Université Paris 7 — **Premier semestre 2008-2009**
L1 MASS - Groupe 1M4 — **MA1 - Algèbre et Analyse élémentaires**

Corrigé de l'nterrogation 2 - 20 novembre 2008.

Les exercices sont sensiblement rangés par ordre de difficulté croissante, mais vous pouvez les traiter dans l'ordre que vous voulez.

Important : *La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans la notation.*

Exercice 1. *Calcul matriciel*

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x', y', z')$ l'application linéaire définie par

$$\begin{aligned} x' &= 2x - 3y + z \\ y' &= y - z \\ z' &= x + y - 2z \end{aligned}$$

et $g : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x', y', z')$ l'application linéaire définie par

$$\begin{aligned} x' &= x + 2y - z \\ y' &= x - y + z \\ z' &= 2x - 3z \end{aligned}$$

a) Ecrire les matrices A et B de, respectivement, f et g dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

b) Calculer le produit AB et interpréter la matrice obtenue en termes d'application linéaire.

$AB = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -8 \\ -1 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$. La matrice AB correspond à l'application linéaire $f \circ g$, l'application $f \circ g : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x', y', z')$ est donc définie par

$$\begin{aligned} x' &= x + 7y - 8z \\ y' &= -x - y + 4z \\ z' &= -2x + y + 6z \end{aligned}$$

Exercice 2. *Barycentres*

Soient A, B, C trois points du plan. Soient α, β, γ trois réels tels que $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

Montrer que le minimum de $f(M) = \alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2$ (pour M dans le plan) existe et est atteint en un point unique. [On pourra considérer un barycentre bien choisi.]

Soit G le barycentre de (A, α), (B, β), (C, γ). G est bien défini car $\alpha + \beta + \gamma = 1 \neq 0$. Alors,

$$\begin{aligned} f(M) = \alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 &= \alpha(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + \beta(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + \gamma(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2 \\ &= (\alpha + \beta + \gamma)MG^2 + \alpha GA^2 + \beta GB^2 + \gamma GC^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot (\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC}) \\ &= (\alpha + \beta + \gamma)MG^2 + \alpha GA^2 + \beta GB^2 + \gamma GC^2 \text{ par définition du barycentre.} \\ &= MG^2 + \alpha GA^2 + \beta GB^2 + \gamma GC^2 \end{aligned}$$

On en déduit que $f(M) \geq \alpha GA^2 + \beta GB^2 + \gamma GC^2$ avec égalité si et seulement si $M = G$. Le minimum de f existe donc et est atteint en un unique point, savoir G.

Exercice 3. *Récurrence*

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 5$ et pour tout $n \geq 2$ $u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2}$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = 2^n + 3^n$$

On veut montrer par récurrence sur n la propriété $\mathcal{P}(n)$: "$u_n = 2^n + 3^n$. La relation de récurrence définissant (u_n) porte sur deux termes, il faut donc faire une initialisation sur deux termes,. De même lors du pas de la récurrence, il faudra faire une hypothèse de récurrence sur deux termes.

La propriété est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$, en effet $u_0 = 2 = 2^0 + 3^0$ et $u_1 = 5 = 2^1 + 3^1$.

Soit $n \geq 0$. On suppose la propriété vraie au rang n et au rang $n+1$. Montrons-la au rang $n+2$.

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 5u_{n+1} - 6u_n \\ &= 5(2^{n+1} + 3^{n+1}) - 6(2^n + 3^n) \text{ par hypothèse de récurrence.} \\ &= 2^n(5 \times 2 - 6) + 3^n(5 \times 3 - 6) \\ &= 2^{n+2} + 3^{n+2} \end{aligned}$$

La propriété est vraie au rang $n+2$.

On en déduit alors par récurrence qu'elle est vraie pour tout n.

Exercice 4. *Systèmes linéaires*

On considère le système (S) suivant (où m, a, b, c sont des paramètres réels) :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} 2mx & + & y & + & z & = & a \\ x & + & 2my & + & z & = & b \\ x & + & y & + & 2mz & = & c \end{array} \right.$$

a) Montrer (sans résoudre le système) que si $m \notin \{-1, \frac{1}{2}\}$, alors le système (S) admet une unique solution quelles que soient les valeurs de a, b, c. [On pourra vérifier que $4m^3 - 3m + 1 = (m+1)(2m-1)^2$.]

On sait que le système a une unique solution si et seulement si son déterminant est non nul. Calcul du déterminant (par exemple avec la règle de Sarrus) :

$$D = 8m^3 + 1 + 1 - 2m - 2m - 2m = 8m^3 - 6m + 2 = 2(4m^3 - 3m + 1)$$

On cherche à factoriser le polynôme $4m^3 - 3m + 1$. On voit que (-1) est une racine évidente, donc $4m^3 - 3m + 1 = (m+1)(\alpha m^2 + \beta m + \gamma)$. On trouve α, β, γ en développant et en identifiant. On en déduit :

$$D = 2(m+1)(4m^2 - 4m + 2) = 2(m+1)(2m-1)^2$$

Ainsi, le déterminant est nul si et seulement si $m = -1$ ou $1/2$. En particulier, si $m \notin \{-1, \frac{1}{2}\}$, alors le déterminant du système (S) est non nul, et donc (S) admet une unique solution (et ce quelles que soient les valeurs de a, b, c).

b) Déterminer la solution du système dans le cas où $m = 0$, en fonction de a, b, c.

Le système (S) devient : $\left\{ \begin{array}{ccccccc} & & y & + & z & = & a \\ x & & & + & z & = & b \\ x & + & y & & & = & c \end{array} \right.$

On le résout facilement (par exemple on tire x et y en fonction de z avec les deux premières équations, et on en déduit z en remplaçant dans la troisième). On trouve :

$$x = \frac{-a+b+c}{2}, \quad y = \frac{a-b+c}{2}, \quad z = \frac{a+b-c}{2}$$

Remarque : on savait déjà d'après la question a) qu'il y avait une solution unique. D'autre part, on peut déduire du calcul que l'inverse de la matrice
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

c) On suppose ici que $m = \frac{1}{2}$. Montrer que si (S) a une solution alors $a = b = c$. Dans le cas où $a = b = c$, que représente géométriquement l'ensemble des points $M = (x, y, z)$ de l'espace qui sont solutions de (S) ?

Le système (S) devient : $\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & a \\ x & + & y & + & z & = & b \\ x & + & y & + & z & = & c \end{array} \right.$

Si une solution $M(x, y, z)$ existe, alors $a = b = c = x + y + z$.

Dans le cas où $a = b = c$, un point $M(x, y, z)$ est solution de (S) si et seulement si $x + y + z = a$. Donc l'ensemble des solutions est un plan (P), d'équation $x + y + z = a$.

d) On suppose maintenant que $m = -1$. Montrer que si (S) a une solution alors $a + b + c = 0$. Dans le cas où $a+b+c = 0$, montrer que l'une des équations est conséquence des deux autres ; donner alors une description géométrique de l'ensemble des points $M = (x, y, z)$ solutions de (S).

Le système (S) devient : $\left\{ \begin{array}{cccccccc} -2x & + & y & + & z & = & a & (L1) \\ x & - & 2y & + & z & = & b & (L2) \\ x & + & y & - & 2z & = & c & (L3) \end{array} \right.$

Si une solution $M(x, y, z)$ existe, alors en sommant les 3 équations vérifiées par M, on obtient : $0 = a + b + c$. Donc il ne peut y avoir de solutions que si $a + b + c = 0$.

Si on suppose que $a + b + c = 0$, alors on a $(L3) = -(L1) - (L2)$, donc la troisième équation est conséquence des deux autres. On en déduit que $M(x, y, z)$ est solution de (S) si et seulement si $\left\{ \begin{array}{ccccccc} -2x & + & y & + & z & = & a \\ x & - & 2y & + & z & = & b \end{array} \right.$.

Géométriquement, l'ensemble des solutions et donc une droite de l'espace, donnée par les équations ci-dessus. En effet, il s'agit de l'intersection de deux plans non parallèles, puisque leurs vecteurs normaux $(-2, 1, 1)$ et $(1, -2, 1)$ ne sont pas colinéaires.

Exercice 5. *Droites, plans, distance*

Dans tout l'exercice on se place dans l'espace à trois dimensions.

a) Soit (D) la droite définie par les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + z - 3 = 0 \\ 2x - y + z + 2 = 0 \end{array} \right.$$

Donner une représentation paramétrique de (D).

On choisit par exemple z comme paramètre ; on veut donc résoudre le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 3 - z \\ 2x - y = -2 - z \end{array} \right.$$

On trouve : $x = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}z, \quad y = \frac{8}{3} - \frac{z}{3}$. Une représentation paramétrique de (D) (ce n'est bien sûr pas la seule solution) est donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}t \\ y = \frac{8}{3} - \frac{t}{3} \\ z = t \end{array} \right. ,$$

c'est-à-dire $A + t\overrightarrow{u}$ avec $A(\frac{1}{3}, \frac{8}{3}, 0)$ et $\overrightarrow{u}(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0)$.

b) Soit (Π) le plan défini par la représentation paramétrique suivante :

$$\begin{cases} x = 2 + 2s + 2t \\ y = -2 - t \\ z = -2 - s + t \end{cases} \qquad (s, t \in \mathbb{R})$$

Donner une équation de (Π).

Soit $B(2, -2, -2)$, $\overrightarrow{v}(2, 0, -1)$, et $\overrightarrow{w}(2, -1, 1)$. Un point $M(x, y, z)$ appartient à (Π) si et seulement si la famille $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ est liée, donc si :

$$\begin{vmatrix} x-2 & 2 & 2 \\ y+2 & 0 & -1 \\ z+2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ce qui donne l'équation : $-x - 4y - 2z - 10 = 0$.

c) Montrer que la droite (D) est parallèle au plan (Π). [On pourra montrer —mais ce n'est pas une méthode imposée— qu'il existe un plan parallèle à (Π) et qui contient (D).]

Par définition, une droite est parallèle à un plan s'il existe une translation qui envoie la droite dans le plan. Il suffit donc (par exemple) de vérifier qu'il existe un plan parallèle à (Π) et qui contient (D).

On sait qu'un plan (P) parallèle à (Π) a pour équation $x + 4y + 2z + d = 0$, avec $d \in \mathbb{R}$. Si (D) est incluse dans (P), en particulier $A(\frac{1}{3}, \frac{8}{3}, 0)$ appartient à (P) : on en déduit que nécessairement $d = -11$.

Maintenant, si $d = -11$, et si M est un point quelconque de (D), on sait que M est de la forme $A + t\overrightarrow{u}$ avec $t \in \mathbb{R}$ et $\overrightarrow{u}(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0)$. On vérifie que pour tout t, $(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}t) + 4(\frac{8}{3} - \frac{t}{3}) + 2t - 11 = 0$, et donc M appartient à (P).

Conclusion : le plan (P) d'équation $x + 4y + 2z - 11 = 0$ est bien parallèle à (Π), et contient (D), donc (D) est une droite parralèle à (Π).

Autre méthode : la droite (D) est définie dans l'énoncé par deux équations. On sait alors écrire l'équation générale des plans contenant (D). Il suffit donc de vérifier qu'il existe un tel plan qui soit aussi parallèle à (Π).

Encore une autre méthode : on peut dire que (D) est parallèle à (Π) si et seulement si (D) et (Π) n'ont pas un unique point d'intersection. En utilisant les 2 équations de (D), et celle de (Π), on en déduit que (D) et (Π) sont parallèles si et seulement si un certain système n'a pas une unique solution, ce qui revient donc à vérifier la nullité d'un déterminant.

Remarque : toutes ces méthodes sont équivalentes, et reviennent à montrer que la direction vectorielle de (D) (i.e. le vecteur $\overrightarrow{u}$) est incluse dans la direction vectorielle de (Π) (i.e. le plan d'équation $x + 4y + 2z = 0$). Pourquoi ?

d) Montrer que pour tout point M appartenant à (D), $\mathrm{dist}(M, \Pi) = \sqrt{21}$.

Un point M de (D) s'écrit $A + t\overrightarrow{u}$, d'après la question a). Le plan (Π) a pour équation $x + 4y + 2z + 10 = 0$. D'après la formule de distance d'un point à un plan, on en déduit :

$$\mathrm{dist}(M, \Pi) = \frac{(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}t) + 4(\frac{8}{3} - \frac{t}{3}) + 2t + 10}{\sqrt{1^2 + 4^2 + 2^2}} = \frac{21}{\sqrt{21}} = \sqrt{21}.$$

Remarque : de façon générale, si une droite (D) est parallèle à un plan (Π), alors tous les points de (D) sont à la même distance de (Π). Pourquoi ?

Exercice 6. *Composées de symétries centrales*

On se place dans le plan muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit A un point du plan. On note s_A la symétrie centrale de centre A, c'est-à-dire que, pour M un point du plan, $M' = s_A(M)$ si et seulement si A est le milieu de $[MM']$, soit en termes vectoriels $\overrightarrow{AM'} = -\overrightarrow{AM}$. En particulier A est le seul point invariant par s_A, cette propriété caractérise le centre de la symétrie.

a) Soient A et B deux points du plan. Montrer que l'application composée $s_B \circ s_A$ est une translation de vecteur $2\overrightarrow{AB}$ (si M est un point du plan et $M'' = s_B \circ s_A(M)$, on pourra exprimer $\overrightarrow{OM''}$ en fonction de $\overrightarrow{OM}$).

Soit M un point du plan. On note $M' = s_A(M)$ et $M'' = s_B(M')$. Il s'agit donc de montrer que $\overrightarrow{OM''} = \overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{AB}$. Calculons

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OM''} &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM''} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{M'B} \text{ car } M'' = s_B(M') \\
&= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{M'A} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AB} \quad \text{car } M' = s_A(M) \\
&= \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AB} \\
&= \overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{AB}
\end{aligned}$$

C'est bien le résultat voulu.

b) Soient $\vec{u}$ un vecteur du plan et A un point du plan. On note t la translation de vecteur $\vec{u}$. Montrer que l'application composée $s_A \circ t$ est une symétrie centrale de centre B, où B est défini par $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} - \frac{1}{2}\vec{u}$.

Soit M un point du plan. On note $M' = t(M)$ et $M'' = s_A(M')$. Il s'agit cette fois de montrer que, pour le point B tel que défini, $\overrightarrow{BM"} = \overrightarrow{MB}$. Calculons

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BM''} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM''} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{M'A} \quad \text{car } M'' = s_A(M') \\
&= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{M'O} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{MO} - \vec{u} \quad \text{car } M' = t(M) \\
&= \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{BA} - \vec{u} \\
&= \overrightarrow{MB} \quad \text{par définiton de } B
\end{aligned}$$

C'est bien le résultat voulu.