Université Paris 7 | **Premier semestre 2008-2009**
L1 MASS - Groupe 1M4 | **MA1 - Algèbre et Analyse élémentaires**

Interrogation 2 - 20 novembre 2008.

Les exercices sont sensiblement rangés par ordre de difficulté croissante, mais vous pouvez les traiter dans l'ordre que vous voulez.

Important : *La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans la notation.*

Exercice 1. *Calcul matriciel*

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x', y', z')$ l'application linéaire définie par

$$\begin{aligned} x' &= 2x - 3y + z \\ y' &= y - z \\ z' &= x + y - 2z \end{aligned}$$

et $g : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x', y', z')$ l'application linéaire définie par

$$\begin{aligned} x' &= x + 2y - z \\ y' &= x - y + z \\ z' &= 2x - 3z \end{aligned}$$

a) Ecrire les matrices A et B de, respectivement, f et g dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

b) Calculer le produit AB et interpréter la matrice obtenue en termes d'application linéaire.

Exercice 2. *Barycentres*

Soient A, B, C trois points du plan. Soient α, β, γ trois réels tels que $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

Montrer que le minimum de $f(M) = \alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2$ (pour M dans le plan) existe et est atteint en un point unique. [On pourra considérer un barycentre bien choisi.]

Exercice 3. *Récurrence*

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 5$ et pour tout $n \geq 2$ $u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2}$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = 2^n + 3^n$$

Exercice 4. *Systèmes linéaires*

On considère le système (S) suivant (où m, a, b, c sont des paramètres réels) :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} 2mx & + & y & + & z & = & a \\ x & + & 2my & + & z & = & b \\ x & + & y & + & 2mz & = & c \end{array} \right.$$

a) Montrer (sans résoudre le système) que si $m \notin \{-1, \frac{1}{2}\}$, alors le système (S) admet une unique solution quelles que soient les valeurs de a, b, c. [On pourra vérifier que $4m^3 - 3m + 1 = (m+1)(2m-1)^2$.]

b) Déterminer la solution du système dans le cas où $m = 0$, en fonction de a, b, c.

c) On suppose ici que $m = \frac{1}{2}$. Montrer que si (S) a une solution alors $a = b = c$. Dans le cas où $a = b = c$, que représente géométriquement l'ensemble des points $M = (x, y, z)$ de l'espace qui sont solutions de (S) ?

d) On suppose maintenant que $m = -1$. Montrer que si (S) a une solution alors $a + b + c = 0$. Dans le cas où $a+b+c = 0$, montrer que l'une des équations est conséquence des deux autres ; donner alors une description géométrique de l'ensemble des points $M = (x, y, z)$ solutions de (S).

Exercice 5. *Droites, plans, distance*

Dans tout l'exercice on se place dans l'espace à trois dimensions.

a) Soit (D) la droite définie par les équations suivantes :

$$\begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ 2x - y + z + 2 = 0 \end{cases}$$

Donner une représentation paramétrique de (D).

b) Soit (Π) le plan défini par la représentation paramétrique suivante :

$$\begin{cases} x = 2 + 2s + 2t \\ y = -2 - t \\ z = -2 - s + t \end{cases} \qquad (s, t \in \mathbb{R})$$

Donner une équation de (Π).

c) Montrer que la droite (D) est parallèle au plan (Π). [On pourra montrer —mais ce n'est pas une méthode imposée— qu'il existe un plan parallèle à (Π) et qui contient (D).]

d) Montrer que pour tout point M appartenant à (D), $\text{dist}(M, \Pi) = \sqrt{21}$.

Exercice 6. *Composées de symétries centrales*

On se place dans le plan muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit A un point du plan. On note s_A la symétrie centrale de centre A, c'est-à-dire que, pour M un point du plan, $M' = s_A(M)$ si et seulement si A est le milieu de $[MM']$, soit en termes vectoriels $\overrightarrow{AM'} = -\overrightarrow{AM}$. En particulier A est le seul point invariant par s_A, cette propriété caractérise le centre de la symétrie.

a) Soient A et B deux points du plan. Montrer que l'application composée $s_B \circ s_A$ est une translation de vecteur $2\overrightarrow{AB}$ (si M est un point du plan et $M'' = s_B \circ s_A(M)$, on pourra exprimer $\overrightarrow{OM''}$ en fonction de $\overrightarrow{OM}$).

b) Soient $\vec{u}$ un vecteur du plan et A un point du plan. On note t la translation de vecteur $\vec{u}$. Montrer que l'application composée $s_A \circ t$ est une symétrie centrale de centre B, où B est défini par $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} - \frac{1}{2}\vec{u}$.