Université Paris 7 — **Premier semestre 2008-2009**
L1 MASS - Groupe 1M4 — **MA1 - Algèbre et Analyse élémentaires**

Corrigé de l'interrogation 4 - 18 décembre 2008.

Important : *La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans la notation.*

Exercice 1. *Logique.*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On considère l'assertion A : "f admet un minimum sur $\mathbb{R}$".

a) Ecrire l'assertion A avec des quantificateurs.

L'assertion A signifie qu'il existe un réel M tel que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f(x) \geq M$ *et* que ce réel M est atteint par la fonction f en un certain point x_0. Cela s'écrit :

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq M \text{ et } \exists x_0 \in \mathbb{R},\ f(x_0) = M$$

ou, de façon plus concise :

$$\exists x_0 \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq f(x_0)$$

b) Ecrire l'assertion non(A) avec des quantificateurs.

Il suffit d'écrire la négation de l'assertion précédente :

$$\forall x_0 \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) < f(x_0)$$

Cela revient bien sûr à dire que l'ensemble $\mathrm{Im} f$ n'a pas de minimum.

Exercice 2. *Cours.*

Enoncer précisément le théorème de Rolle.

Soient $a < b$ deux réels, et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. On suppose que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 3. *Développements limités I.*

On considère la fonction $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. On définit alors la fonction $\mathrm{Arcsin} :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ comme la primitive de f qui s'annule en 0.

a) Calculer le développement limité de f à l'ordre 6 en 0.

Le plus simple est d'utiliser le développement limité de $(1+u)^\alpha$, avec $\alpha = -1/2$ et $u = -x^2$. Il suffit d'écrire ce D.L. à l'ordre 3 en u, puisqu'on veut un D.L. à l'ordre 6 en x.

$$(1+u)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}u + \frac{(-\frac{1}{2}) \times -(\frac{3}{2})}{2}u^2 + \frac{(-\frac{1}{2}) \times -(\frac{3}{2}) \times -(\frac{5}{2})}{6}u^3 + o(u^3) \text{ quand } u \to 0$$

d'où :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + o(x^6) \text{ quand } x \to 0$$

b) En déduire le développement limité de Arcsin à l'ordre 7 en 0.

La fonction Arcsin est une fonction dérivable sur $]-1,1[$, et sa dérivée est f dont on connaît un développement limité à l'ordre 6. On peut donc utiliser le théorème d'intégration des développements limités et obtenir un D.L. de Arcsin à l'ordre 7 (intégration terme à terme).

$$\text{Arcsin' } x = f(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + o(x^6) \text{ quand } x \to 0$$

donc Arcsin admet le DL suivant :

$$\begin{array}{rcll} \text{Arcsin } x & = & \text{Arcsin } 0 + 1 \times x + \frac{1}{2} \times \frac{x^3}{3} + \frac{3}{8} \times \frac{x^5}{5} + \frac{5}{16} \times \frac{x^7}{7} + o(x^7) & \text{quand } x \to 0 \\ & = & x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + o(x^7) & \text{quand } x \to 0 \end{array}$$

Exercice 4. *Continuité et dérivabilité.*

On considère la fonction $f : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{\sin^2 x}{\cos x - 1}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = -2$.

a) Montrer que f est continue sur $[-\pi/2, \pi/2]$.

Tout d'abord, f est clairement continue sur $[-\pi/2, 0[$ et sur $]0, \pi/2]$ car elle est définie à partir de fonctions usuelles. Le seul point problématique est 0. Calculons $\lim_{x\to 0} f(x)$. Calculer un équivalent des numérateur et dénominateur suffit :

$$f(x) = \frac{\sin^2 x}{\cos x - 1} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{-\frac{1}{2}x^2} = -2$$

D'où $\lim_{x\to 0} f(x) = -2$. Or on avait posé $f(0) = -2$, donc la fonction f est effectivement continue en 0.

Conclusion : f est continue sur $[-\pi/2, \pi/2]$.

b) Montrer que f est dérivable sur $[-\pi/2, \pi/2]$. Que vaut $f'(0)$?

Tout d'abord, f est clairement dérivable sur $[-\pi/2, 0[$ et sur $]0, \pi/2]$ car elle est définie à partir de fonctions usuelles. Le seul point problématique est 0. Etudions $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$.

$$\frac{\frac{\sin^2 x}{\cos x - 1} + 2}{x} = \frac{\sin^2 x + 2(\cos x - 1)}{x(\cos x - 1)}$$

Le dénominateur de cette dernière expression est équivalent à $-x^3/2$ en 0. Si l'on fait un développement limité du numérateur, on se rend compte que les termes de degré 0, 1, et 2 sont nuls. Le terme de degré 3 est nul aussi, car l'expression est paire (on peut aussi le calculer tout simplement). Ensuite, il est inutile d'aller jusqu'à l'ordre 4 et de calculer le coefficient de x^4, car on sait déjà que

$$\sin^2 x + 2(\cos x - 1) \underset{x\to 0}{=} o(x^3)$$

D'où :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{o(x^3)}{-x^3/2} \quad \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Donc f est dérivable en 0, et $f'(0) = 0$.

c) Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$. Est-ce que f' est continue sur $[-\pi/2, \pi/2]$?

Pour $x \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{2\cos x \sin x(\cos x - 1) - \sin^2 x \times (-\sin x)}{(\cos x - 1)^2} = \frac{\sin x(2\cos x(\cos x - 1) + \sin^2 x)}{(\cos x - 1)^2}$$

La fonction f' est clairement continue sur $[-\pi/2, 0[$ et sur $]0, \pi/2]$ car elle est construite à partir de fonctions usuelles. Voyons si elle est continue en 0, i.e. si $\lim_{x\to 0} f'(x) = f'(0)$.

Dans l'expression de $f'(x)$, on a :
$(\cos x - 1)^2 \sim x^4/4$.
$\sin x \sim x$.
$2\cos x(\cos x - 1) + \sin^2 x = o(x^3)$ (faire un DL, les termes de degré 0, 1, 2, et 3 sont nuls).
Donc :

$$\frac{\sin x(2\cos x(\cos x - 1) + \sin^2 x)}{(\cos x - 1)^2} \sim \frac{x \times o(x^3)}{x^4/4} \sim \frac{o(x^4)}{x^4/4} \quad \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

D'où $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0 = f'(0)$, et f' est continue en 0.
Conclusion : f' est continue sur $[-\pi/2, \pi/2]$ (f est donc une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\pi/2, \pi/2]$).

Exercice 5. *Développements limités II.*

On définit les fonctions sinus hyperbolique, cosinus hyperbolique et tangente hyperbolique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ respectivement par les formules $\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

a) Calculer les développements limités à l'ordre 3 en 0 de sh et ch.

On a simplement besoin de connaître le D.L de e^x.

$$\begin{aligned} \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} &= \frac{1}{2}\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - (1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}) + o(x^3)\right) \\ &= x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} &= \frac{1}{2}\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3) \end{aligned}$$

b) En déduire le développement limité à l'ordre 3 en 0 de th.

$$\mathrm{th}(x) = \frac{x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)}$$

On fait le quotient des deux D.L. précédents, en utilisant le D.L. de $1/(1+u)$ avec $u = \frac{x^2}{2} + o(x^3)$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathrm{th}(x) &= (x + \frac{x^3}{6} + o(x^3))(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)) \\ &= x + (-\frac{1}{2} + \frac{1}{6})x^3 + o(x^3) \\ &= x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \end{aligned}$$