

INTERROGATION 3 - 3 DÉCEMBRE 2008.

Important : La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans la notation.

EXERCICE 1. *Logique I.*

Donner un exemple convaincant (pris dans la vie courante ou en mathématiques) montrant que les énoncés

$$\forall x, \exists y, P(x, y)$$

et

$$\exists y, \forall x, P(x, y)$$

(où $P(x, y)$ est une propriété dépendant de x et y) n'ont pas le même sens.

EXERCICE 2. *Logique II.*

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On considère les deux assertions A : "la fonction f a un maximum" et B : "la fonction f est majorée".

- Ecrire les assertions A et B avec des quantificateurs.
- Ecrire (avec des quantificateurs) la négation de l'assertion A .
- Est-ce que l'assertion $A \Rightarrow B$ est vraie pour toute fonction f ? Est-ce que l'assertion $B \Rightarrow A$ est vraie pour toute fonction f ? (Donner à chaque fois soit une démonstration soit un contre-exemple.)

EXERCICE 3. *Ensembles et applications*

Soient E et F deux ensembles, $f : E \rightarrow F$ une application. Soit $A \subset F$ une partie de F .

- Montrer que $f(f^{-1}(A)) \subset A$.
- Montrer que, si f est surjective, $f(f^{-1}(A)) = A$.
- Donner un exemple où il n'y a pas égalité.

EXERCICE 4. *Cours.*

Énoncer précisément le théorème des valeurs intermédiaires.

EXERCICE 5. *Limites.*

On justifiera ses réponses par un calcul et/ou en utilisant des limites connues.

- Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\sqrt{x}}$.
- Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x^3 + 3x^2}$.
- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 + 3x - 1} \right)$.
- Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{\sin(x - 1)}$.
- On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e$ (où e désigne $\exp(1)$).