PARIS 7 MA1
2008-2009 Groupes 1M2, 1M3, 1M4

DEVOIR SUR TABLE N$^{\text{O}}$ 1

(8 octobre 2008. Durée 1 h 50)

Exercice 1. Pour $a, b > 0$, on définit la moyenne quadratique Q de a et b en posant

$$\mathrm{Q}^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$$

(le carré de Q est la moyenne (arithmétique) des carrés de a et b). Autrement dit,

$$\mathrm{Q} = \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2)}.$$

On note A la moyenne arithmétique de a et b, G la moyenne géométrique.

a) En supposant $a \leqslant b$, montrer que

$$a \leqslant \mathrm{G} \leqslant \mathrm{A} \leqslant \mathrm{Q} \leqslant b.$$

b) Monter que si deux des moyennes $\mathrm{G}, \mathrm{A}, \mathrm{Q}$ sont égales, on a $a = b$, d'où $a = \mathrm{G} = \mathrm{A} = \mathrm{Q} = b$.

Exercice 2. Le prix d'une tonne de cuivre a augmenté de 10% entre 2000 et 2001, de 20% entre 2001 et 2002, de 30% entre 2002 et 2003, et baissé de 10% en 2004.

a) Quel est (en pourcentage) l'augmentation sur 4 ans ?

b) Quel est (en pourcentage) l'augmentation moyenne par an pendant la période 2000-2004 ?

Exercice 3. *(Question de cours.)* Énoncer la formule du binôme (en donnant une définition des coefficients ou un moyen de les calculer).

Exercice 4. Démontrer par récurrence sur n entier $\geqslant 0$ que

$$1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!} \leqslant e^x$$

pour $x \geqslant 0$ et pour tout $n \geqslant 0$. *Indication.* Étudier les variations de la fonction $1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!} - e^x$

Exercice 5. Écrire $a^6 - b^6$ comme un produit de quatre facteurs.

Exercice 6. Démontrer que

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2.$$