diagonalisable (Corollaire 2.3.3). □

> **Corollaire 2.8.2** *Soit f un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$.*
> *Si son polynôme caractéristique P_f possède n racines* ***distinctes*** *dans $\mathbb{K}$, alors f est diagonalisable*

Démonstration :
Par hypothèse, $P_f(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2) \ \cdots \ (x-\lambda_n)$ avec $\lambda_i \in \mathbb{K}$ et $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$ donc P_f est scindé sur $\mathbb{K}$ (condition 1) du Th.

Les λ_i sont les valeurs propres de f, $m(\lambda_i) = 1$ d'où (Corollaire 2.6.4) $\dim(E_{\lambda_i}) = 1$ et nous avons la deuxième condition du Th : $\dim(E_{\lambda_i}) = m(\lambda_i)$. □

2.9 Pratique de la diagonalisation

Exemple 1. Soit la matrice à coefficients réels

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

La factorisation du polynôme caractéristique donne (exercice : on pourra commencer par $C_1 \ \to C_1 + C_2$...)

$$P_A(x) = \det(xI - A) = \begin{vmatrix} x-1 & -2 & -5 \\ -2 & x-1 & -5 \\ -1 & 1 & x-3 \end{vmatrix} = \ \cdots \ = (x-3)^2(x+1)$$

Remarquons que P_A est **scindé** sur $\mathbb{R}$.
Les valeurs propres de A sont -1 (de multiplicité 1) et 3 (de multiplicité 2).

On sait que $\dim(E_{-1}) = 1$ et que $1 \leq \dim(E_3) \leq 2$

La matrice A sera diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\dim(E_3) = 2$.

$$\dim(E_3) = \dim\ker(A - 3I) = 3 - \operatorname{rang}(A-3I) = 3 - \operatorname{rang}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1$$

et A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$ (ni sur $\mathbb{C}$: le procédé est identique).

Exemple 2. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

Pour décider si A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, on commence par factoriser le polynôme caractéristique. La matrice $xI - A$ est triangulaire et

$$P_A(x) = (x-2)(x-1)^2$$

Le polynôme P_A est scindé sur $\mathbb{R}$, les valeurs propres de A sont 2 (de multiplicité 1) et 1 (de multiplicité 2). La théorie générale nous dit que $\dim(E_2) = 1$ et $1 \leq \dim(E_1) \leq 2$.

La matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\dim(E_1) = 2$. On a

$$\dim(E_1) = \dim\ker(A - I) = 3 - \operatorname{rang}(A - I) = 3 - \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2$$

et A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Pour diagonaliser A, calculons des bases des espaces propres :

Soit $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ (qu'on verra comme vecteur colonne dans les manipulations matricielles).

$$X \in E_1 \Leftrightarrow (A - I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x + 3y + z = 0$$

et $E_1 = \operatorname{Vect}(\ (-3, 1, 0),\ (-1, 0, 1)\ )$. De même

$$X \in E_2 \Leftrightarrow (A - 2I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow y = 0 \text{ et } z = 0$$

donc $E_2 = \operatorname{Vect}(\ (1, 0, 0)\ )$.

On sait que les espaces propres sont toujours en somme directe : en mettant bout à bout des bases de E_1 et E_2 on obtient une famille libre (ici une base puisque $\dim(E_1) + \dim(E_2) = 3$).

Ainsi $\mathcal{B} = (\ (-3, 1, 0),\ (-1, 0, 1),\ (1, 0, 0))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ formé de vecteurs propres de A. Si f est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé à A,

$$\operatorname{Mat}(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D$$

Soit

$$P = P_{\mathcal{B}_{can} \to \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

on sait que $D = P^{-1}AP$ (pas la peine de vérifier !)

Récapitulons le procédé général :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il faut d'abord décider si la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$ (voir **I**) et dans ce cas la diagonaliser (voir **II**) :

I. La matrice A est - elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{C}$?

On commence par calculer et factoriser le polynôme caractéristique de A

$$P_A(x) = \det(xI - A)$$

1. **Si toutes les racines de P_A sont réelles :**

   1.1. On sait que pour les valeurs propres λ de multiplicité 1, $\dim(E_\lambda) = 1$.

   1.2. Si $m(\lambda) \geq 2$, calculer $\dim(E_\lambda) = n - \text{rang}(A - \lambda I)$.

   1.3. Si $\dim(E_\lambda) = m(\lambda)$, pour tous les valeurs propres, alors A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ (la diagonaliser en suivant **II**).
   Dans le cas contraire, A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$ ni sur $\mathbb{C}$.

2. **Si certaines racines de P_A sont non réelles :** A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
   On considère A comme matrice à coefficients complexes et on cherche à savoir si elle est diagonalisable sur $\mathbb{C}$:

   2.1. Maintenant, les valeurs propres de A sont **toutes** les racines (réelles ou non) de P_A.

   2.2. Comme précédemment, on sait que si $m(\lambda) = 1$, alors $\dim(E_\lambda) = 1$.
   On calcule $\dim(E_\lambda) = n - \text{rang}(A - \lambda I)$ pour les valeurs propres avec $m(\lambda) \geq 2$.

   2.3. Si $\dim(E_\lambda) = m(\lambda)$, pour tous les valeurs propres, alors A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ (suivre **II** pour la diagonaliser).
   Dans le cas contraire, A n'est pas diagonalisable $\mathbb{C}$.

II. On sait que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ si le lecteur vient de **1.3**, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ s'il continue à partir de **2.3**), **voici la marche à suivre pour la diagonaliser :**

i) On calcule une base de chaque espace propre : $X \in \mathbb{K}^n$ est un élément de E_λ si et seulement si $(A - \lambda I)X = 0$.

ii) On met ensemble les bases de tous les espaces propres : on obtient alors une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^n$ (il n'est pas nécessaire de vérifier que $\mathcal{B}$ est une base, c'est un résultat général : Th. 2.3.2).

iii) On construit P, la matrice de passage de $\mathcal{B}_{can}$ à $\mathcal{B}$.

iv) On sait que $P^{-1}AP = D$ est diagonale (pas la peine de vérifier !).
On termine en précisant explicitement la matrice D (attention à l'ordre des valeurs propres sur la diagonale : il dépend de l'ordre des vecteurs propres dans la base $\mathcal{B}$).

Remarque. Si A est une matrice $n \times n$ dont certains coefficients sont non réels, c'est-à-dire qu'elle est considérée d'emblée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on commence en **2.1**.

2.10 Premières applications de la diagonalisation

Nous utiliserons ultérieurement la diagonalisation pour résoudre un système linéaire d'équations différentielles. Voici maintenant d'autres applications :

2.10.1 Puissances d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable sur $\mathbb{K}$. Nous savons comment construire une matrice inversible P et une matrice diagonale D vérifiant $D = P^{-1}AP$. On a alors

$$A = PDP^{-1}$$

Remarquons que $A^2 = \left(PDP^{-1}\right)\left(PDP^{-1}\right) = PD^2P^{-1}$ (rappelons que le produit de matrices n'est pas commutatif, nous avons utilisé l'associativité). De même

$$A^3 = AA^2 = \left(PDP^{-1}\right)\left(PD^2P^{-1}\right) = PD^3P^{-1}$$

et on montre par récurrence que

$$A^k = PD^kP^{-1}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$. Si

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad D^k = \begin{pmatrix} d_{11}^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22}^k & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{nn}^k \end{pmatrix}$$

et A^k est facile à calculer.

Remarque. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, alors $P, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, mais $A^k = PD^kP^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2.10.2 Couple de suites définies par une relation de récurrence linéaire

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{K}$ donnés. Considérons les suites $(u_k)_{k\geq 0}$ et $(v_k)_{k\geq 0}$ dans $\mathbb{K}$ définies par la relation de récurrence

$$\begin{cases} u_{k+1} = a\, u_k + b\, v_k \\ v_{k+1} = c\, u_k + d\, v_k \end{cases}$$

pour tout $k \geq 0$, et u_0, v_0 donnés. Si

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{on peut écrire} \quad \begin{pmatrix} u_{k+1} \\ v_{k+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_{k-1} \\ v_{k-1} \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} u_{k-2} \\ v_{k-2} \end{pmatrix} = \cdots = A^k \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

Le calcul de A^k permet d'exprimer explicitement u_k et v_k en fonction de u_0, v_0 et k.
La classification des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (Prop. 2.10.2) va nous permettre de déterminer A^k, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Remarque. Supposons que $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Soit $\mathcal{B} = (\,(a_1, a_2), (b_1, b_2)\,)$ une base de $\mathbb{R}^2$ formée de vecteurs propres de A et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ les valeurs propres correspondants. Remarquons que

$$A\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} \Rightarrow A^k\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} = \alpha^k\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix} = \beta\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix} \Rightarrow A^k\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix} = \beta^k\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$$

En écrivant

$$(u_0, v_0) = \lambda(a_1, a_2) + \mu(b_1, b_2) \tag{$*$}$$

on obtient

$$\begin{pmatrix}u_k\\v_k\end{pmatrix} = A^k\begin{pmatrix}u_0\\v_0\end{pmatrix} = \lambda A^k\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} + \mu A^k\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix} = \lambda\alpha^k\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} + \mu\beta^k\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$$

En résumé, les couples (u_k, v_k) de suites réelles vérifiant la relation de récurrence

$$\begin{pmatrix}u_{k+1}\\v_{k+1}\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}u_k\\v_k\end{pmatrix} \quad \text{pour tout } k \geq 0$$

sont données par

$$\begin{pmatrix}u_k\\v_k\end{pmatrix} = \lambda\alpha^k\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} + \mu\beta^k\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix} \quad \text{pour tout } k \geq 0$$

pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (remarquer que, dans l'égalité $(*)$, u_0 et v_0 sont deux réels quelconques, donc λ et μ sont arbitraires aussi).

2.10.3 Suite définie par une relation de récurrence linéaire double

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ fixés, $b \neq 0$ et $(u_k)_{k\geq 0}$ la suite définie par la relation de récurrence linéaire double

$$u_k = au_{k-1} + bu_{k-2} \tag{R}$$

pour tout $k \geq 2$, et $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$ donnés.

On a $u_{k+1} = au_k + bu_{k-1}$ si $k \geq 1$, donc

$$\begin{pmatrix}u_k\\u_{k+1}\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}0 & 1\\b & a\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}u_{k-1}\\u_k\end{pmatrix} = A^2\begin{pmatrix}u_{k-2}\\u_{k-1}\end{pmatrix} = \cdots = A^k\begin{pmatrix}u_0\\u_1\end{pmatrix}$$

si $k \geq 0$. Pour étudier A^k commençons par calculer le polynôme caractéristique de A :

$$P_A(x) = \det(xI - A) = \begin{vmatrix}x & -1\\-b & x-a\end{vmatrix} = x^2 - ax - b$$

L'équation

$$x^2 - ax - b = 0 \tag{E}$$

s'appelle **équation caractéristique de la récurrence**. La proposition qui suit permet de calculer explicitement la suite (u_k) :

Proposition 2.10.1

1. *Si l'équation* (E) *possède deux racines réelles distinctes* x_1 *et* x_2*, alors les suites réelles* $(u_k)_{k\geq 0}$ *vérifiant la relation* (R) *sont*
$$u_k = \lambda x_1^k + \mu x_2^k \tag{1}$$
pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Pour $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$ *fixés, les coefficients* λ *et* μ *sont donc déterminés à partir des équations* (1) *:* $u_0 = \lambda + \mu$ *et* $u_1 = \lambda x_1 + \mu x_2$.
2. *Si* (E) *possède une racine réelle double* x_1*, les suites réelles vérifiant* (R) *sont*
$$u_k = \lambda x_1^k + \mu k x_1^k \tag{2}$$
pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
On détermine λ *et* μ *grâce aux équations* $u_0 = \lambda$ *et* $u_1 = (\lambda + \mu)x_1$.
3. *Si les racines de* (E) *ne sont pas réelles, elles sont complexes conjuguées et peuvent s'écrire sous la forme* $x_1 = \rho e^{i\theta}$ *et* $x_2 = \rho e^{-i\theta}$.
Les suites réelles vérifiant (R) *sont*
$$u_k = \gamma \rho^k \cos(k\theta) + \delta \rho^k \sin(k\theta) \tag{3}$$
Pour tous $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$.
Si u_0 *et* u_1 *sont donnés, on détermine* γ *et* δ *à partir des équations* (3) *pour* $k = 0$ *et* $k = 1$.
Remarque : La formule (1) *(avec* $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$*) donne dans ce cas toutes les suites complexes vérifiant* (R) *(et si* $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$ *on obtient les suites réelles, mais l'expression fait intervenir des nombres complexes).*

Démonstration :
1. *Les réels* x_1 *et* x_2 *sont les valeurs propres de* A*, qui est diagonalisable sur* $\mathbb{R}$.
Comme $x_1^2 = ax_1 + b$ *on a*
$$A\begin{pmatrix}1\\x_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\ b + ax_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\x_1^2\end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix}1\\x_1\end{pmatrix}$$
et $(1, x_1)$ *est vecteur propre de* A *pour la valeur propre* x_1*. On a le résultat analogue pour* x_2.
Par conséquent, si
$$P = \begin{pmatrix}1 & 1\\ x_1 & x_2\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix}x_1 & 0\\ 0 & x_2\end{pmatrix}$$
alors $A = PDP^{-1}$, $A^k = PD^kP^{-1}$ *et*
$$\begin{pmatrix}u_k\\u_{k+1}\end{pmatrix} = A^k\begin{pmatrix}u_0\\u_1\end{pmatrix} = PD^kP^{-1}\begin{pmatrix}u_0\\u_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ x_1 & x_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1^k & 0\\ 0 & x_2^k\end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix}u_0\\u_1\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}x_1^k & x_2^k\\ x_1^{k+1} & x_2^{k+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix} \quad (\text{où l'on a posé } \begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix}u_0\\u_1\end{pmatrix})$$
et la première composante de l'égalité donne la relation (1) *(remarquer que* $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ *sont arbitraires car* $P^{-1}(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$ *et* u_0, u_1 *sont deux réels quelconques).*

2. *Maintenant x_1 est la seule valeur propre de A. Comme dans le cas précédent $(1, x_1)$ est vecteur propre de A pour x_1. Puisque $x^2 - ax - b = (x - x_1)^2$, il vient que $a = 2x_1$ et $b = -x_1^2$:*

$$A\begin{pmatrix}0\\x_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\x_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\-x_1^2 & 2x_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\x_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\2x_1^2\end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix}1\\x_1\end{pmatrix} + x_1\begin{pmatrix}0\\x_1\end{pmatrix}$$

Le réel x_1 est non nul (car $b \neq 0$) et $\mathcal{B} = ((1, x_1), (0, x_1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Si f est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ associé à la matrice A, on a

$$\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix}x_1 & x_1\\0 & x_1\end{pmatrix} = T \text{ et si } P = \begin{pmatrix}1 & 0\\x_1 & x_1\end{pmatrix} \text{ alors } A = PTP^{-1} \text{ et } A^k = PT^kP^{-1}$$

On montre facilement par récurrence que $T^k = \begin{pmatrix}x_1^k & kx_1^k\\ & \\0 & x_1^k\end{pmatrix}$ *et finalement on obtient*

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}u_k\\u_{k+1}\end{pmatrix} = A^k\begin{pmatrix}u_0\\u_1\end{pmatrix} = PT^kP^{-1}\begin{pmatrix}u_0\\u_1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}x_1^k & kx_1^k\\ & \\x_1^{k+1} & (k+1)x_1^{k+1}\end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix}u_0\\u_1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}x_1^k & kx_1^k\\ & \\x_1^{k+1} & (k+1)x_1^{k+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda\\\mu\end{pmatrix} \quad \text{(où l'on a posé } \begin{pmatrix}\lambda\\\mu\end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix}u_0\\u_1\end{pmatrix}\text{)}\end{aligned}$$

et la première composante de l'égalité donne la relation (2). Comme précédemment, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ sont arbitraires car $(u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2$ le sont aussi et $P^{-1}(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$.

3. *La matrice A est diagonalisable sur C et nous pouvons adapter l'argument de la première partie (écrire $\mathbb{C}$ à la place de $\mathbb{R}$) pour montrer que les suites complexes vérifiant (R) sont celles de la forme*

$$u_k = \lambda x_1^k + \mu x_2^k = \lambda\rho^k e^{ik\theta} + \mu\rho^k e^{-ik\theta} = (\lambda + \mu)\rho^k\cos(k\theta) + i(\lambda - \mu)\rho^k\sin(k\theta)$$

pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Si l'on pose

$$\begin{pmatrix}\gamma\\\delta\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}1 & 1\\i & -i\end{pmatrix}}_{M}\begin{pmatrix}\lambda\\\mu\end{pmatrix}$$

on peut mettre les suites complexes vérifiant (R) sous la forme

$$u_k = \gamma\rho^k\cos(k\theta) + \delta\rho^k\sin(k\theta)$$

pour tous $\gamma, \delta \in \mathbb{C}$ (car la matrice M est inversible).
Si $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$, on obtient une suite réelle. Réciproquement, si la suite (u_k) est réelle, alors

$$u_0 = \gamma \quad \text{et} \quad u_1 = \gamma\rho\cos\theta + \delta\rho\sin\theta$$

et γ, δ sont réels. Nous avons établi (3). □

Voici le résultat dans le cas complexe (la démonstration est analogue) :

> *Soient $a, b \in \mathbb{C}$ fixés, $b \neq 0$.*
>
> 1. *Si l'équation caractéristique de la récurrence*
> $$x^2 - ax - b = 0 \qquad (E)$$
> *possède deux racines distinctes x_1 et x_2, alors les suites complexes $(u_k)_{k\geq 0}$ vérifiant la relation de récurrence linéaire double*
> $$u_k = au_{k-1} + bu_{k-2} \qquad (R)$$
> *sont*
> $$u_k = \lambda x_1^k + \mu x_2^k$$
> *pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.*
> 2. *Si l'équation (E) possède une racine double x_1, les suites complexes vérifiant (R) sont*
> $$u_k = \lambda x_1^k + \mu k x_1^k$$
> *pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.*

2.10.4 Une classification des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Nous utiliserons le résultat qui suit pour la résolution de systèmes différentielles linéaires dans $\mathbb{R}^2$:

> **Proposition 2.10.2** *Si A est une matrice 2×2 à coefficients réels, alors :*
>
> 1. *Ou bien A est semblable à une matrice diagonale de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.*
> 2. *Ou bien A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.*
> 3. *Ou bien A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $b \neq 0$.*

Démonstration : Le polynôme $P_A(x) = \det(xI - A)$ est à coefficients réels, par conséquent :

a) Ou bien P_A a deux racines réelles distinctes : $\lambda \neq \mu$.

b) Ou bien P_A a une racine réelle double λ.

c) Ou bien P_A a deux racines complexes conjuguées $a - bi$, $a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0)$.

• *Dans le **cas a)**, A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et elle est semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$*

• *Étudions le **cas b)** : Soit E_λ l'espace propre de λ.*

Si $\dim(E_\lambda) = 2$, alors $A = \lambda I$.

Si $\dim(E_\lambda) = 1$, alors A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$ (ni sur $\mathbb{C}$).

Soit $E_\lambda = \mathrm{Vect}(v_1)$, *et* $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ *une base de* $\mathbb{R}^2$.
Soit enfin f *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^2$ *associé à* A. *On aura*

$$\begin{cases} f(v_1) = \lambda v_1 \\ f(v_2) = \alpha v_1 + \beta v_2 \end{cases}, \quad \text{c'est à dire : } \; M = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

Remarquons que $\alpha \neq 0$ *car* A *n'est pas diagonalisable. D'autre part, on sait que*

$$P_A(x) = x^2 - \mathrm{trace}(A)x + \det(A)$$

Comme λ *est racine double,* $P_A(x) = (x-\lambda)^2 = x^2 - 2\lambda x + \lambda^2$ *et*

$$2\lambda = \mathrm{trace}(A) = \mathrm{trace}(M) = \lambda + \beta$$

(les matrices A *et* M *sont semblables : elles ont même trace). Ainsi* $\beta = \lambda$ *et* $f(v_2) = \alpha v_1 + \lambda v_2$.
Soit $v_2' = \dfrac{1}{\alpha} v_2$ *et considérons la base* $\mathcal{B}' = (v_1, v_2')$ *:*
On a maintenant $f(v_2') = \dfrac{1}{\alpha} f(v_2) = v_1 + \lambda \dfrac{1}{\alpha} v_2 = v_1 + \lambda v_2'$, *d'où*

$$\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

et A *est semblable à cette matrice.*

• *Traitons pour terminer le* **cas c)** *: Considérons la matrice* A *comme étant à coefficients complexes : par hypothèse, elle a deux valeurs propres distinctes* $a \pm ib$, *donc elle est diagonalisable sur* $\mathbb{C}$. *Soit* f *l'endomorphisme de* $\mathbb{C}^2$ *associé à* A *et* $\mathcal{B}_{can} = (\ (1,0),\ (0,1)\ )$ *la base canonique de* $\mathbb{C}^2$.

Soit

$$E_{a-ib} = \mathrm{Vect}(u) \text{ et écrivons } \; u = v_1 + iv_2 \; \text{ avec } \; v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$$

On sait (voir l'Exemple 2 de la Sect 2.5) qu'une base de E_{a+ib} *s'obtient en prenant le conjugué composante à composante de* $v_1 + iv_2$, *:*

$$E_{a+ib} = \mathrm{Vect}(\overline{u}) \; \text{ avec } \; \overline{u} = v_1 - iv_2$$

Comme $(\ u,\ \overline{u}\ )$ *est une base de* $\mathbb{C}^2$ *et*

$$v_1 = \frac{1}{2}(\ u + \overline{u}\ ), \quad v_2 = \frac{1}{2i}(\ u - \overline{u}\ ) \tag{$*$}$$

alors $\mathcal{B} = (\ v_1,\ v_2\ )$ *est aussi une base de* $\mathbb{C}^2$, *donc de* $\mathbb{R}^2$ $(v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2)$.
A partir de $f(u) = (a-ib)u$, $f(\overline{u}) = (a+ib)\overline{u}$ *et grâce à* $(*)$ *on montre facilement que*

$$\begin{cases} f(v_1) = av_1 + bv_2 \\ f(v_2) = -bv_1 + av_2 \end{cases}, \quad \text{c'est à dire : } \; M = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Si $P = P_{\mathcal{B}_{can} \to \mathcal{B}}$, *on a* $M = P^{-1}AP$.
Remarquons que, bien que f *est un endomorphisme de* $\mathbb{C}^2$, *la matrice* P *est réelle (car les vecteurs de* $\mathcal{B}_{can}$ *et* $\mathcal{B}$ *sont dans* $\mathbb{R}^2$ *) :* A *et* M *sont semblables en tant que matrices de* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
□

Remarque. La proposition nous permet de calculer les puissances de $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. En effet :

1. On sait calculer les puissances d'une matrice diagonale.
2. D'autre part, on montre facilement par récurrence que
$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^k \end{pmatrix}$$
3. Enfin, si $a + ib = \rho e^{i\theta}$, alors on peut utiliser un argument géométrique car
$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \rho \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{\text{rotation d'angle } \theta} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^k = \rho^k \underbrace{\begin{pmatrix} \cos k\theta & -\sin k\theta \\ \sin k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix}}_{\text{rotation d'angle } k\theta}$$

La proposition nous dit que $A = PMP^{-1}$ (la matrice M étant de l'un des trois types décrits), donc $A^k = PM^kP^{-1}$.

Remarquons que si A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $b \neq 0$, alors ses valeurs propres sont $a \pm ib$ (et réciproquement : voir la démonstration de la proposition). Dans ce cas, A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$: on peut calculer ses puissances comme dans la Sect. 2.10.1. et s'affranchir de l'argument géométrique utilisé en 3.

Table des matières

1 Déterminants **1**

1.1 Introduction. Notations 1

1.2 Définition. Développement selon une ligne ou une colonne 1

1.2.1 Déterminant d'une matrice 2×2 1

1.2.2 Déterminant d'une matrice 3×3 2

1.2.3 Déterminant d'une matrice $n \times n$ 3

1.3 Propriétés fondamentales du déterminant 5

1.4 Méthode pratique de calcul d'un déterminant 7

1.5 Déterminant et rang 8

1.5.1 Matrices semblables. Déterminant d'un endomorphisme 9

1.5.2 Équation cartésienne d'un hyperplan 10

1.5.3 Systèmes de Cramer 10

1.5.4 Rang d'une matrice $m \times n$ 11

1.6 Déterminant, aire et volume 12

1.6.1 Le produit vectoriel 12

1.6.2 Déterminant et aire 13

1.6.3 Déterminant et volume 14

2 Diagonalisation **17**

2.1 Endomorphisme diagonalisable. Matrice diagonalisable 17

2.2 Vecteur propre. Valeur propre. Espace propre 18

2.2.1 Projections, symétries 20

2.3 Les espaces propres sont en somme directe 22

2.4 Le polynôme caractéristique 23

2.4.1 Comment trouver les valeurs propres d'un endomorphisme ? 23
2.4.2 Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme 24
2.4.3 Le polynôme caractéristique d'une matrice. 25
2.4.4 Trace, déterminant et valeurs propres. 25
2.5 Exemples de diagonalisation 26
2.6 Multiplicité d'une valeur propre et dimension de son espace propre 29
2.7 Conditions nécessaires pour la diagonalisation 30
2.8 Condition nécessaire et suffisante de diagonalisation 31
2.9 Pratique de la diagonalisation 32
2.10 Premières applications de la diagonalisation 35
2.10.1 Puissances d'une matrice 35
2.10.2 Couple de suites définies par une relation de récurrence linéaire 35
2.10.3 Suite définie par une relation de récurrence linéaire double 36
2.10.4 Une classification des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ 39