FEUILLE D'EXERCICES N$^{\text{O}}$ 10

Exercice 1. On considère le système d'équations linéaires

$$(S) \qquad \begin{cases} x+2y+3z=a \\ x+6y+5z=b \\ x+z=c \\ x+y+2z=d \\ y+z=e \end{cases}$$

1) Mettre le système sous forme échelonnée. Quelles sont les inconnues principales ? non principales ? 2) Sous forme échelonnée réduite. 3) Rang du système ? 4) Conditions de compatibilité ? Si les conditions de compatibilité sont satisfaites : 5) Dimension de l'espace des solutions ? 6) Donner un repère de l'espace des solutions.

Exercice 2. On considère le système d'équations linéaires

$$(S) \qquad \begin{cases} x+y+z+u+v=0 \\ x+y-z-u+v=1 \\ x-y+z-u-v=2 \end{cases}$$

Mêmes questions que dans l'exercice précédent.

Exercice 3. On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie par les relations

$$\begin{cases} x' = 2x-y+2z+t \\ y' = 3x-y+2z+2t \\ z' = \quad\quad y-2z+t \end{cases}$$

On note A la matrice de cette application linéaire.

a) Écrire la matrice A.

b) Expliquer pourquoi les vecteurs-colonnes

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

engendrent le sous-espace Im f de $\mathbb{R}^3$.

c) Donner une base de Im f.

d) Donner un système d'équations linéaires définissant Im f comportant le nombre minimum d'équations.

e) Donner une base de Ker f.

f) Donner un système d'équations linéaires définissant Ker f comportant le nombre minimum d'équations.

g) Déterminer

– l'image du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

– l'image réciproque du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (si ce sous-espace affine n'est pas vide, on en donnera une représentation paramétrique).

– l'image réciproque du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

h) Quel est le rang de A ?

Exercice 4. On considère la matrice

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

On note f_A l'application $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ ayant A pour matrice, autrement dit l'application $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{AX}$.

a) Donner une base du sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}\, f_\mathrm{A}$ de $\mathbb{R}^4$. *On rappelle que* $\mathrm{Ker}\, f_\mathrm{A}$ *est l'ensemble des* $\mathrm{X} \in \mathbb{R}^4$ *tels que* $\mathrm{AX} = 0$.

b) Donner une base de $\mathrm{Im}\, f_\mathrm{A}$. *On rappelle que* $\mathrm{Im}\, f_\mathrm{A}$ *est aussi le sous-espace vectoriel engendré dans* $\mathbb{R}^4$ *par les colonnes de* A *(puisque* $\mathrm{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix} = x_1\mathrm{A}_1 + \cdots + x_4\mathrm{A}_4$, *où* A_1, ..., A_4 *sont les colonnes de* A*)*.

c) Donner un système d'équations linéaires définissant $\mathrm{Ker}\, f_\mathrm{A}$ comportant le nombre minimum d'équations.

d) Donner un système d'équations linéaires définissant $\mathrm{Im}\, f_\mathrm{A}$ comportant le nombre minimum d'équations.

Exercice 5. On considère la matrice

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Soit E l'image de l'application $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{AX}$ de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$. On rappelle que, puisque

$$\mathrm{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_1\mathrm{A}_1 + x_2\mathrm{A}_2 + x_3\mathrm{A}_3 + x_4\mathrm{A}_4$$

où A_1, A_2, A_3, A_4 sont les colonnes de A, E est aussi le sous-espace vectoriel engendré par les colonnes de A.

a) Quelle est la dimension de E ? Donner une base de E.

b) Donner un système d'équations linéaires définissant le sous-espace E.

Exercice 6. On considère le sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^5$ défini par les équations

$$(\mathrm{S}) \qquad \begin{cases} x+y+z+u+v = 0 \\ x-y+3z+u-v = 0 \\ x+y-z-u+v = 0 \\ x+3y-z+u+3v = 0 \\ x-y+z-u-v = 0 \end{cases}$$

a) Au moyen de la méthode du pivot, trouver un système d'équations linéaires (S') définissant le même sous-espace vectoriel F et comportant aussi peu d'équations que possibles.

b) Trouver un système d'équations linéaires (S'') formé à partir d'équations de (S) (on dit un système *extrait* de (S)) qui comporte autant d'équations que (S') et qui définisse lui aussi le sous-espace F.

c) Vérifier que les équations qui figurent dans (S) et qui ne figurent pas dans (S'') sont des combinaisons linéaires des équations de (S'').

Exercice 7. *a*) Montrer que si les trois vecteurs v_1, v_2, v_3 sont liés, les trois vecteurs $w_1 = v_1 + v_2$, $w_1 = v_2 + v_3$, $w_3 = v_3 + v_1$ le sont aussi.

b) Montrer que si les trois vecteurs v_1, v_2, v_3 sont indépendants, les trois vecteurs $w_1 = v_1 + v_2$, $w_1 = v_2 + v_3$, $w_3 = v_3 + v_1$ le sont aussi.