Université Paris – Saclay
Parcours élève ingénieur Polytech
Orsay 2020 – 2021

Mathématiques S3

Notes de Cours

Chapitre 3 : Formes quadratiques
Chapitre 4 : Fonctions de plusieurs variables
Chapitre 5 : Équations différentielles d'ordre 1

José Montesinos
jose.montesinos@universite-paris-saclay.fr

Chapitre 3

Formes quadratiques

3.1 Formes linéaires

Définition 3.1.1 Une forme linéaire l sur $\mathbb{R}^n$ est une application linéaire $l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, c'est-à-dire une application définie pour tout $u = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ par

$$l(u) = l(x_1, \ldots, x_n) = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$$

où les a_i sont des réels fixés.
Si $v = (a_1, \ldots, a_n)$, on a $l(u) = \langle v, u \rangle$, pour tout $u \in \mathbb{R}^n$.

Définition 3.1.2 Soient $l_1, \ldots, l_k$ des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$, on dit qu'elles sont linéairement indépendantes (ou encore que la suite $(l_1, \ldots, l_k)$ est libre) si la relation

$$\lambda_1 l_1 + \cdots + \lambda_k l_k = 0$$

(ici les λ_i sont réels et 0 est la forme linéaire nulle) implique

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$$

Autrement dit, aucune l_i ne peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres.

On a

> *Si $l_i(u) = \langle v_i, u \rangle$ pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, alors :*
> *La suite de formes linéaires $(l_1, \ldots, l_k)$ est libre si et seulement si la suite $(v_1, \ldots, v_k)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est libre.*

En effet, l'égalité $\lambda_1 l_1 + \cdots + \lambda_k l_k = 0$ signifie que $\lambda_1 l_1(u) + \cdots + \lambda_k l_k(u) = 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, ou encore

$$0 = \lambda_1 \langle v_1, u \rangle + \cdots + \lambda_k \langle v_k, u \rangle = \langle \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k, u \rangle$$

pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, ce qui équivaut à $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k = 0$.

3.2 Formes quadratiques

Définition 3.2.1 Une forme quadratique Q sur $\mathbb{R}^n$ est une application $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de la forme

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} x_i x_j$$

où les a_{ij} sont des réels fixés.

Ainsi, une forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ s'écrira

$$Q(x, y) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{12}xy$$

pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Une forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ est une application de la forme

$$Q(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{12}xy + a_{13}xz + a_{23}yz$$

pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Remarquons que si Q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ alors

$$Q(\lambda u) = \lambda^2 Q(u)$$

pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{R}^n$.

Définition 3.2.2 On dit que la forme quadratique $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est

1. Positive si $Q(u) \geq 0$, pour tout $u \in \mathbb{R}^n$.
2. Négative si $Q(u) \leq 0$, pour tout $u \in \mathbb{R}^n$.
3. Définie positive si $Q(u) > 0$, pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, $u \neq 0$.
4. Définie négative si $Q(u) < 0$, pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, $u \neq 0$.

Dans le cadre de la recherche d'extrema locaux pour les fonctions de plusieurs variables, nous aurons besoin d'informations sur le signe d'une forme quadratique Q : est-elle définie positive ? définie négative ? peut-on trouver $u, u' \in \mathbb{R}^n$ tels que $Q(u) > 0$ et $Q(u') < 0$? La méthode de Gauss va nous permettre de répondre à ces questions.

3.3 Réduction d'une forme quadratique : la méthode de Gauss

Il s'agit d'une technique pour écrire une forme quadratique Q sur $\mathbb{R}^n$ comme somme de carrés de formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$, $l_1, \ldots, l_k$ linéairement indépendantes :

$$Q(u) = \lambda_1 (l_1(u))^2 + \cdots + \lambda_k (l_k(u))^2$$

pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, où $\lambda_i \in \mathbb{R}$. On dira alors que Q est **réduite**.

Illustrons la méthode de Gauss et ses conséquences avec trois exemples

Exemple 1. Soit $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forme quadratique

$$Q(x, y, z) = 4x^2 - 2y^2 - 19z^2 + 4xy - 4xz - 14yz$$

• Traitons la variable x (elle apparaît au carré) :

On prend tous les termes contenant du x, à savoir

$$4x^2 + 4xy - 4xz = 4x^2 + 4x(y - z)$$

écrivons cette expression comme le début d'un carré

$$= (2x)^2 + 2(2x)(y - z)$$

et complétons le carré

$$\begin{aligned} &= (2x + (y - z))^2 - (y - z)^2 \\ &= (2x + y - z)^2 - y^2 - z^2 + 2yz \end{aligned}$$

En reportant dans Q on obtient

$$\begin{aligned} Q(x, y, z) &= \Big((2x + y - z)^2 - y^2 - z^2 + 2yz\Big) - 2y^2 - 19z^2 - 14yz \\ &= (2x + y - z)^2 - 3y^2 - 20z^2 - 12yz \end{aligned}$$

• Traitons la variable y (elle apparaît au carré) :

On considère $-3y^2 - 12yz$ et on applique la même méthode

$$\begin{aligned} -3y^2 - 12yz &= -3(y^2 + 4yz) \\ &= -3\left(y^2 + 2(y)(2z)\right) \\ &= -3\left((y + 2z)^2 - (2z)^2\right) \\ &= -3(y + 2z)^2 + 12z^2 \end{aligned}$$

En reportant dans la forme quadratique, nous obtenons

$$\begin{aligned} Q(x, y, z) &= (2x + y - z)^2 - 3(y + 2z)^2 + 12z^2 - 20z^2 \\ &= (2x + y - z)^2 - 3(y + 2z)^2 - 8z^2 \end{aligned}$$

• Nous avons réduit la forme quadratique Q :

En effet, soient les formes linéaires sur $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} l_1(x, y, z) &= 2x + y - z \\ l_2(x, y, z) &= y + 2z \\ l_3(x, y, z) &= z \end{aligned}$$

Elles sont linéairement indépendantes car $l_i(u) = \langle v_i, u\rangle$, pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, avec $v_1 = (2,1,-1)$, $v_2 = (0,1,2)$ et $v_3 = (0,0,1)$ et la suite (v_1, v_2, v_3) libre. On a

$$Q(u) = (l_1(u))^2 - 3\,(l_2(u))^2 - 8\,(l_3(u))^2 \qquad (*)$$

pour tout $u \in \mathbb{R}^3$.

• Expression de Q dans une nouvelle base :

Considérons le changement de coordonnées

$$\begin{cases} x' = 2x + y - z \\ y' = y + 2z \\ z' = z \end{cases}$$

Si $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et comme M est inversible (rang 3) il s'agit d'une matrice de passage : il existe une base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ telle que M est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base canonique $\mathcal{B}_{can} = (e_1, e_2, e_3)$: $M = \mathcal{P}_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}_{can}}$.

Un calcul élémentaire montre que

$$M^{-1} = \mathcal{P}_{\mathcal{B}_{can} \to \mathcal{B}'} = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e'_1 & e'_2 & e'_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Dans la nouvelle base $\mathcal{B}'$, la forme quadratique Q s'écrit

$$Q(u) = (x')^2 - 3(y')^2 - 8(z')^2 \qquad (**)$$

si (x', y', z') sont les coordonnées de u dans $\mathcal{B}'$.

• Le signe de Q :

Grâce à l'expression $(**)$ on voit facilement que

(i) Il existe $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $Q(u) > 0$ (faire $y' = z' = 0$ et $x' \neq 0$).

(ii) Il existe $u' \in \mathbb{R}^3$ tel que $Q(u) < 0$ (prendre par exemple $x' = 0$ et $y' \neq 0$).

Il n'est pas nécessaire de calculer explicitement $\mathcal{B}'$ pour obtenir ces informations sur le signe de Q.

• Les invariants : **rang** et **signature** de Q.

La forme réduite $(*)$ de Q n'est pas unique (on aurait pu traiter d'abord la variable y ou z ... le résultat final change) mais on peut montrer qu'il y a des invariants :

— Le nombre r de formes linéaires l_i qui apparaissent dans la forme réduite de Q :
r s'appelle le **rang** de Q.
En général $r \leq n$. Dans notre exemple $r = n = 3$.

— Le nombre σ de coefficients positifs dans la somme de carrés des l_i et le nombre τ de coefficients négatifs.
Le couple (σ, τ) s'appelle la **signature** de Q. On a $\sigma + \tau = r$.
La signature de la forme quadratique de notre exemple est $(1, 2)$.

Exemple 2.

Soit $Q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ la forme quadratique

$$Q(x, y, z, t) = xy + xz + xt - yz + yt + 2zt$$

Ici il n'y a aucun carré et le procédé de l'Exemple 1 ne peut pas marcher.

• On choisit un terme « rectangle », par exemple xy et on groupe tous les termes contenant x ou y :

$$xy + xz + xt - yz + yt = xy + x(z + t) + y(-z + t)$$

Écrivons cette expression comme le début d'un produit

$$(x + \text{Termes sans } x \text{ ni } y) \cdot (y + \text{Termes sans } x \text{ ni } y)$$

et enlevons ce qui est en trop :

$$\begin{aligned} xy + x(z + t) + y(-z + t) &= (x + (-z + t))\,(y + (z + t)) - (-z + t)(z + t) \\ &= \underbrace{(x - z + t)}_{a}\underbrace{(y + z + t)}_{b} + z^2 - t^2 \end{aligned}$$

On utilise ensuite l'identité $ab = \frac{1}{4}(a + b)^2 - \frac{1}{4}(a - b)^2$:

$$= \frac{1}{4}(x + y + 2t)^2 - \frac{1}{4}(x - y - 2z)^2 + z^2 - t^2$$

Revenons enfin à Q :

$$Q(x, y, z, t) = \frac{1}{4}(x + y + 2t)^2 - \frac{1}{4}(x - y - 2z)^2 + z^2 - t^2 + 2zt$$

• La variable z apparaît au carré, on la traite comme dans l'Exemple 1 :

$$z^2 + 2zt = (z + t)^2 - t^2$$

et finalement

$$Q(x, y, z, t) = \frac{1}{4}(x + y + 2t)^2 - \frac{1}{4}(x - y - 2z)^2 + (z + t)^2 - 2t^2 \qquad (*)$$

• Rang, signature, signe de Q :

Les formes linéaires qui apparaissent dans $(*)$ sont linéairement indépendantes et nous avons réduit Q.

Le rang de Q est 4 et sa signature $(2, 2)$.

Le changement de coordonnées

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

donné par une matrice inversible M correspond à un changement de base, soit $\mathcal{B}'$ la base de $\mathbb{R}^4$ telle que
$$M = \mathcal{P}_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}_{can}}$$
Dans la base $\mathcal{B}'$, la forme quadratique Q s'écrit
$$Q(u) = \frac{1}{4}(x')^2 - \frac{1}{4}(y')^2 + (z')^2 - 2(t')^2$$
si (x', y', z', t') sont les coordonnées de u dans $\mathcal{B}'$.

On voit facilement à partir de cette expression que, comme dans l'Exemple 1,
(i) Il existe $u \in \mathbb{R}^4$ tel que $Q(u) > 0$.
(ii) Il existe $u' \in \mathbb{R}^4$ tel que $Q(u) < 0$
Le lecteur aura remarqué que la signature de Q donne directement cette information sur le signe de Q. □

Remarque

> *Les exemples précédents illustrent les deux techniques à l'œuvre dans la méthode de Gauss, à savoir*
> 1. *Comment traiter une variable qui apparaît au carré.*
> 2. *Comment traiter une variable qui ne figure que dans des termes « rectangulaires ».*

Exemple 3.

Soit $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forme quadratique
$$Q(x, y, z) = (x + y - 2z)^2 + 3(y + z)^2$$
Elle est réduite. Son rang est 2 et sa signature $(2, 0)$.

Ici il nous manque une relation ($z' = \alpha x + \beta x + \gamma z$) pour définir le changement de coordonnées
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$
Mais il suffit de compléter la famille libre $((1, 1, -2), (0, 1, 1))$ en une base de $\mathbb{R}^3$ pour définir ainsi une matrice M inversible. Par exemple, on peut prendre $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 1)$ (c'est-à-dire $z' = z$), ainsi $M = \mathcal{P}_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}_{can}}$, on a
$$M^{-1} = \mathcal{P}_{\mathcal{B}_{can} \to \mathcal{B}'} = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e'_1 & e'_2 & e'_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$
donc $\mathcal{B}' = ((1, 0, 0), (-1, 1, 0), (3, -1, 1))$. La forme quadratique Q s'écrit
$$Q(u) = (x')^2 + 3(y')^2$$
si (x', y', z') sont les coordonnées de u dans $\mathcal{B}'$.

Remarquons que $Q(u) \geq 0$ mais il existe $u_0 \neq 0$ tel que $Q(u_0) = 0$ (prendre $x' = y' = 0$ et $z' \neq 0$) : Q est positive mais non définie positive. □

3.4 Lien entre signature et signe d'une forme quadratique

Récapitulons les résultats illustrés dans la section précédente

Soit $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une forme quadratique non nulle.

I. Il existe un entier $1 \leq r \leq n$, r formes linéaires $l_1, \ldots, l_r$ sur $\mathbb{R}^n$ linéairement indépendantes et $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ tous non nuls, tels que

$$Q(u) = \lambda_1 (l_1(u))^2 + \cdots + \lambda_r (l_r(u))^2 \tag{1}$$

*pour tout $u \in \mathbb{R}^n$. On dit alors que l'on a réduit Q. L'expression (1) n'est pas unique, mais le nombre r est invariant (il s'appelle le **rang** de Q) ainsi que le nombre $0 \leq \sigma \leq r$ de réels $\lambda_i > 0$ et le nombre $0 \leq \tau \leq r$ de réels $\lambda_i < 0$.*
*Le couple (σ, τ) s'appelle la **signature** de Q. On a $\sigma + \tau = r$*

II. Il existe une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^n$ telle que, pour tout $u \in \mathbb{R}^n$,

$$Q(u) = \lambda_1 \left(x_1'\right)^2 + \cdots + \lambda_r \left(x_r'\right)^2 \tag{2}$$

où $(x_1', \ldots, x_n')$ sont les coordonnées de u dans $\mathcal{B}'$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les réels non nuls de (1).

III. A partir de l'écriture (2) on voit facilement que

(a) Si la signature de Q est $(n, 0)$, alors Q est définie positive.
Si la signature de Q est $(0, n)$, alors Q est définie négative.

(b) Si la signature de Q est $(\sigma, 0)$, avec $\sigma < n$, alors Q est positive, mais Q n'est pas définie positive.
Si la signature de Q est $(0, \tau)$, avec $\tau < n$, alors Q est négative, mais Q n'est pas définie négative.

(c) Si la signature de Q est (σ, τ), avec $0 < \sigma$ et $0 < \tau$, alors Q n'est ni positive, ni négative.

Tous les cas possibles pour la signature de Q ont été décrits et ils donnent des conséquences différentes concernant le signe de Q, il s'ensuit que les implications de (a), (b) et (c) sont des équivalences.

Chapitre 4

Fonctions de plusieurs variables

4.1 Introduction

4.1.1 Distance, ouverts

$X = (x_1, \ \dots \ , x_n)$ désignera un point de $\mathbb{R}^n$.

Pour $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ nous noterons $(x_1, x_2) = (x, y)$, $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$.

La **norme euclidienne** de X est définie par

$$|| \ X \ || = \sqrt{x_1^2 + \ \cdots \ + x_n^2}$$

La **distance euclidienne** entre deux points $X = (x_1, \ \dots \ , x_n)$ et $Y = (y_1, \ \dots \ , y_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est

$$d(X, Y) = || \ X - Y \ || = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ \cdots \ + (x_n - y_n)^2}$$

La **boule ouverte** de centre $X_0 \in \mathbb{R}^n$ et rayon $\rho > 0$ est l'ensemble

$$B_\rho(X_0) = \{ \ X \in \mathbb{R}^n \mid d(X, X_0) < \rho \ \}$$

On appelle **voisinage d'un point** $X_0 \in \mathbb{R}^n$ tout sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ contenant une boule ouverte de centre X_0.

Un sous-ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est **ouvert** si, pour tout $X_0 \in \Omega$, il existe $\rho > 0$ tel que $B_\rho(X_0) \subset \Omega$.

Remarque. On montre facilement (exercice) que la boule ouverte $B_\rho(X_0)$ est un ouvert.

4.1.2 Continuité

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction.

On dit que f est **continue** en $X_0 \in A$ si $\lim\limits_{\substack{X \to X_0 \\ X \in A}} f(X) = f(X_0)$, ce qui se traduit par

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$X \in A, \quad || X - X_0 || < \alpha \quad \textit{implique} \quad | f(X) - f(X_0) | < \varepsilon$$

c'est-à-dire que $f(B_\alpha(X_0) \cap A) \subset]\, f(X_0) - \varepsilon,\ f(X_0) + \varepsilon\, [$.

On dira que f est continue sur son domaine de définition A si elle est continue en tout point $X_0 \in A$.

Pour établir la continuité de f en X_0 nous n'utiliserons pas directement la définition, mais les propriétés suivantes :

Proposition 4.1.1 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert.*
Soient $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues en $X_0 \in \Omega$.

1. *Les projections $\Pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, définies pour tout $1 \le i \le n$ par*

$$\Pi_i(x_1, \ \ldots \ , x_n) = x_i$$

   sont continues en tout point de $\mathbb{R}^n$. Les fonctions constantes aussi.
2. *Supposons que $f(X_0) > 0$.*
   (a) *Alors il existe un voisinage V de X_0 sur lequel f reste strictement positive.*
   (b) *La fonction $1/f$, qui est bien définie sur V d'après (a), est continue en X_0.*

   On a le résultat analogue si $f(X_0) < 0$.
3. *Les fonctions $f + g$ et $f \cdot g$ sont continues en X_0.*
4. *Soit $]\, a,\ b\, [$ un intervalle contenant $f(X_0)$ et $h :]\, a,\ b\, [\to \mathbb{R}$ une fonction continue en $f(X_0)$. Alors la fonction composée $h \circ f : X \to h(f(X))$ est bien définie sur un voisinage de X_0 et continue en X_0.*

Exemple. Montrons que la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f : (x, y) \to \frac{\sin(xy)}{1 + x^2 + 3y^4}$$

est continue en tout point de $\mathbb{R}^2$:

1. Les projections $\Pi_1(x, y) \to x$ et $\Pi_2(x, y) \to y$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$.
2. Les fonctions $(x, y) \to x^2$, $(x, y) \to y^4$, $(x, y) \to xy$ son continues sur $\mathbb{R}^2$ (comme produit des fonctions projections).
3. De même, la fonction $(x, y) \to 1 + x^2 + 3y^4$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ (somme, produit...). Comme $1 + x^2 + 3y^4 > 0$, la fonction $(x, y) \to \frac{1}{1+x^2+3y^4}$ l'est aussi.
4. La fonction $(x, y) \to \sin(xy)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ (composition des fonction continues $(x, y) \to xy$ et $t \to \sin(t)$).
5. Enfin, f est continue sur $\mathbb{R}^2$ comme produit des fonctions continues $(x, y) \to \sin(xy)$ et $(x, y) \to \frac{1}{1+x^2+3y^4}$.

Remarque. Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur Ω alors l'ensemble

$$\{\ X \in \Omega \mid f(X) > 0\}$$

est un ouvert (exercice).

4.1.3 Dérivées partielles

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $a = (a_1, \ \ldots \ , a_n) \in \Omega$ et $1 \leq i \leq n$.

La fonction de la variable réelle x_i à valeurs réels

$$x_i \ \longrightarrow \ f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

est définie sur un intervalle ouvert contenant a_i.

Si elle est dérivable en $x_i = a_i$, sa dérivée se note $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ et s'appelle la **dérivée partielle** par rapport à x_i de f au point a.

Si $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(X)$ est bien définie pour tout $X \in U$, ouvert contenu dans Ω, on peut considérer la **fonction dérivée partielle** par rapport à x_i de f

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \ \longrightarrow \ \mathbb{R} \ \text{ définie par } \ X \ \longrightarrow \ \frac{\partial f}{\partial x_i}(X)$$

et se demander si elle-même admet des dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a) \ \text{ se notera } \ \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) \ \text{ si } j \neq i, \ \text{ et } \ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) \ \text{ si } j = i$$

Exemple. Soit $f(x, y) = x^2 \cos(xy) + y^3$. On a pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x\cos(xy) - x^2 y \sin(xy), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -x^3 \sin(xy) + 3y^2$$

et on peut calculer les dérivées partielles par rapport à x ou y de chacune de ces deux fonctions :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x, y) \quad &= 2\cos(xy) - 4xy\sin(xy) - x^2y^2\cos(xy) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x, y) \quad &= -\ 3x^2 \sin(xy) - x^3 y \cos(xy) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x, y) \quad &= -\ x^4 \cos(xy) + 6y \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x, y) \quad &= -\ 3x^2 \sin(xy) - x^3 y \cos(xy)
\end{aligned}$$

Dans cet exemple

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$$

en tout point (ce qui est faux en général, mais vrai pour des fonctions suffisamment régulières : voir Prop. 4.3.2).

4.2 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Définition 4.2.1 Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction.
On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω si les fonctions dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ \dots \ , \frac{\partial f}{\partial x_n}$ sont définies et continues sur Ω

Proposition 4.2.2 ***(Formule de Taylor à l'ordre 1)***
Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. Soit $a \in \Omega$.
Il existe une boule ouverte de centre 0, $B_\rho(0)$, telle que pour tout $u = (u_1, \dots, u_n) \in B_\rho(0)$ on a $a + u \in \Omega$ et

$$f(a+u) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2}\ \varepsilon(u)$$

où la fonction $\varepsilon : B_\rho(0) \to \mathbb{R}$ vérifie $\lim\limits_{u \to 0} \varepsilon(u) = \varepsilon(0) = 0$.

On a donc $\lim\limits_{u \to 0} f(a+u) = f(a)$:

Corollaire 4.2.3 *Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω, alors f est continue en tout point de Ω*

Dans les notations de la Proposition

Définition 4.2.4 L'application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ (forme linéaire) définie par

$$(u_1, \dots, u_n) \ \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

s'appelle la **différentielle** de f au point a et se note $df(a)$.

Remarques

1. On a

$$df(a)(u) = \left(\tfrac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \tfrac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right) \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \langle \mathrm{grad} f(a), u \rangle$$

et $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$ est la matrice de $df(a)$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}$.

2. On peut écrire la formule de Taylor

$$f(a+u) - f(a) = df(a)(u) + ||u||\,\varepsilon(u)$$

> *L'application linéaire*
> $$u \to df(a)(u)$$
> *donne une approximation « au premier ordre » de la fonction*
> $$u \to f(a+u) - f(a)$$
> *au voisinage de* $u = 0$.

En effet, si u tend vers 0, le reste $||u||\,\varepsilon(u)$ tend vers 0 plus rapidement que $||u||$.

On peut montrer que $df(a)$ est la seule application linéaire vérifiant cette propriété :

> **Proposition 4.2.5**
> *Soit f une fonction à valeurs réelles définie au voisinage du point $a \in \mathbb{R}^n$.*
> *Supposons qu'il existe une application linéaire $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et une fonction $\varepsilon : B_\rho(0) \to \mathbb{R}$, définie au voisinage de 0, vérifiant*
> $$f(a+u) - f(a) = L(u) + ||u||\,\varepsilon(u)$$
> *si $u \in B_\rho(0)$, avec $\lim\limits_{u \to 0} \varepsilon(u) = \varepsilon(0) = 0$ (on dit alors que f est différentiable en a).*
> *Alors f admet des dérivées partielles en a et l'application linéaire L est donnée par*
> $$L(u) = \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$
> *pour tout $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$.*

4.3 Fonctions de classe $\mathcal{C}^2$

Définition 4.3.1 Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction.
On dit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω si toutes ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}, \quad 1 \leq i, j \leq n$$

existent et sont continues sur Ω

On définit de la même manière la notion de fonction de classe $\mathcal{C}^n$.

On peut intervertir l'ordre de dérivation dans les dérivées partielles secondes d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$:

Proposition 4.3.2 ***(Lemme de Schwarz)***
Si $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert Ω, alors pour tous indices $i \neq j$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$$

en tout point $a \in \Omega$.

Proposition 4.3.3 ***(Formule de Taylor à l'ordre 2)***
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω. Soit $a \in \Omega$.
Il existe une boule ouverte de centre 0, $B_\rho(0)$, telle que pour tout $u = (u_1, \ldots, u_n) \in B_\rho(0)$ on a $a + u \in \Omega$ et

$$f(a+u) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \frac{1}{2}\left(\sum_{1 \leq i,j \leq n} u_i u_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right) + \left(u_1^2 + \cdots + u_n^2\right)\ \varepsilon(u)$$

où la fonction $\varepsilon : B_\rho(0) \to \mathbb{R}$ vérifie $\lim_{u \to 0} \varepsilon(u) = \varepsilon(0) = 0$

Nous utiliserons les notations suivantes :

Soit la forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$

$$Q_a(u) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} u_i u_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$$

Puisque $\frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$, on a

$$Q_a(u) = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} u_i u_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$$

et la formule de Taylor s'écrit

$$f(a+u) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \frac{1}{2} Q_a(u) + ||u||^2\, \varepsilon(u)$$

En dimension 2 on pourra noter $a = (x_0, y_0)$, $u = (h, k)$ et écrire

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

$$+ \frac{1}{2} \underbrace{\left(h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)\right)}_{Q_{(x_0,y_0)}(h,k)}$$

$$+ (h^2 + k^2)\, \varepsilon(h, k)$$

4.4 Extremums absolus

Rappelons d'abord une propriété fondamentale des fonctions continues sur un segment :

Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur l'intervalle fermé et borné $[a,b]$, alors elle possède un minimum absolu et un maximum absolu sur $[a,b]$.

Le lecteur trouvera des contre-exemples si à la place de $[a,b]$ on considère un intervalle
— Fermé et non borné,
— Borne et non fermé
et ce même si la fonction continue f est bornée sur l'intervalle en question...

Pour généraliser ce résultat aux fonctions continues de plusieurs variables, nous avons besoin de la notion de compacité :

Définition 4.4.1

1. On dit qu'un sous-ensemble $F \subset \mathbb{R}^n$ est **fermé** lorsque son complémentaire $\mathbb{R}^n - F$ est ouvert.
2. Un sous-ensemble $B \subset \mathbb{R}^n$ est **borné** s'il existe $\rho > 0$ tel que $||X|| \leq \rho$ pour tout $X \in B$.
3. Un sous-ensemble $K \subset \mathbb{R}^n$ est **compact** s'il est fermé et borné.

Une fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes :

Théorème 4.4.2 *(Weierstrass)*
Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact.
Soit $f : K \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur K.
Alors il existe deux points $X_1, X_2 \in K$ tels que

$$f(X_1) \leq f(X) \leq f(X_2)$$

pour tout $X \in K$.
Ainsi, la fonction f présente un minimum absolu sur K au point X_1 et un maximum absolu sur K en X_2.

Voici deux exemples d'application du théorème :

Corollaire 4.4.3 *Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible.*
Alors il existe deux réels $0 < \alpha \leq \beta$ tels que

$$\alpha||X|| \leq ||P \cdot X|| \leq \beta||X||$$

pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ (ici on considère X comme vecteur colonne dans l'expression $P \cdot X$).

Démonstration : La fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(X) = ||P \cdot X||$$

est continue sur $\mathbb{R}^n$*. Soit maintenant le compact*

$$S = \{ X \in \mathbb{R}^n \mid ||X|| = 1 \}$$

(S est la « sphère unité » de $\mathbb{R}^n$*). La fonction* $f : S \to \mathbb{R}$ *(restriction de f à S) est continue sur S et le théorème permet d'affirmer l'existence de* $X_1, X_2 \in S$ *tels que*

$$||P \cdot X_1|| \leq ||P \cdot X|| \leq ||P \cdot X_2||$$

pour tout $X \in S$*.*
Comme la matrice P est inversible, $\ker P = \{0\}$*, en particulier* $P \cdot X \neq 0$ *pour tout* $X \in S$*. Soient donc les réels strictement positifs*

$$\alpha = ||P \cdot X_1|| \quad \text{et} \quad \beta = ||P \cdot X_2||$$

et considérons maintenant $X \in \mathbb{R}^n$*,* $X \neq 0$*, alors* $\dfrac{X}{||X||} \in S$ *et*

$$\alpha \leq ||\, P \cdot \frac{X}{||X||} \,|| \leq \beta$$

d'où l'inégalité de l'énoncé si $X \neq 0$ *(elle est triviale pour* $X = 0$*).* □

Corollaire 4.4.4 *Soit* $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *une forme quadratique définie positive.*
Alors il existe un réel $\alpha > 0$ *tel que*

$$Q(X) \geq \alpha ||X||^2$$

pour tout $X \in \mathbb{R}^n$*.*

Démonstration : Considérons comme précédemment le compact

$$S = \{ X \in \mathbb{R}^n \mid ||X|| = 1 \}$$

La fonction $Q : S \to \mathbb{R}$ *est continue sur S (comme restriction de Q, fonction continue sur* R^n*) et le théorème garantit l'existence de* $X_1 \in S$ *tel que*

$$Q(X) \geq Q(X_1)$$

pour tout $X \in S$*. Soit alors* $\alpha = Q(X_1)$*, il s'agit d'un réel strictement positif puisque Q est définie positive et* $X_1 \neq 0$*.*
Enfin, si $X \in \mathbb{R}^n$*,* $X \neq 0$*, alors* $\dfrac{X}{||X||} \in S$ *et*

$$\frac{1}{||X||^2} Q(X) = Q\left(\frac{X}{||X||}\right) \geq \alpha > 0$$

d'où le résultat pour $X \neq 0$ *(il est immédiat si* $X = 0$*).* □

4.5 Extremums locaux des fonctions de plusieurs variables

Définition 4.5.1 Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \Omega$.
S'il existe une boule ouverte $B_\rho(a) \subset \Omega$ telle que

1. $f(X) \leq f(a)$ pour tout $X \in B_\rho(a)$, alors on dit que f a un **maximum local** en a.
2. $f(X) < f(a)$ si $X \in B_\rho(a)$, $X \neq a$, alors f a un **maximum local strict** en a.
3. $f(X) \geq f(a)$, pour tout $X \in B_\rho(a)$, alors on dit que f a un **minimum local** en a.
4. $f(X) > f(a)$ si $X \in B_\rho(a)$, $X \neq a$, alors f a un **minimum local strict** en a.

Rappelons le résultat bien connu pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Proposition 4.5.2 *Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert Ω.
Si f a un extremum local en un point $a \in \Omega$, alors a est un **point critique** de f :*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$$

pour tout $1 \leq i \leq n$.

On a d'avantage d'information si la fonction est de classe $\mathcal{C}^2$

Proposition 4.5.3 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert.
Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω.
Soit $a \in \Omega$ un **point critique** de f. La formule de Taylor à l'ordre 2 au point a s'écrit*

$$f(a+u) = f(a) + \frac{1}{2}Q_a(u) + ||u||^2\, \varepsilon(u)$$

On a

1. ***Condition nécessaire d'extremum local :***
   1.1 *Si a est un minimum local de f, alors $Q_a(u) \geq 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}^n$.*
   1.2 *Si a est un maximum local de f, alors $Q_a(u) \leq 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}^n$.*
2. ***Condition suffisante d'extremum local strict :***
   2.1 *Si $Q_a(u) > 0$ pour tout $u \neq 0$, alors f a un minimum local strict en a.*
   2.2 *Si $Q_a(u) < 0$ pour tout $u \neq 0$, alors f a un maximum local strict en a.*
3. *S'il existe des vecteurs $u, u' \in \mathbb{R}^n$ tels que $Q_a(u) > 0$ et $Q_a(u') < 0$, alors a n'est pas un extremum local de f.*

Quelques précisions s'imposent avant de démontrer la proposition

Remarques, exemples

1. Les assertions sur le signe de la forme quadratique Q_a qui figurent dans la Proposition se caractérisent à partir de la signature de Q_a (voir Déf. 3.2.2 et Sect. 3.4). En effet :

— La condition de 1.1 signifie que Q_a est positive.
La condition de 1.2 nous dit que Q_a est négative.

— Dans 2.1, Q_a est définie positive, dans 2.2 la forme quadratique est définie négative.

— Enfin, 3 signifie que Q_a n'est ni positive ni négative

2. Si $n = 2$ on doit étudier la forme quadratique

$$Q_a(h,k) = h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)$$

— S'il y a un terme carré (h^2 ou k^2) on applique la méthode de Gauss pour déterminer la signature de Q_a.

— S'il n'y a pas de terme carré et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \neq 0$$

alors

$$Q_a(h,k) = 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)$$

et on est dans le cas 3 : $Q_a(1,1)$ et $Q_a(1,-1)$ sont non nuls et de signes contraires.

3. En dimension 3 on doit déterminer le signe de la forme quadratique

$$\begin{aligned} Q_a(h,k,l) = \ & h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) + l^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(a) \\ & + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) + 2hl \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(a) + 2kl \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(a) \end{aligned}$$

4. Un exemple d'étude :

Déterminons les extrema locaux de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

Il s'agit bien d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

• Déterminons les points critiques de f :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x$$

Les points critiques vérifient $x^2 = y$ et $y^2 = x$, ce qui implique $x^4 = x$, d'où $x = 0$ ou $x = 1$: la fonction f possède deux points critiques, à savoir $(0,0)$ et $(1,1)$.

• Écrivons la forme quadratique $Q_a(h,k)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -3$$

et si $a = (x_0, y_0)$ on a

$$Q_{(x_0,y_0)}(h,k) = h^2(6x_0) + 2hk(-3) + k^2(6y_0)$$

• Étude au point $(0,0)$:

On a ici $Q_{(0,0)}(h,k) = -6hk$. En remarquant que $Q_{(0,0)}(1,1) < 0$ et $Q_{(0,0)}(1,-1) > 0$ on en déduit (cas 3 de la Proposition) que $(0,0)$ n'est pas un extremum local de f.

• Étude au point $(1,1)$:

La forme quadratique est maintenant

$$\begin{aligned} Q_{(1,1)}(h,k) &= 6h^2 - 6hk + 6k^2 = 6\left(h^2 - hk + k^2\right) \\ &= 6\left(h^2 + 2h(-\frac{1}{2}k) + k^2\right) \\ &= 6\left((h - \frac{1}{2}k)^2 - \frac{1}{4}k^2 + k^2\right) \\ &= 6\left((h - \frac{1}{2}k)^2 + \frac{3}{4}k^2\right) \end{aligned}$$

La signature de $Q_{(1,1)}$ est $(2,0)$: la forme quadratique est définie positive et le point $(1,1)$ est un minimum local de f (cas 2.1 de la Proposition).

5. Le résultat 1 de la Proposition nous dit que la condition $Q_a(u) \geq 0$ (resp. $Q_a(u) \leq 0$) en un point critique a de f est **nécessaire** pour que f présente un minimum local (resp. un maximum local) en a. L'exemple suivant montre qu'**il ne s'agit pas dune condition suffisante** :

Soit $f(x,y) = x^2 + y^3$.
L'origine est un point critique de f et

$$Q_{(0,0)}(h,k) = 2h^2 \geq 0$$

pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$. Or il n'y a pas d'extremum en $(0,0)$ car $f(0,y) = y^3$.

6. Les résultats 2.1 et 2.2 de la Proposition donnent des conditions **suffisantes** d'extremum local : **elles ne sont pas nécessaires !** :

En effet, soit $f(x,y) = x^2 + y^4$.
Cette fonction a un minimum local (et absolu) à l'origine car $f(x,y) \geq 0 = f(0,0)$ (en fait il s'agit d'un minimum local strict).

La forme quadratique au point critique $(0,0)$ est

$$Q_{(0,0)}(h,k) = 2h^2$$

qui ne vérifie pas la condition de 2.1 car $Q_{(0,0)}(0,k) = 0$.

Démonstration de la Proposition 4.5.3 :

1.1. *Soit $u \in \mathbb{R}^n$, $u \neq 0$ fixé.*
L'hypothèse implique qu'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout réel $t \in \,]-\delta, \delta[$, on a $f(a+tu) \geq f(a)$ et grâce à la formule de Taylor on obtient

$$f(a+tu) - f(a) = \frac{1}{2} Q_a(tu) + ||tu||^2 \, \varepsilon(tu) = t^2 \left(\frac{1}{2} Q_a(u) + ||u||^2 \, \varepsilon(tu) \right) \geq 0$$

lorsque $|t| < \delta$. En particulier $\frac{1}{2} Q_a(u) + ||u||^2 \, \varepsilon(tu) \geq 0$. Si $t \to 0$, alors $\varepsilon(tu) \to 0$ et on déduit $Q_a(u) \geq 0$.

1.2. *Appliquer 1.1 à la fonction $-f$.*

2.1. *Comme Q_a est définie positive, il existe $\alpha > 0$ tel que $Q_a(u) \geq \alpha ||u||^2$ pour tout $u \in \mathbb{R}^n$ (Corollaire 4.4.4). En particulier, si u est suffisamment petit on peut appliquer la formule de Taylor :*

$$f(a+u) - f(a) = \frac{1}{2} Q_a(u) + ||u||^2 \, \varepsilon(u) \geq \frac{1}{2} \alpha ||u||^2 + ||u||^2 \, \varepsilon(u) = ||u||^2 \left(\frac{1}{2} \alpha + \varepsilon(u) \right)$$

La fonction $u \to \frac{1}{2}\alpha + \varepsilon(u)$ est continue en $u = 0$ et vaut $\frac{1}{2}\alpha > 0$ en ce point : elle reste donc strictement positive sur un voisinage de 0 (voir partie 2. (a) de la Prop. 4.1.1).
Par conséquent, $||u||^2 \left(\frac{1}{2}\alpha + \varepsilon(u) \right) > 0$ si u est assez petit et non nul.

2.2. *Il suffit d'appliquer 2.1 à la fonction $-f$.*

3. *Le résultat découle de 1 puisque nous n'avons pas les conditions nécessaires d'extremum local. La remarque qui suit donne une preuve directe de 3.* □

Remarque. Voici quelques précisions sur la partie 3 de la proposition :

S'il existe $u \in \mathbb{R}^n$ tel que $Q_a(u) > 0$, alors la fonction d'une variable

$$t \to f(a+tu)$$

(ici le vecteur u est fixé) présente un minimum local (strict) en $t = 0$. En effet, l'expression

$$f(a+tu) - f(a) = \frac{1}{2} Q_a(tu) + ||tu||^2 \, \varepsilon(tu) = t^2 \left(\frac{1}{2} Q_a(u) + ||u||^2 \, \varepsilon(tu) \right)$$

montre que $f(a+tu) > f(a)$ si le réel t est assez petit et non nul (raisonner comme dans la preuve de 2.1).

De même, si $Q_a(u') < 0$, la fonction $t \to f(a+tu')$ possède un maximum local (strict) en $t = 0$.

4.6 Fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ une fonction.

Les fonctions **coordonnées** (ou composantes) de f sont les fonctions $f_i : \Omega \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(X) = (f_1(X), f_2(X), \ \ldots \ , f_p(X))$$

pour tout $X \in \Omega$.

On dit que f est **continue** en $X_0 \in \Omega$ si

> *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que*
>
> $$X \in \Omega, \ || \ X - X_0 \ || < \alpha \ \ \textit{implique} \ \ || \ f(X) - f(X_0) \ || < \varepsilon$$

on peut montrer que ceci équivaut à la continuité en X_0 des fonctions coordonnées de f.

On dit que f est de **classe** $\mathcal{C}^1$ sur Ω si les fonctions coordonnées de f sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.

Définition 4.6.1 Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert Ω et $a \in \Omega$. La **différentielle** de f au point a (qu'on note $df(a)$) est l'application linéaire

$$df(a) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

associée à la matrice $p \times n$

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_p}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

(dite matrice jacobienne de f au point a).

Pour tout $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$

$$df(a)(u) = J_f(a) \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$$

Comme pour le cas $p = 1$ on dispose du résultat suivant

> **Proposition 4.6.2** ***(Formule de Taylor à l'ordre 1)***
> *Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert Ω. Soit $a \in \Omega$.*
> *Il existe une boule ouverte de $\mathbb{R}^n$ de centre 0, $B_\rho(0)$, telle que pour tout $u \in B_\rho(0)$ on a $a + u \in \Omega$ et*
>
> $$f(a + u) = f(a) + df(a)(u) + ||u|| \ \varepsilon(u)$$
>
> *où la fonction $\varepsilon : B_\rho(0) \to \mathbb{R}^p$ vérifie $\lim\limits_{u \to 0} \varepsilon(u) = \varepsilon(0) = 0$.*

Remarques

1. L'application linéaire $u \to df(a)(u)$ donne une approximation d'ordre 1 de la fonction $u \to f(a+u) - f(a)$ au voisinage de $u = 0$.

2. Elle est la seule application linéaire vérifiant cette propriété : on peut montrer (comme pour $p = 1$) que si

$$f(a+u) = f(a) + L(u) + ||u||\,\varepsilon(u)$$

pour tout u dans un voisinage de 0 (avec $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ linéaire et $\lim\limits_{u \to 0} \varepsilon(u) = \varepsilon(0) = 0$), alors

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$$

existent pour tous $1 \leq i, j \leq n$ et L est l'application linéaire associée à la matrice $\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)$.

Chapitre 5

Équations différentielles d'ordre 1

5.1 Introduction

Nous revisitons dans ce chapitre des équations que vous connaissez déjà (autonomes, à variables séparables). On illustrera aussi quelques aspects de la théorie générale des équations différentielles d'ordre 1 : les notions de prolongement de solution, solution maximale et globale, problème de Cauchy, ainsi que le Th. de Cauchy-Lipschitz et le Th. des bouts.

Définition 5.1.1 Soient U et Ω deux intervalles ouverts.
Soit $F : U \times \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction donnée.
Une solution de l'équation différentielle d'ordre 1

$$x'(t) = F(t, x(t)) \tag{ED}$$

est une fonction $x : I \to \mathbb{R}$ vérifiant

1. $I \subset U$ est un intervalle ouvert.
2. $x : t \to x(t)$ est une fonction dérivable sur I et $x(I) \subset \Omega$.
3. $x'(t) = F(t, x(t))$ pour tout $t \in I$.

Remarque. On peut préciser explicitement l'intervalle U par des locutions de la forme « Soit (ED) l'équation différentielle définie sur U par... » ou « Résoudre sur U l'équation différentielle... ».

En pratique, pour une fonction F donnée, on étudiera l'équation (ED) sur des pavés ouverts $U \times \Omega$ du plan Otx où F est définie. Par exemple l'équation différentielle

$$x'(t) = \frac{1}{(t-2)\ln(x(t))} + \cos t$$

s'écrit $x'(t) = F(t, x(t))$ avec

$$F(t, x) = \frac{1}{(t-2)\ln(x)} + \cos t$$

Elle peut être étudiée sur les quatre pavés $U_i \times \Omega_j$ définis par $U_1 =]-\infty, 2[$, $U_2 =]2, +\infty[$ (intervalles de la variable t) et $\Omega_1 =]0, 1[$, $\Omega_2 =]1, +\infty[$ (intervalles de la variable x).

Le champ de tangentes

Pour tout $(t, x) \in U \times \Omega$, soit $\Delta_{(t,x)}$ le segment de pente $F(t, x)$ centré en (t, x), on définit ainsi sur l'ouvert $U \times \Omega$ du plan le **champ de tangentes**

$$(t, x) \longrightarrow \Delta_{(t,x)}$$

de l'équation différentielle.

La fonction $x : I \to \mathbb{R}$ est solution de (ED) si et seulement si, pour tout $t \in I$, $\Delta_{(t,x(t))}$ est tangent au graphe de x en $(t, x(t))$.

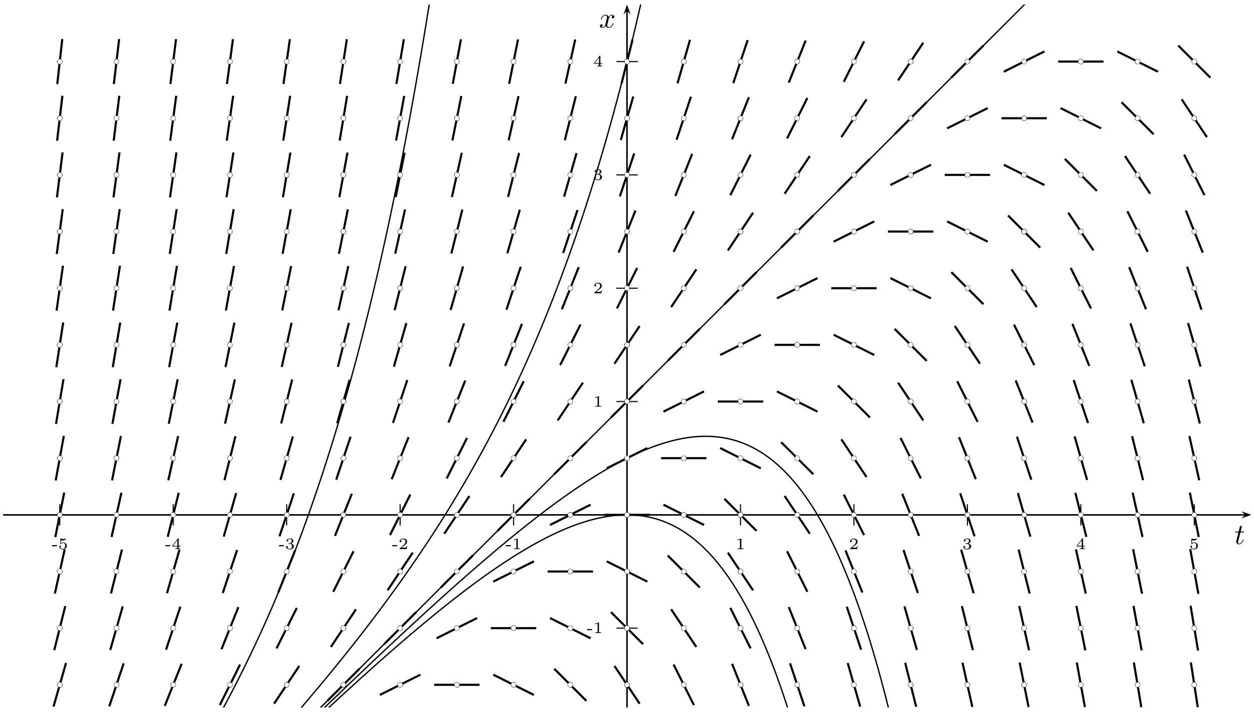

Figure 5.1 – Le champ de tangentes de $x'(t) = x(t) - t$ et les graphes de quelques solutions

Remarquons que

> *Si un point $(t_0, x_0) \in U \times \Omega$ appartient aux graphes de deux solutions de (ED), alors en ce point les graphes ont la même tangente.*

On n'a pas besoin d'avoir résolu l'équation (analytiquement) pour pouvoir dessiner son champ de tangentes et ceci permet d'avoir une idée du comportement des solutions.
On peut commencer par déterminer les régions du plan où la pente des tangentes est positive ou négative, puis esquisser l'allure des **isoclines** :

> *Les isoclines de l'équation différentielle (ED) sont les lignes de niveau de la fonction F. Il s'agit des « courbes » du plan Otx d'équation $F(t, x) =$constante.*

Les **symétries du champ de tangentes** induisent des symétries sur les graphes des solutions :

1. Si $F(t,-x) = -F(t,x)$ sur $U \times \Omega$, alors le champ de tangentes de (ED) est symétrique par rapport à l'axe Ot et les graphes des solutions le sont aussi. Plus précisément, si $x :]a,b[\to \mathbb{R}$ est solution, alors $t \to -x(t)$ est solution sur $]a,b[$.
2. De même, si $F(-t,x) = -F(t,x)$ sur $U \times \Omega$, alors le champ de tangentes de (ED) et les graphes des solutions sont symétriques par rapport à l'axe Ox (si $x :]a,b[\to \mathbb{R}$ est solution, alors $t \to x(-t)$ est solution sur $]-b,-a[$).
3. Enfin, si $F(-t,-x) = F(t,x)$ sur $U \times \Omega$, le champ de tangentes et les graphes des solutions sont symétriques par rapport à l'origine (si $x :]a,b[\to \mathbb{R}$ est solution, alors $t \to -x(-t)$ est solution sur $]-b,-a[$).

La notion de **barrière** (qu'on ne détaillera pas ici) fait aussi partie de cette approche « qualitative » des équations différentielles.

Solutions maximales, solutions globales

Définition 5.1.2

1. On dit que $x : I \to \mathbb{R}$ est une **solution globale** de (ED) lorsque $I = U$.
2. Soient $x_1 : I_1 \to \mathbb{R}$ et $x_2 : I_2 \to \mathbb{R}$ deux solutions de (ED). Si

   I_1 est contenu strictement dans I_2 et $x_1(t) = x_2(t)$ pour tout $t \in I_1$

   on dira que $x_2 : I_2 \to \mathbb{R}$ **prolonge** $x_1 : I_1 \to \mathbb{R}$.
3. On dit que $x : I \to \mathbb{R}$ est une **solution maximale** de (ED) s'il n'existe pas une solution de (ED) qui la prolonge.

Remarques

1. Toute solution globale est maximale, mais une équation différentielle peut admettre des solutions maximales non globales comme le montre l'exemple suivant.

2. Soit l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$

$$x'(t) = 1 + x^2(t) \qquad (E)$$

Ici $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to R$ est définie par $F(t,x) = 1 + x^2$ (elle ne dépend pas de t).

La fonction $x_1 :]-1,1[\to \mathbb{R}$ définie par $x_1(t) = \tan t$ est solution de (E) (dériver !).

La solution $x_2 :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$ définie par $x_2(t) = \tan t$ prolonge la solution précédente. Remarquons qu'elle est une solution maximale de (E) puisque

$$\lim_{t \to -\pi/2^+} \tan t = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t \to \pi/2^-} \tan t = +\infty$$

et il n'y a donc pas de prolongement possible. Cette solution n'est pas globale (elle n'est pas définie sur $U = \mathbb{R}$). Par ailleurs, l'équation (E) n'admet aucune solution globale (Voir Sect. 5.4, Remarque 2).

Problème de Cauchy

Définition 5.1.3 Le **problème de Cauchy** (P) pour l'équation différentielle (ED) est la recherche des solutions de cette équation vérifiant la condition initiale $x(t_0) = x_0$, avec $(t_0, x_0) \in U \times \Omega$ fixé :

$$(P) \qquad \begin{cases} x'(t) = F(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

5.2 Équations autonomes

On dit qu'une équation différentielle est autonome si elle est de la forme

$$x'(t) = f(x(t)) \tag{A}$$

où $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée, définie sur l'intervalle ouvert Ω. L'équation (A) s'écrit sous la forme (ED) :

$$x'(t) = F(t, x(t))$$

avec $F : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ définie par $F(t, x) = f(x)$.

En particulier, une solution globale de (A) sera une solution définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

D'autre part, les droites de $\mathbb{R} \times \Omega$ d'équation $x = k$ sont des isoclines de l'équation différentielle (A). La pente des tangentes le long de l'isocline $x = k$ est $f(k)$.

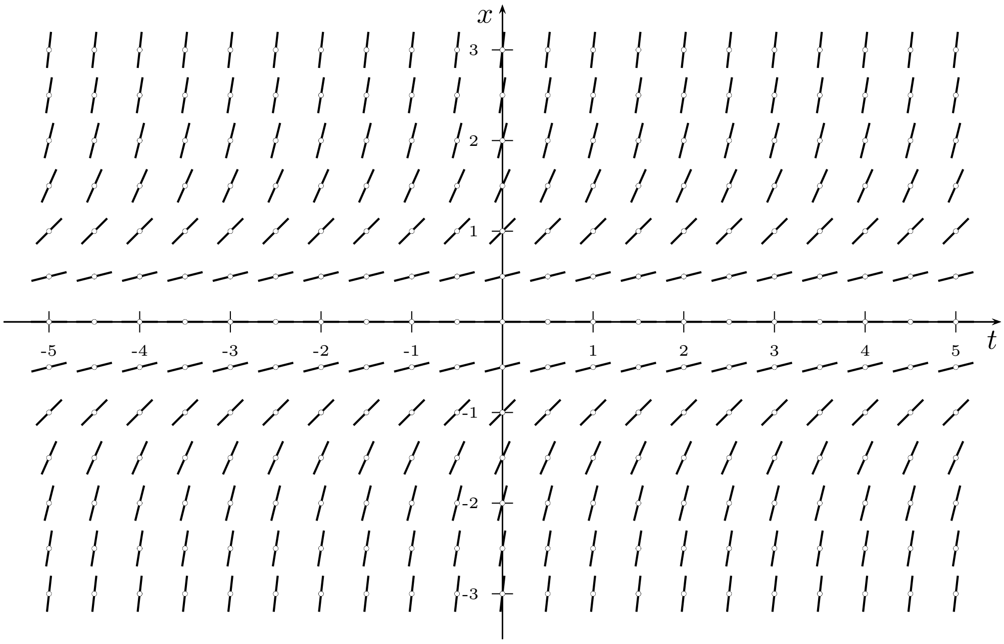

FIGURE 5.2 – Le champ de tangentes de l'équation autonome $x'(t) = x^2(t)$

Le champ de tangentes d'une équation autonome est donc invariant par translation horizontale, voici la traduction de ce fait en termes des solutions de l'équation :

> **Proposition 5.2.1** *Si $x : I \to \mathbb{R}$ est solution de (A) alors, pour tout $c \in \mathbb{R}$, la fonction*
>
> $$x_c : I + c \to \mathbb{R} \quad \textit{définie par}$$
>
> *définie sur l'intervalle $I + c = \{\, t + c \,|\, t \in I \,\}$ par $x_c(t) = x(t - c)$ est aussi solution de l'équation (A)*

Démonstration : pour tout $t \in I + c$, on a $t - c \in I$ et la fonction x_c est bien définie. D'autre part $x_c'(t) = x'(t-c) \cdot (t-c)' = x'(t-c) = f(\, x(t-c)\,) = f(\, x_c(t)\,)$ □

Remarque. Le graphe de $t \to x_c(t)$ se déduit de celui de $t \to x(t)$ par la translation de vecteur horizontal $\overrightarrow{(c, 0)}$.

5.3 Un exemple de non unicité pour le problème de Cauchy

Considérons l'équation différentielle autonome

$$x'(t) = 2\sqrt{|x(t)|} \tag{A}$$

La fonction constante $x = 0$ est solution de (A) sur $\mathbb{R}$.

Soit $x : I \to \mathbb{R}$ une solution de l'équation telle que $x(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$.
La continuité de x sur l'intervalle I implique que

1. Ou bien $x(t) > 0$ pour tout $t \in I$.
2. Ou bien $x(t) < 0$ pour tout $t \in I$.

Dans les deux cas, la fonction $t \to x(t)$ est strictement croissante sur I (d'après (A)).

Recherche des solutions strictement positives

L'équation (A) s'écrit alors

$$x'(t) = 2\sqrt{x(t)} \;\Leftrightarrow\; \frac{x'(t)}{2\sqrt{x(t)}} = 1$$

pour tout $t \in I$. En remarquant que

$$\int \frac{x'(t)}{2\sqrt{x(t)}} dt = \sqrt{x(t)} + k \quad \text{et} \quad \int 1 dt = t + k'$$

pour tous $k, k' \in \mathbb{R}$, on en déduit

$$\frac{x'(t)}{2\sqrt{x(t)}} = 1 \;\Leftrightarrow\; \sqrt{x(t)} = t + c \;\Leftrightarrow\; x(t) = (t+c)^2$$

pour tout $c \in \mathbb{R}$ et $t \in I_c$, où I_c est un intervalle contenu dans $]-c, +\infty[$ (remarquer que $t + c = \sqrt{x(t)} > 0$). En particulier :

Pour tout $c \in \mathbb{R}$, la fonction $t \longrightarrow x(t) = (t+c)^2$ est solution de (A) sur $]-c, +\infty[$.

Les graphes de cette famille de solutions sont obtenus par translation à partir du graphe de la solution définie sur $]0, +\infty[$ par $t \to t^2$ (voir Fig. 5.3)

Recherche des solutions strictement négatives

Si $x : I \to \mathbb{R}$ est une telle solution, l'équation (A) s'écrit

$$x'(t) = 2\sqrt{-x(t)} \;\Leftrightarrow\; \frac{x'(t)}{2\sqrt{-x(t)}} = 1$$

pour tout $t \in I$. Maintenant

$$\int \frac{x'(t)}{2\sqrt{-x(t)}}dt = -\sqrt{-x(t)} + k \quad \text{et} \quad \int 1dt = t + k'$$

pour tous $k, k' \in \mathbb{R}$, d'où

$$\frac{x'(t)}{2\sqrt{-x(t)}} = 1 \;\Leftrightarrow\; -\sqrt{-x(t)} = t + c \;\Leftrightarrow\; x(t) = -(t+c)^2$$

pour tout $c \in \mathbb{R}$ et $t \in I_c$, où I_c est un intervalle contenu dans $]-\infty, -c[$ (remarquer que $t + c = -\sqrt{-x(t)} < 0$). En particulier :

Pour tout $c \in \mathbb{R}$, la fonction $t \longrightarrow x(t) = -(t+c)^2$ est solution de (A) sur $]-\infty, -c[$.

Les graphes de cette famille de solutions sont obtenus par translation à partir du graphe de la solution définie sur $]-\infty, 0[$ par $t \to -t^2$ (voir Fig. 5.3)

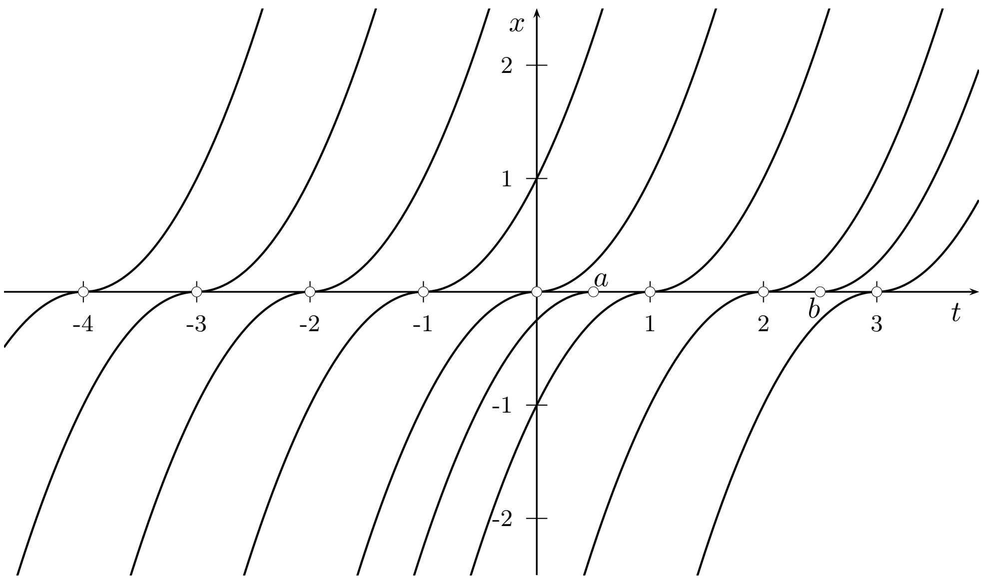

Figure 5.3 – Les solutions strictement positives ou négatives de $x'(t) = 2\sqrt{|x(t)|}$ ne sont pas maximales : on peut les raccorder entre elles ou à la solution nulle.

Solutions maximales. Problème de Cauchy.

Les solutions trouvées dans les deux cas précédents ne sont pas maximales, car on peut les « raccorder » (de manière dérivable !) le long de l'axe Ox entre elles ou à la solution $x = 0$. Par exemple, pour tous $a \leq b$ fixés, la fonction

$$x(t) = \begin{cases} -(t-a)^2 & \text{pour tout} \quad t \leq a \\ 0 & \text{pour tout} \quad a \leq t \leq b \\ (t-b)^2 & \text{pour tout} \quad b \leq t \end{cases}$$

est solution globale de (A) (voir Fig. 5.3). En particulier, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = 2\sqrt{|x(t)|} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

admet une infinité de solutions globales (donc maximales).
Il en est de même pour toute condition initiale $x(t_0) = x_0$ du plan.

5.4 Le Théorème de Cauchy-Lipschitz

Voici un résultat qui garantit l'existence et unicité de solution maximale du problème de Cauchy

Théorème 5.4.1 ***(Cauchy-Lipschitz)***
Soient U et Ω des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$.
Soit $F : U \times \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant les conditions suivantes :

1. *F est continue sur $U \times \Omega$.*
2. *La fonction $(t, x) \to \dfrac{\partial F}{\partial x}(t, x)$ est définie et continue sur $U \times \Omega$.*

(on a ces deux conditions si par exemple F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U \times \Omega$)

Alors, pour tout $(t_0, x_0) \in U \times \Omega$, le problème de Cauchy

$$(P) \qquad \begin{cases} x'(t) = F(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

admet une unique solution maximale.

Remarques

1. Si le Th de Cauchy-Lipschitz s'applique à l'équation différentielle (ED) sur $U \times \Omega$, alors toute solution non maximale de cette équation se prolonge en une unique solution maximale.

2. Dans le cas de l'équation autonome

$$x'(t) = 2\sqrt{|x(t)|} \qquad (A)$$

la fonction $F : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par $F(t,x) = 2\sqrt{|x|}$: elle vérifie le Th de Cauchy-Lipschitz sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$ et $\mathbb{R}\times]-\infty,0[$, mais sa dérivée partielle par rapport à x n'existe pas en tout point de la forme $(t,0)$.

3. Revenons à l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$ par

$$x'(t) = 1 + x^2(t) \qquad (E)$$

Le Th de Cauchy-Lipschitz s'applique sur le plan tout entier. Utilisons ce résultat pour terminer sans peine la résolution de (E).

On sait que la fonction $x :]-\pi/2,\ \pi/2\,[\to \mathbb{R}$ définie par $x(t) = \tan t$ est solution maximale de (E). Comme notre équation est autonome, on obtient par translation (voir Prop. 5.2.1) la famille de solutions

$$x_c :]-\pi/2+c,\ \pi/2+c\,[\to \mathbb{R} \ \text{ définie par } \ x_c(t) = \tan(t-c)$$

pour tout $c \in \mathbb{R}$ (Fig. 5.4). Montrons qu'elles sont les seules solutions maximales de (E) :

Si $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ est fixé, il existe une solution x_c vérifiant la condition initiale

$$x_c(t_0) = \tan(t_0 - c) = x_0$$

C'est géométriquement évident. Analytiquement, il suffit de poser $c = c_0 = t_0 + \arctan(x_0)$ (comme $\arctan(x_0) \in\ ]-\pi/2,\ \pi/2\,[$, on a bien $t_0 \in\ ]-\pi/2+c_0,\ \pi/2+c_0\,[$).

D'après Cauchy-Lipschitz, x_{c_0} est l'unique solution maximale du problème de Cauchy pour la condition initiale $x(t_0) = x_0$. Comme $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ est arbitraire, il vient que les fonctions x_c sont les seules solutions maximales de (E) (résultat qu'on peut retrouver aussi par le calcul).

Remarquons que (E) n'admet aucune solution globale...

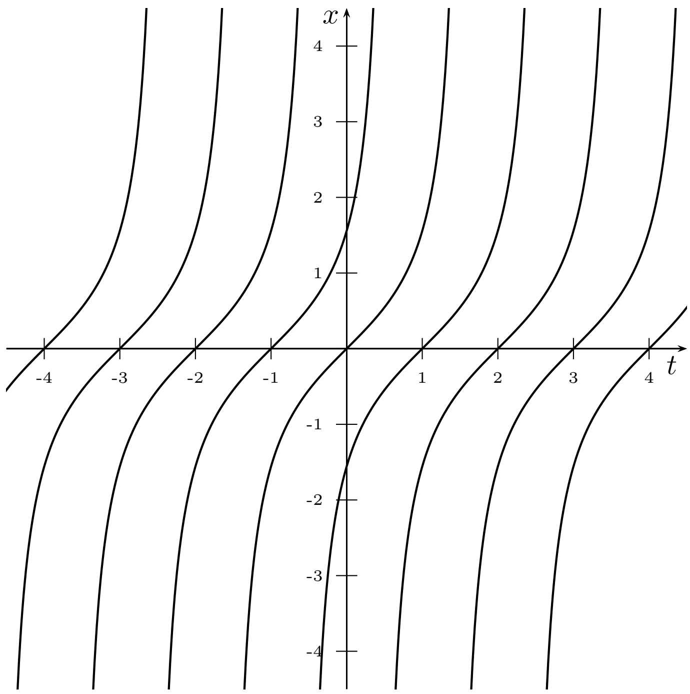

Figure 5.4 – Les solutions maximales de $x'(t) = 1+x^2(t)$ sont les fonctions $x_c(t) = \tan(t-c)$.

Si Cauchy-Lipschitz s'applique, alors les graphes des solutions maximales forment une partition de $U \times \Omega$

Voici deux conséquences importantes du Th. de Cauchy-Lipschitz

> *I. Si le Th. de Cauchy-Lipschitz s'applique à l'équation différentielle*
>
> $$x'(t) = F(t, x(t)) \tag{ED}$$
>
> *sur $U \times \Omega$, alors les graphes de deux solutions maximales distinctes de cette équation sont disjoints.*

En effet, rappelons d'abord que si $x : I \to \mathbb{R}$ est une solution de (ED), son graphe est le sous-ensemble du plan

$$\{\ (t, x(t)) \mid t \in I\ \} \subset U \times \Omega$$

Si $x_1 : I_1 \to \mathbb{R}$ et $x_2 : I_2 \to \mathbb{R}$ sont deux solutions maximales de (ED) et $x_1(t_0) = x_2(t_0) = x_0$ pour un $t_0 \in I_1 \cap I_2$ (graphes non disjoints), alors elles sont solutions du **même** problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = F(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

et **l'unicité** de solution donne : $I_1 = I_2$ et $x_1 = x_2$ (solutions identiques).

Remarquons aussi que

> *II. Si le Th. de Cauchy-Lipschitz s'applique à l'équation (ED) sur $U \times \Omega$, alors la réunion des graphes des solutions maximales de l'équation est $U \times \Omega$*

En effet, le résultat découle de **l'existence** de solution vérifiant la condition initiale $x(t_0) = x_0$, pour tout $(t_0, x_0) \in U \times \Omega$.

On récapitule les deux propriétés que nous venons de mettre en évidence en disant que

> *Les graphes des solutions maximales forment une partition de $U \times \Omega$*

Les Figures 5.4 et 5.5 illustrent ce fait sur $U \times \Omega = \mathbb{R}^2$ pour leurs équations différentiels respectives. Le résultat est faux pour l'équation $x'(t) = 2\sqrt{|x(t)|}$ (voir Sect. 5.3 et Fig. 5.3).

Le rôle des solutions constantes

Illustrons l'importance des solutions constantes lorsque le Th. de Cauchy-Lipschitz s'applique (nous le verrons aussi dans l'exemple de la Sect. 5.6). Considérons l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$ par

$$x'(t) = x^2(t) \tag{E}$$

Ici $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est $F(t, x) = x^2$ et le Th. de Cauchy-Lipschitz s'applique sur $\mathbb{R}^2$.

La fonction nulle est solution de (E) sur $\mathbb{R}$: elle est la seule solution maximale constante. Si $x : I \to \mathbb{R}$ est une solution maximale non identiquement nulle, alors $x(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$ (graphes disjoints).

Par conséquent, à partir de la continuité de la fonction x sur l'intervalle I on a

1. Ou bien $x(t) > 0$ pour tout $t \in I$.
2. Ou bien $x(t) < 0$ pour tout $t \in I$.

En particulier, la fonction $t \to x(t)$ est strictement croissante sur I (d'après (E)).
Pour tout $t \in I$, l'équation s'écrit

$$\frac{x'(t)}{x^2(t)} = 1$$

Puisque les primitives sur I de chaque terme sont

$$\int \frac{x'(t)}{x(t)^2} dt = -\frac{1}{x(t)} + k \quad \text{et} \quad \int 1 dt = t + k'$$

il vient que les solutions maximales de (E) sont (voir Fig. 5.5) :

1. Les fonctions $t \to \dfrac{1}{c-t}$ sur $]-\infty, c[$, pour tout $c \in \mathbb{R}$.
2. Les fonctions $t \to \dfrac{1}{c-t}$ sur $]c, +\infty[$, pour tout $c \in \mathbb{R}$.
3. La fonction identiquement nulle.

Les solutions données dans 1. et 2. ne sont pas globales.

Remarquons qu'elles s'obtiennent par translation à partir de $t \to -\frac{1}{t}$ (solution sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$), ce qui n'est pas surprenant puisque (E) est autonome (voir Prop. 5.2.1).

On constate, enfin, que les graphes des solutions maximales forment bien une partition du plan.

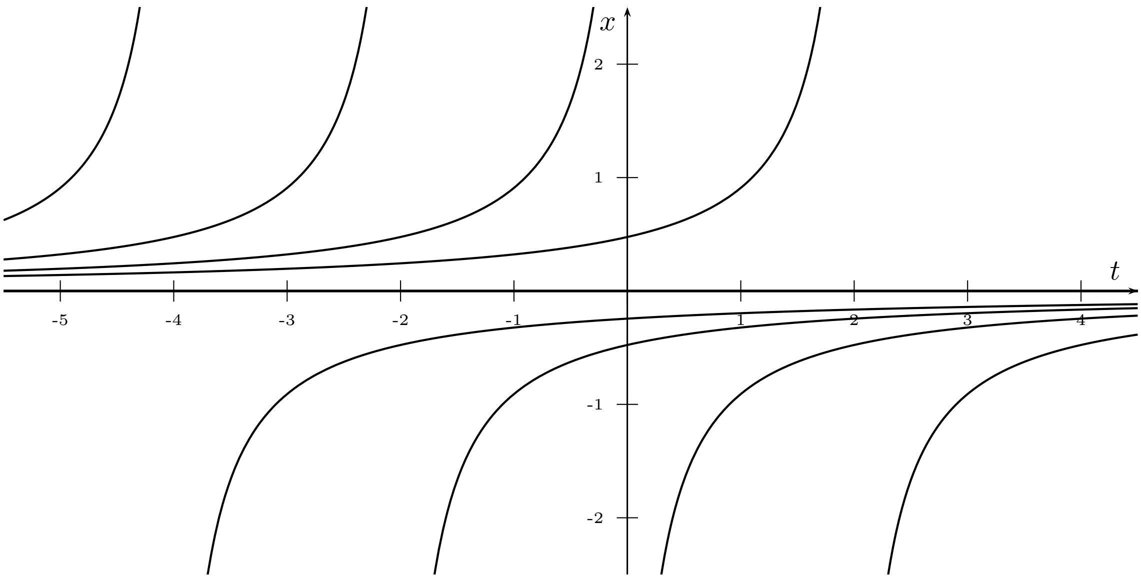

Figure 5.5 – La fonction nulle est solution de $x'(t) = x^2(t)$. Le Th. de Cauchy-Lipschitz implique que les graphes des autres solutions restent dans les demi-plans $x > 0$ ou $x < 0$.

5.5 Le Théorème des bouts

Il nous donne des informations sur les solutions maximales non globales de l'équation différentielle

$$x'(t) = F(t, x(t)) \tag{ED}$$

si $F : U \times \Omega \to \mathbb{R}$ est suffisamment régulière. L'énoncé général du théorème se trouve à la fin de la section. Nous considérons d'abord un cas particulier important :

Le cas $\Omega = \mathbb{R}$

L'équation $x'(t) = x^2(t)$ est définie sur $U \times \Omega = \mathbb{R}^2$. La solution $x :]-\infty, 0\,[\to \mathbb{R}$ définie par $x(t) = -1/t$ est maximale. En effet, elle ne peut pas être prolongée par une autre solution car elle admet une limite infinie en 0^-.

L'équation $x'(t) = 1 + x^2(t)$ est définie sur $U \times \Omega = \mathbb{R}^2$. La solution $x :]-\pi/2\,,\,\pi/2\,[\to \mathbb{R}$ définie par $x(t) = \tan t$ admet des limites infinies en $-\pi/2^+$ et $\pi/2^-$ et ne peut pas être prolongée par une autre solution. Elle est donc maximale.

Le résultat suivant nous dit que, si $\Omega = \mathbb{R}$, ces cas de figure sont généraux :

> *(Théorème des bouts)*
> *Soit l'intervalle $U =]\,u_1,\ u_2\,[$ (u_1 réel ou $-\infty$, u_2 réel ou $+\infty$).*
>
> *Soit $F : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue en tout point $(t, x) \in U \times \mathbb{R}$, avec $\frac{\partial F}{\partial x}$ continue sur $U \times \mathbb{R}$ (il est en particulier ainsi lorsque F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U \times \mathbb{R}$).*
>
> *Soit l'intervalle $I =]\,t_1,\ t_2\,[\, \subset\,]\,u_1,\ u_2\,[\, = U$ (t_1 réel ou $-\infty$, t_2 réel ou $+\infty$)*
> *et $x : I \to \mathbb{R}$ une solution maximale de (ED).*
>
> 1. *Si $t_2 < u_2$, alors $\lim\limits_{t \to t_2^-} x(t) = -\infty$ ou $+\infty$.*
> 2. *Si $u_1 < t_1$, alors $\lim\limits_{t \to t_1^+} x(t) = -\infty$ ou $+\infty$.*

Remarques

1. Une solution $x : I \to \mathbb{R}$ maximale non globale de (ED) vérifie au moins l'une des conditions $t_2 < u_2$ ou $u_1 < t_1$ (elle peut vérifier les deux) et le théorème des bouts nous dit qu'elle **« explose en temps fini »** (dans le premier cas, t_2 est nécessairement réel ; dans le second, t_1 l'est aussi).

2. On utilise souvent la conséquence suivante :

> *Dans les hypothèses de l'énoncé ($\Omega = \mathbb{R}$...), si $x : I \to \mathbb{R}$ est une solution maximale de (ED) bornée sur I, alors elle est globale : $I = U$.*

En effet, dire que la fonction x est bornée sur I signifie qu'il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que $m \leq x(t) \leq M$, pour tout $t \in I$: la solution x ne peut pas exploser, donc $t_1 = u_1$ et $t_2 = u_2$.

Le cas général

> **Théorème 5.5.1** *(Théorème des bouts) Soient les intervalles* $U = \,]\,u_1,\ u_2\,[$ *et* $\Omega = \,]\,\omega_1,\ \omega_2\,[$ *(*u_1, ω_1 *réels ou* $-\infty$*,* u_2, ω_2 *réels ou* $+\infty$*).*
>
> *Soit* $F : U \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue sur* $U \times \Omega$*, avec* $\frac{\partial F}{\partial x}$ *continue sur* $U \times \Omega$*.*
>
> *Soit* $I = \,]\,t_1,\ t_2\,[\ \subset\ ]\,u_1,\ u_2\,[\ = U$ *(*t_1 *réel ou* $-\infty$*,* t_2 *réel ou* $+\infty$*) et* $x : I \to \mathbb{R}$ *une solution maximale de l'équation différentielle* (ED)*. Alors*
>
> 1. *Si* $t_2 < u_2$*, on a* $\lim\limits_{t \to t_2^-} x(t) = \omega_1$ *ou* ω_2 *(les extrémités de l'intervalle* Ω*).*
> 2. *Si* $u_1 < t_1$*, on a* $\lim\limits_{t \to t_1^+} x(t) = \omega_1$ *ou* ω_2*.*

Remarque. Comme précédemment, les conditions $t_2 < u_2$ ou $u_1 < t_1$ signifient que la solution maximale $x : I \to \mathbb{R}$ n'est pas globale.

5.6 Équations à variables séparables : un exemple d'étude

Une équation à variables séparables est une équation différentielle de la forme

$$x'(t) = a(t) \cdot b(x(t)) \qquad (E)$$

où $a : U \to \mathbb{R}$ et $b : \Omega \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions données, définies sur les intervalles ouverts U et Ω.

Ici $x'(t) = F(t, x(t))$ avec $F : U \times \Omega \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(t, x) = a(t)b(x)$$

En particulier, si a est continue sur U et b est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω, alors les fonctions F et

$$\frac{\partial F}{\partial x} = a(t)b'(x)$$

sont continues sur $U \times \Omega$: les théorèmes de Cauchy-Lipschitz et des bouts s'appliquent à l'équation (E) sur $U \times \Omega$.

Remarquons enfin qu'une équation autonome est à variables séparables.

Un exemple. Écriture sous la forme (ED)

On considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$

$$x'(t) = t(x^2(t) - 1) \qquad (E)$$

On nous dit que l'équation différentielle est définie sur $\mathbb{R}$: ce qui signifie que $t \in U = \mathbb{R}$.

L'équation (E) s'écrit $x'(t) = F(t, x(t))$ avec $F(t, x) = t(x^2 - 1)$ définie sur $U \times \Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Les fonctions F et $\frac{\partial F}{\partial x} = 2tx$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$, et le Th. de Cauchy-Lipschitz implique que, pour tout $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ il existe une unique solution maximale de (E) vérifiant la condition $x(t_0) = x_0$.

Le Th. des bouts s'applique aussi à l'équation (E) sur $\mathbb{R}^2$.

Étude qualitatif

On remarque que $F(-t, x) = -F(t, x)$ pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}^2$: le champ de tangentes de l'équation (E) est donc symétrique par rapport à l'axe Ox (et les graphes des solutions le sont aussi).

Il est très facile de déterminer les régions du plan où $F(t, x)$ (la pente de la tangente au point (t, x)) est positive, négative ou nulle : ceci nous renseigne sur la monotonie des solutions. La Figure 5.6 illustre le champ de tangentes de (E) et les graphes de quelques solutions.

Recherche des solutions maximales constantes.
Conséquences du Th. de Cauchy-Lipschitz et du Th. des bouts

Soit $x : I \to \mathbb{R}$ est une solution constante de (E) : $x(t) = c$ pour tout $t \in I$, d'où

$$0 = x'(t) = t(c^2 - 1)$$

sur I, c'est-à-dire que $c = \pm 1$, en particulier : **les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $t \to 1$ et $t \to -1$ sont les solutions maximales constantes de (E) (elles sont globales)**.

Comme les graphes des solutions maximales sont disjoints (conséquence du Th. de Cauchy-Lipschitz) et que les solutions sont continues, on a

> *Soit $x : I \to \mathbb{R}$ est une solution maximale de (E).*
>
> *a) Si $x(t_0) < -1$ pour un $t_0 \in I$, alors $x(t) < -1$ pour tout $t \in I$.*
>
> *b) Si $-1 < x(t_0) < 1$ pour un $t_0 \in I$, alors $-1 < x(t) < 1$ pour tout $t \in I$.*
>
> *c) Si $1 < x(t_0)$ pour un $t_0 \in I$, alors $1 < x(t)$ pour tout $t \in I$.*
>
> *Enfin, si $x(t_0) = \pm 1$ pour un $t_0 \in I$, on retrouve les solutions constantes.*

Remarquons que, dans le cas b), les solutions sont bornées (majorées et minorées) sur I : le phénomène d'explosion en temps fini ne peut pas avoir lieu et le Th. des bouts nous garantit que **les solutions maximales vérifiant une condition du type $-1 < x(t_0) < 1$ sont globales (ici définies sur $\mathbb{R}$).**

Résolution d'un problème de Cauchy

Considérons le problème de Cauchy

$$(P) \qquad \begin{cases} x'(t) = t(x^2(t) - 1) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

Soit $x_1 : I_1 \to \mathbb{R}$ la solution maximale de (P).
Comme $-1 < x_1(0) < 1$ nous sommes dans le cas $b)$: $-1 < x_1(t) < 1$ pour tout $t \in I_1$ (et $I_1 = \mathbb{R}$, résultat que nous retrouverons par le calcul). En particulier

$$x_1'(t) = t(x_1^2(t) - 1) \ \Leftrightarrow\ \frac{x_1'(t)}{x_1^2(t) - 1} = t$$

pour tout $t \in I_1$.
On peut trouver les primitives su I_1 de chaque membre, puis ajuster la constante grâce à la condition $x_1(0) = 0$. On peut aussi procéder comme suit

$$\int_0^t \frac{x_1'(u)}{x_1^2(u) - 1}\, du = \int_0^t u\, du \qquad (*)$$

pour tout $t \in I_1$ (remarquer que $0 \in I_1$).

D'une part

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{x_1'(u)}{x_1^2(u) - 1}\, du &= \frac{1}{2}\left(\int_0^t \frac{x_1'(u)}{x_1(u) - 1}\, du - \int_0^t \frac{x_1'(u)}{x_1(u) + 1}\, du\right)\\ &= \frac{1}{2}\left([\, \ln|x_1(u) - 1|\,]_{u=0}^{u=t} - [\, \ln|x_1(u) + 1|\,]_{u=0}^{u=t} \right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\ln|x_1(t) - 1| - \ln|x_1(t) + 1| \right)\\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{|x_1(t) - 1|}{|x_1(t) + 1|} \right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 - x_1(t)}{1 + x_1(t)} \right)\end{aligned}$$

(pour enlever la valeur absolue, utiliser $-1 < x_1(t) < 1$).

D'autre part,

$$\int_0^t u\, du = \frac{t^2}{2}$$

et l'égalité $(*)$ s'écrit, pour tout $t \in I_1$,

$$\ln\left(\frac{1 - x_1(t)}{1 + x_1(t)} \right) = t^2, \ \text{ d'où } \ \frac{1 - x_1(t)}{1 + x_1(t)} = e^{t^2}$$

et on trouve

$$x_1(t) = \frac{1 - e^{t^2}}{1 + e^{t^2}}$$

Puisque I_1 est le plus grand intervalle contenant $t = 0$ où la fonction x_1 (solution maximale !) est définie, on a ici $I_1 = \mathbb{R}$ (comme prévu par le Th. des bouts).

Exercice. Montrer que la solution maximale du problème de Cauchy

$$(P) \qquad \begin{cases} x'(t) = t(x^2(t) - 1) \\ x(0) = 3 \end{cases}$$

est la fonction $x : \left]\, -\sqrt{\ln 2}, \sqrt{\ln 2}\, \right[\to \mathbb{R}$ définie par $x(t) = \dfrac{2 + e^{t^2}}{2 - e^{t^2}}$

On remarque qu'elle n'est pas globale.

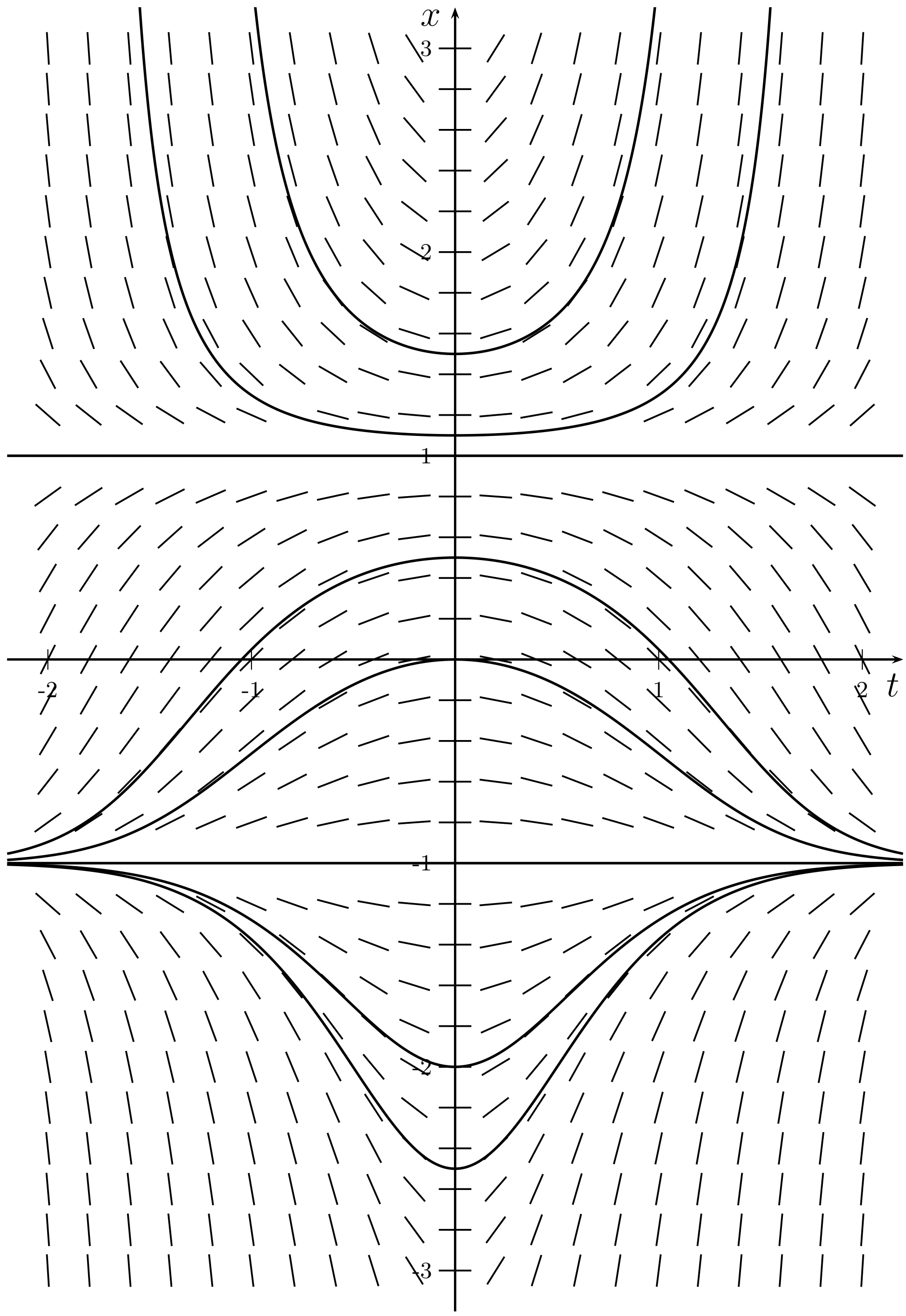

FIGURE 5.6 – Champ de tangentes et solutions de $x'(t) = t(x^2(t) - 1)$

Remarque. Fixons $x_0 < -1$. Soit $x_2 : I_2 \to \mathbb{R}$ la solution maximale de (E) vérifiant la condition initiale $x_2(0) = x_0$. Notons $I_2 =]a, b[$. Montrons que cette solution est globale :
On sait que $x_2(t) < -1$ pour tout $t \in I_2$: le graphe de $t \to x_2(t)$ est dans le demi-plan $x < -1$.
Puisque $F(t, x) = t(x^2 - 1) < 0$ si $t < 0$ et $x < -1$, il vient que x_2 est décroissante sur $]a, 0]$.
Comme $F(t, x) > 0$ si $t > 0$ et $x < -1$, la fonction x_2 est croissante sur $[0, b[$.
Par conséquent, la fonction x_2 présente un minimum absolu au point $t = 0$.
On a ainsi $x_0 \leq x_2(t) < -1$ pour tout $t \in I_2$ et le Th. des bouts donne $I_2 = \mathbb{R}$.

Table des matières