1 Axiome de Complétude (11 janvier)

$\emptyset \neq E \subset \mathbb{R}$ E est majoré, ou admet une borne supérieure si $\exists\, b$ tel que $x \leq b$ pour tout $x \in E$
On dit que b est un majorant.

E est minoré, ou admet une borne inférieure si $\exists\, b$ tel que $b \leq x$ pour tout $x \in E$
On dit que b est un minorant.

E est borné s'il est à la fois majoré et minoré.

Définition Soit $\emptyset \neq E \subset \mathbb{R}$ borné supérieurement.

b^0 est un plus petit majorant (ou une plus petite boorne supérieure) si
1) b^0 est une borne supérieure de E
2) si b est une borne supérieure, alors $b^0 \leq b$.

s'il existe, le plus petit majorant est unique :
soient b^0 et b^1 deux plus petites bornes supérieures
alors on a $b^0 \leq b^1$ et $b^1 \leq b^0$
d'où $b^0 = b^1$.

s'il existe, le plus petit majorant de E s'appelle le supremum de E : $b^0 = \sup E$.

Définition Soit $\emptyset \neq E \subset \mathbb{R}$ borné inférieurement.

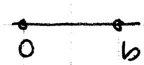
b_0 est un plus grand majorant (ou une plus grande borne inférieure si
1) b_0 est une borne inférieure
2) si b est un minorant de E alors $b \leq b_0$

S'il existe, le plus grand minorant est unique.
On le note
$$b_0 = \inf(E) = \text{infimum de } E.$$

Exemple 1 $E = \{ \frac{1}{n} \mid n = 1, 2, \dots \}$

$\sup E = 1$ $\therefore$ 1 est une borne supérieure.
Si b est une borne supérieure on doit avoir $1 \leq b$, $1 \in E$.
$\Rightarrow 1 = \sup E$.

$\inf E = 0$ $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{1}{n} > 0$ donc 0 est un minorant de E.
Soit $b > 0$ un minorant plus grand que 0



On peut trouver $\frac{1}{n} \in E$ avec

$$0 < \frac{1}{n} < b$$

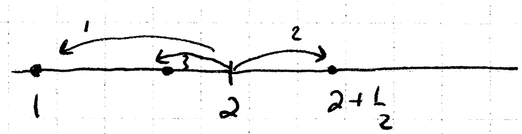
donc b n'est pas un minorant, contradiction.

On a donc $\inf E = 0$ et $\sup E = 1$

Exemple 2 $E =]-2, \pi[\subset \mathbb{R}$.

$\sup E = \pi \notin E$
$\inf E = -2 \notin E$.

Exemple 3 $E = \{ 2 + \frac{(-1)^n}{n} \mid n = 1, 2, 3, 4, \dots \}$



On a $x \leq 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ $\forall x \in E$
et $\frac{5}{2} \in E$, $\sup E = \frac{5}{2}$

On a $1 \leq x$ $\forall x \in E$
et $1 \in E$, $\inf E = 1$

Il n'est pas suffisant de travailler uniquement dans $\mathbb{Q}$.
Nous allons montrer que le suppremum n'existe toujours pas dans $\mathbb{Q}$.

Exemple 4 $\quad E = \{ x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2 \} \subset \mathbb{Q}$.

E n'admet pas de supremum dans $\mathbb{Q}$.
Supposons le contraire.
supposons : $y = \sup(E)$ existe, $y \in \mathbb{Q}$

C'est un fait qu'il n'y a aucun $y \in \mathbb{Q}$ avec $y^2 = 2$.
On doit donc avoir

$$y^2 < 2 \quad \text{ou} \quad y^2 > 2.$$

supposons! $\quad y^2 < 2 \qquad$ Note : $1,4 < y < 2$

alors $\quad 2 - y^2 > 0$

posons $\quad h = \dfrac{2-y^2}{2y+2} > 0$

on a $\quad h = \dfrac{2-y^2}{2y+2} < \dfrac{2}{2y+2} < \dfrac{2}{1} = 2$

$$0 < h < 2.$$

Posons $\quad z = y + h > y, \quad z \in \mathbb{Q}$

$$\begin{aligned} z^2 = (y+h)^2 &= y^2 + 2yh + h^2 \\ &= y^2 + (2y+h)h \\ &< y^2 + (2y+2)h \\ &= y^2 + (2y+2)\frac{(2-y^2)}{2y+2} \\ &= y^2 + 2 - y^2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

D'où $\quad z^2 < 2 \quad$ et $\quad z \in E$
On a donc trouvé $z \in E$ avec $z > y = \sup E$: une contradiction.

(suite Exemple 4)

Supposons maintenant que $y^2 > 2$

posons $k = \frac{y^2-2}{2y+2} < \frac{y^2}{2y+2} < \frac{y^2}{2y} < y < 2$

posons $w = y - k$ $\quad 0 < w < y$ car $y > k > 0$.

$$w^2 = y^2 - 2yk + k^2$$
$$= y^2 - (2y-k)k$$
$$= y^2 - (2y-k)\frac{(y^2-2)}{2y+2}$$
$$> y^2 - (2y+2)\frac{(y^2-2)}{2y+2}$$
$$= y^2 - y^2 + 2 = 2$$

On a donc $w^2 > 2 \Rightarrow w \notin E$.

$w > 0 \Rightarrow x < w \quad \forall x \in E$
(sinon $x \geq w \Rightarrow x^2 \geq w^2 > 2$)

Donc w est une borne supérieure plus petite que y, une contradiction.

Axiome de complétude.

Soit $\emptyset \neq E \subset \mathbb{R}$ $\quad E$ majoré.

Alors $\sup(E)$ existe.

Note: on a pas nécessairement $\sup(E) \in E$

(12 janvier)

Théorème I Soit $\emptyset \neq E \subset \mathbb{R}$
Supposons E borné inférieurement.
Alors
$\inf(E)$ existe.

Preuve. Soit b un minorant de E

$b \leq x \quad \forall x \in E$.

Notons $-E = \{-x \mid x \in E\}$.

On a $-b \geq -x \quad \forall x \in E$

donc $-b$ est une borne supérieure de $-E$

posons $b^0 = \sup(-E)$ (axiome de complétude)

À montrer : $-b^0 = \inf(E)$
deux choses à montrer : 1) $-b^0 \leq x \quad \forall x \in E$

2) si $b \leq x \quad \forall x \in E$
alors
$b \leq -b^0$

1) $b^0 \geq -x \quad \forall x \in E$ car
$b^0 = \sup(-E)$
donc $\forall x \in E$ nous avons $-b^0 \leq x$
c'est-à-dire $-b^0$ est un minorant.

2) supposons que b est un minorant de E
$\forall x \in E \Rightarrow b \leq x$
$-x \leq -b \quad \forall x \in E$
$\Rightarrow$ $-b$ est un majorant de $-E$

$\Rightarrow$ $b^0 \leq -b$ car $b^0 = \sup(-E)$

$\Rightarrow$ $-b^0 \geq b$

$\boxed{////}$

Théorème II Propriété archimédienne de $\mathbb{R}$
(($\mathbb{R}$ est un corps archimédien)

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $x > 0$, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ avec

$$nx > y$$

Preuve. Si $y \leq 0$ alors il suffit de prendre $n = 1$
Supposons $y > 0$
On procède par contradiction.
On suppose que

$$nx \leq y \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Soit $E = \{nx \mid n \in \mathbb{N}\}$

E est majoré par y

Posons
$$b^0 = \sup(E)$$

On a
$$b^0 - x < b^0 \qquad (\text{car } x > 0)$$

Il existe nx entre $b^0 - x$ et b^0, sinon b^0 ne serait pas le supremum de $E = \{nx \mid n \in \mathbb{N}\}$.

On a donc $\underbrace{b^0 - x < nx}$ $< b^0$

$$b^0 < x + nx$$
$$b^0 < \underbrace{(n+1)x}_{\text{élément de } E}$$

ce qui contredit le fait que $b^0 = \sup(E)$

$\boxed{////}$

Conséquences importantes

1. $\forall y \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N}$ tel que $n > y$
   il suffit de prendre $x = 1$, $\exists n \quad nx = n > y$.
   (Aucun nombre réel majore $\mathbb{R}$)

2. Soit $\epsilon > 0$ alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que
$$0 < \frac{1}{n} < \epsilon$$

en effet, il suffit de prendre $y = 1$, $x = \epsilon$ et appliquer la propriété archimédienne :

$$\exists n : \qquad n\epsilon > 1$$

ou

$$\exists n : \qquad \epsilon > \frac{1}{n} .$$

Théorème 3 Soit $x \in \mathbb{R}$

$\exists$ unique $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \leq x < n+1$

On dit que $n = [x]$ est la partie entière de x

preuve.

Par la propriété archimédienne, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que

$$|x| < N$$

d'où

$$-N < x < N$$

Si x est un entier égal à n alors

$$n \leq x < n+1$$

Si x n'est pas un entier, alors x appartient est situé entre deux entiers consécutifs de l'ensemble fini

$$-N < -N+1 < \cdots \qquad < N-2 < N-1 < N$$

Dans tous les cas, on a $\qquad n \leq x < n+1$.

n est unique, en effet, s'il existait n et m tels que

$$n \leq x < n+1$$
$$m \leq x < m+1$$

Alors $\quad n < m \Rightarrow \quad n < m \leq x < n+1$

et m serait compris entre n et son successeur.

De même, $n > m$ mène à une contradiction.

$\boxed{////}$

Théorème 4 **Densité des rationnels**

Soient $a < b$. Alors il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que

$$a < r < b$$

Preuve.

$$a < b \implies b - a > 0$$

Propriété archimédienne $\implies \exists\, n$ $\quad \frac{1}{n} < b - a$

Théorème 3 $\implies \exists\, m \in \mathbb{N}$

$$m \leq na < m + 1$$

On a donc $\quad na < m + 1 < na + 1$

On divise par n $\quad a < \frac{m+1}{n} < a + \frac{1}{n} < a + b - a$

d'où $\quad a < \frac{m+1}{n} < b$

On prend $r = \frac{m+1}{n}$

$\blacksquare$

Théorème 5 **Densité des irrationnels.**

Soient $a < b$. Alors il existe un irrationnel $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que

$$a < s < b$$

Preuve.

$$a < b$$

$\implies$

$$a - \sqrt{2} < b - \sqrt{2}$$

Par le théorème 4, il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que

$$a - \sqrt{2} < r < b - \sqrt{2}$$

D'où

$$a < \sqrt{2} + r < b$$

On pose $s = \sqrt{2} + r$

$\blacksquare$

Corollaire I Si $a < b$:

$*$ il existe une infinité de rationnels dans $]a, b[$

$**$ il existe une infinité d'irrationnels dans $]a, b[$

Prouvons $(**)$ Supposons le contraire.

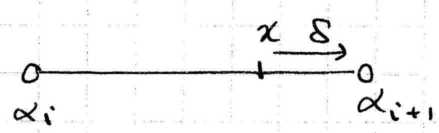
Soit $\alpha_1 < \cdots < \alpha_N$ les seuls irrationnels dans $]a, b[$

$$a < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_{N-1} < \alpha_N < b$$

Soit x un rationnel de $]a, b[$

Alors x doit appartenir dans un intervalle de la forme $]\alpha_i , \alpha_{i+1}[$

(s'il est de la forme $]a, \alpha_1[$ ou $]\alpha_N , b[$, le raisonnement est identique.)



Prenons δ = minimum des distances $|x - \alpha_{i+1}|$ et $|x - \alpha_i|$

L'intervalle $]x - \frac{\delta}{2} , x + \frac{\delta}{2}[$ ne contient aucun des $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$.

Or, par le théorème 5, il devrait y avoir un irrationnel entre $x - \frac{\delta}{2}$ et $x + \frac{\delta}{2}$, contradiction.

La preuve de $(*)$ est laissée en exercice.

$\blacksquare$

Exemple 5 Soit $E = \{ \frac{3n+4}{n} \mid n \in \mathbb{N} \}$

Nous montrons que $\sup E = 7$

$\inf E = 3$

1) $7 \in E \quad (n=1)$

$E = \{ 3 + \frac{4}{n} \mid n \in E \}$

donc $3 + \frac{4}{n} < 7$ si $n \geq 2$

7 est la plus petite borne supérieure de E

* $3 + \frac{4}{n} \leq 7 \quad \forall n$

* Si b est une borne supérieure,

$3 + \frac{4}{n} \leq b \quad \forall n$

$\Rightarrow \quad 7 \leq b \quad (n=1)$

et $7 = \sup(E)$

2) $3 \leq 3 + \frac{4}{n}$ pour tout n. Donc 3 est une borne inférieure

Supposons que b est une borne inférieure de E qui est plus grande que 3 :

$3 < b$

$b - 3 > 0 \quad \Rightarrow \quad \exists \; n$ tel que $0 < \frac{4}{n} < b - 3$

On obtient alors $b - 3 > \frac{4}{n}$

$b > 3 + \frac{4}{n} \in E$

donc b n'est pas une borne inférieure de E, une contradiction.

Exemple 6 $E = \{ (1 + \frac{1}{n})^n \mid n \in \mathbb{N} \}$.

Nous montrons que $\inf(E) = 2$

et $\sup(E) < 3$

en fait $\sup(E) = e = 2,718\ldots$

Inégalité de Bernoulli : $(1+x)^m \geq 1+mx$ si $x \geq -1$

Alors $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m \geq 1+m\left(\frac{1}{m}\right) = 1+1 = 2$

donc 2 est une borne inférieure de E. De plus $2 \in E$.

Donc $2 = \inf(E)$.

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + m\left(\frac{1}{m}\right) + \frac{m(m-1)}{2!}\frac{1}{m^2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\frac{1}{m^3}$$

$$+ \dots + \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-(m-1))}{m!}\frac{1}{m^m}$$ (binôme de Newton)

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(\frac{m-1}{m}\right) + \frac{1}{3!}\left(\frac{m-1}{m}\right)\left(\frac{m-2}{m}\right) + \dots + \frac{1}{m!}\left(\frac{m-1}{m}\right)\left(\frac{m-2}{m}\right)\dots\left(\frac{m-(m-1)}{m}\right)$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{m}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right) + \dots + \frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\dots\left(1-\frac{m-1}{m}\right)$$

$$< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{m!}$$ car chaque $\left(1-\frac{k}{m}\right) < 1$

$$\leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{m-1}}$$

car $m! \geq 2^{m-1} \quad \forall m \geq 1$

$$= 1 + \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^m}{1-\frac{1}{2}} = 1 + 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^m\right) < 1+2 = 3$$

donc $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m < 3 \quad \forall m$ et 3 est une borne supérieure.

18 janv

2 Valeur absolue et distance sur $\mathbb{R}$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

ou encore $\quad |x| = \max\{x, -x\}$

Théorème 6 $\quad -|x| \leq x \leq |x| \quad$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Preuve

Trois cas
$$x = 0 \qquad 0 \leq 0 \leq 0$$
$$x > 0 \qquad -|x| = -x \leq x \leq x = |x|$$
$$x < 0 \qquad -|x| = -(-x) = x \leq x \leq -x = |x|$$

Théorème 7 Propriétés fondamentales

i) $\quad |x| \geq 0 \qquad |x| = 0 \iff x = 0$

ii) $\quad |xy| = |x|\,|y|$

iii) $\quad |x+y| \leq |x| + |y| \qquad$ (inégalité du triangle)

Preuve

i) clair que $|x| \geq 0$

$$x = 0 \implies |x| = 0$$

si $x \neq 0$ $\qquad x > 0 \implies |x| > 0$

$\qquad\qquad\qquad x < 0 \implies |x| = -x > 0$

donc

$$x \neq 0 \implies |x| \neq 0.$$

ii) quatre cas à considérer

$x \geq 0 \quad y \geq 0 \qquad |x| = x \quad |y| = y \quad |xy| = xy$

donc $|xy| = |x|\,|y|$

$x \geq 0 \quad y < 0 \qquad |x| = x \quad |y| = -y \quad |xy| = -xy$

$|xy| = -xy = x(-y) = |x|\,|y|$

$x < 0 \quad y \geq 0 \qquad$ permutation du cas précédent.

$x < 0 \quad y < 0 \qquad |x| = -x \quad |y| = -y \quad |xy| = xy$

$|xy| = xy = (-x)(-y) = |x|\,|y|$

iii) $x \geq 0 \quad y \geq 0 \quad |x+y| = x+y = |x| + |y|$

$x < 0 \quad y < 0 \quad |x+y| = -(x+y) = -x + -y$
$= |x| + |y|$

$x \geq 0 \quad y < 0$

si $x \geq -y \quad |x+y| = x+y$
$= |x| - |y|$
$< |x| + |y|$

si $x < -y \quad |x+y| = -(x+y)$
$= -x + -y$
$= -|x| + |y|$
$< |x| + |y|$

$x < 0 \quad y \geq 0$ idem au cas précédent.

Corollaire 1 $\quad |x| < \varepsilon \iff -\varepsilon < x < \varepsilon$

preuve

$|x| < \varepsilon \iff x < \varepsilon$ et $-x < \varepsilon$

$\iff x < \varepsilon$ et $x > -\varepsilon$

$\iff -\varepsilon < x < \varepsilon$

Corollaire 2 $\quad |x-a| < \varepsilon \iff a-\varepsilon < x < a+\varepsilon$

preuve

$|x-a| < \varepsilon \iff -\varepsilon < x-a < \varepsilon$
$-\varepsilon + a < x < a + \varepsilon$

Théorème 8 $\quad |x-y| \leq |x| + |y|$

preuve

$|x-y| = |x+(-y)| \leq |x| + |-y| = |x| + |y|$

Définition $x, y \in \mathbb{R}$

$$d(x,y) = |x-y|$$
$$= \underline{\text{distance}} \text{ entre } x \text{ et } y$$

$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty[$$

Théorème 9

i) $d(x,y) = 0 \iff x = y$

ii) $d(x,y) = d(y,x)$

iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Preuve

i) $d(x,y) = 0 \iff |x-y| = 0$
$$\iff x - y = 0$$
$$\iff x = y$$

ii) $d(x,y) = |x-y| = |-(x-y)|$
$$= |y-x| = d(y,x)$$

iii) $d(x,z) = |x-z| = |x-y+y-z|$
$$\leq |x-y| + |y-z|$$
$$\leq d(x,y) + d(y,z) \quad \blacksquare$$

Soit (M, d) où M est un ensemble et
$$d : M \times M \to [0, \infty[$$
telle que d vérifie i), ii) et iii) de Th 9
alors on dit que M est un espace métrique.

Exemple 7 $|x-4| < 1$
$$\iff -1 < x-4 < 1$$
$$\iff 3 < x < 5$$

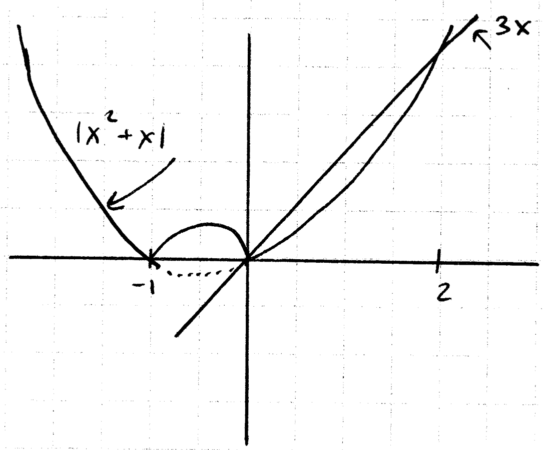
$$|x-4| < 1 = \{x \mid d(x,4) < 1\}$$

Exemple 8 $|2x-6| < 15$
$$\iff -15 < 2x-6 < 15$$
$$\iff -9 < 2x < 21$$
$$-\frac{9}{2} < x < \frac{21}{2}$$

$$\{x \mid |2x-6| < 15\} = \{x \mid |2(x-3)| < 15\}$$
$$= \{x \mid |x-3| < \frac{15}{2}\}$$

$$= \{x \mid d(x,3) < \tfrac{15}{2}\}$$

Exemple 9 $\quad |x^2+x| < 3x \iff 0 < x < 2$



Théorème 10 $\quad ||x|-|y|| \leq |x+y|$

preuve

$$x = x+y-y$$
$$|x| = |x+y-y| \leq |x+y| + |y|$$
$$|x| - |y| \leq |x+y|$$

$$y = y+x-x$$
$$|y| = |y+x-x| \leq |y+x| + |x|$$
$$|y| - |x| \leq |x+y|$$
$$|x| - |y| \geq -|x+y|$$

d'où
$$-|x+y| \leq |x|-|y| \leq |x+y|$$

c'est-à-dire $\quad ||x|-|y|| \leq |x+y|$

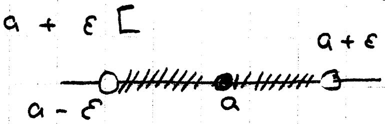
$\blacksquare$

Définitions $\quad$ Soit $\varepsilon > 0$

$$V(a,\varepsilon) = \{x \mid |x-a| < \varepsilon\}$$

voisinage (ouvert) de a de rayon ε

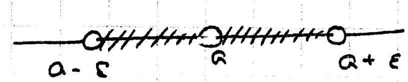
$$=]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$$



$$V'(a,\varepsilon) = \{x \mid 0 < |x-a| < \varepsilon\}$$

voisinage épointé de a de rayon ε

$$=]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\setminus \{a\}$$



Retour sur l'exemple 9

$$|x^2+x| < 3x$$

cas $x < -1$ $\quad |x^2+x| = x^2+x = f(x)$

$3x = g(x)$

dans $]-\infty, -1[$ a-t-on $f(x) < g(x)$?

$x^2+x-3x = x^2-2x = x(x-2) > 0$

non !

cas $-1 < x < 0$ $\quad |x^2+x| = -x^2-x = f(x)$

$3x = g(x)$

dans $]-1, 0[$ a-t-on $f(x) < g(x)$?

$-x^2-x-3x = -(x^2+4x)$

$= -x(x+4) > 0$

non !

cas $0 < x < 2$ $\quad |x^2+x| = x^2+x = f(x)$

$3x = g(x)$

$f-g = x^2-2x = x(x-2) < 0$

oui !

cas $x > 2$ $\quad |x^2+x| = x^2+x = f(x)$

$f(x)-g(x) = x^2-2x = x(x-2) > 0$

non !

3 Suites de nombres réels

Définition une fonction $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$n \longmapsto s(n) = x_n$$

est appelée une suite de nombres réels. On écrit $\{x_n\}$

Exemple 11

a) $\left\{ \frac{(-1)^n}{n} \right\}$ b) $\left\{ (-1)^n \right\}$ c) $\left\{ \frac{1-(-1)^n}{n} \right\}$

d) $\left\{ \frac{5n+8}{2n+3} \right\}$ e) $\left\{ \sqrt[n]{K} \right\}$, $K > 0$ f) $\left\{ \sqrt[n]{n} \right\}$

g) $\left\{ \frac{n^2-2}{3n^2+4} \right\}$ h) $\left\{ \frac{n^2}{n^2+4} \right\}$ i) $\{1\}$ (suite constante)

Définition Soit $\{x_n\}$ une suite et $a \in \mathbb{R}$.
On dit que $\{x_n\}$ converge vers a si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, N(\varepsilon) \text{ tel que } n > N(\varepsilon) \Longrightarrow \quad |x_n - a| < \varepsilon$$

ou encore $x_n \in V(a, \varepsilon)$

ou encore $d(x_n, a) < \varepsilon$

On écrit alors

$$a = \lim x_n = \lim_{n \to \infty} x_n .$$

Interprétation. $\{x_n\}$ converge vers a revient à dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il y a un nombre fini de termes de la suite $\{x_n\}$ qui ne sont pas dans $V(a, \varepsilon)$.

Exemple 12

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$

Soit $\varepsilon > 0$ $\quad |x_n - 0| = \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{1}{n}$

$$|x_n - 0| < \varepsilon \iff \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$\iff \frac{1}{\varepsilon} < n$$

Prenons $N(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon}$

Alors $n > N(\epsilon) \Rightarrow n > \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow \epsilon > \frac{1}{n}$

$$\Rightarrow |x_n - 0| < \epsilon$$

b) la suite $\{(-1)^n\}$ ne converge pas.
Soit a un nombre quelconque, tout voisinage de la forme $V(a, 1/4)$ ne peut contenir à la fois -1 et 1. En prenant $\epsilon = 1/4$, $V(a, \epsilon)$ ne contient pas soit les termes de la forme $(-1)^{2n} = x_{2n}$ ou les termes de la forme $(-1)^{2n+1} = x_{2n+1}$

19 janvier

c) $\lim_{n \to \infty} \frac{1-(-1)^n}{n} = 0$

remarque. tous les termes pairs de la suite sont 0 :

$$x_{2n} = \frac{1}{2n}$$

Soit $\epsilon > 0$.

$$\left| \frac{1+(-1)^n}{n} - 0 \right| = \left| \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n} \right|$$
$$\leq \left| \frac{1}{n} \right| + \left| \frac{(-1)^n}{n} \right|$$
$$= \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n}$$

Donc $|x_n - 0| \leq \frac{2}{n}$. On veut $\frac{2}{n} < \epsilon$ pour n suffisamment grand.

On prend $n > \frac{2}{\epsilon} = N(\epsilon)$.

Si $n > N(\epsilon) \Rightarrow \frac{2}{n} < \epsilon$

Donc $n > N(\epsilon) \Rightarrow |x_n - 0| \leq \frac{2}{n} < \epsilon$

d) Montrons que $\lim_{m \to \infty} \frac{5m+8}{2m+3} = \frac{5}{2}$

Soit $\varepsilon > 0$

Nous avons $\left| \frac{5m+8}{2m+3} - \frac{5}{2} \right| = \left| \frac{10m+16-10m-15}{2(2m+3)} \right|$

$$= \left| \frac{1}{2(2m+3)} \right| = \frac{1}{4m+6}$$

On prend m assez grand pour avoir

$$\frac{1}{4m+6} < \varepsilon$$

$$\frac{1}{\varepsilon} < 4m+6$$

$$\frac{1}{\varepsilon} - 6 < 4m$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 6\right) < m$$

Posons $N(\varepsilon) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 6\right)$

Alors $m > N(\varepsilon) \Rightarrow \frac{1}{4m+6} < \varepsilon$

$$\Rightarrow \left| x_m - \frac{5}{2} \right| \leq \frac{1}{4m+6} < \varepsilon$$

Théorème 11 Unicité des limites.

Si $\lim x_m = a$ et $\lim y_m = b \Rightarrow a = b$

preuve. Supposons $b \neq a$

Soit $\varepsilon = \frac{|b-a|}{4}$

$\lim x_m = a \Rightarrow \exists\, N_1(\varepsilon)$ tel que

$m > N_1(\varepsilon) \Rightarrow |x_m - a| < \varepsilon$

$\lim x_m = b \Rightarrow \exists\, N_2(\varepsilon)$ tel que

$m > N_2(\varepsilon) \Rightarrow |x_m - b| < \varepsilon$

prenons $m > \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$

alors

$$|b-a| = |-x_m + b + x_m - a|$$
$$\leq |-x_m + b| + |x_m - a|$$
$$= |x_m - b| + |x_m - a|$$
$$< \frac{|b-a|}{4} + \frac{|b-a|}{4} = \frac{|b-a|}{2}$$

d'où $|b-a| < \frac{|b-a|}{2}$ contradiction.

$\blacksquare$

Théorème 12 (des gendarmes)

Soit $\lim_{m\to\infty} x_m = a = \lim_{m\to\infty} z_m$.

Soit (y_m) une suite telle que $x_m \leq y_m \leq z_m$ pour tout m.

Alors $\lim_{m\to\infty} y_m = a$.

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$

$\exists N_1(\varepsilon)$ tel que $m > N_1(\varepsilon) \Rightarrow |x_m - a| < \varepsilon$

$\exists N_2(\varepsilon)$ tel que $m > N_2(\varepsilon) \Rightarrow |z_m - a| < \varepsilon$

Prenons $N(\varepsilon) = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$. Alors

$$m > N(\varepsilon) \Rightarrow a - \varepsilon < x_m \leq y_m \leq z_m < a + \varepsilon$$
$$\Rightarrow a - \varepsilon < y_m < a + \varepsilon$$
$$\Rightarrow |y_m - a| < \varepsilon$$

Donc $y_m \to a$

$\blacksquare$

Théorème 13 Soit $\{x_n\}$ une suite convergente.
Alors $\exists M$ tel que $|x_n| < M \quad \forall n \in \mathbb{N}$
(Toute suite convergente est bornée.)

preuve Soit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$

Prenons $\varepsilon = 1$
$\exists n_0$ tel que $n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < 1$

$$|x_n| - |a| \leq |x_n - a| < 1 \quad \text{pour } n > n_0$$

$$|x_n| < 1 + |a| \quad \text{pour } n > n_0.$$

Prenons $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{n_0}|, 1 + |a|\}$

Alors $|x_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\boxed{////}$

Exemple 13 $\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2}{n}} = 0$. $\qquad x_n = \sqrt{\frac{2}{n}}$

Soit $\varepsilon > 0$.

$\left| \sqrt{\frac{2}{n}} - 0 \right| = \sqrt{\frac{2}{n}}$. On veut n assez grand pour avoir

$$\sqrt{\frac{2}{n}} < \varepsilon$$

ou $\quad \frac{2}{n} < \varepsilon^2$

$\Rightarrow \quad n > \frac{2}{\varepsilon^2} = N(\varepsilon)$

Si $n > N(\varepsilon) \Rightarrow n > \frac{2}{\varepsilon^2} \Rightarrow \frac{2}{n} < \varepsilon^2$

$\Rightarrow \sqrt{\frac{2}{n}} < \varepsilon$

Donc $n > N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - 0| < \varepsilon$.

Exemple 14

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$n^{1/n} > 1$ pour $n > 1$ $\quad$ Ecrivons alors $n^{1/n} = 1 + x_n$ où $x_n > 0$

Nous avons $\quad n = (n^{1/n})^n = (1 + x_n)^n \qquad n > 1$

$$= 1 + n x_n + \frac{n(n-1)}{2} x_n^2 + \cdots + x_n^n$$

$$\geq 1 + \frac{n(n-1)}{2} x_n^2$$

donc

$$n \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2} x_n^2$$

$$n - 1 \geq \frac{n(n-1)}{2} x_n^2$$

$$\frac{2}{n} \geq x_n^2$$

$$\sqrt{\frac{2}{n}} \geq x_n > 0$$

L'exemple 13 et théorème 12 $\Rightarrow x_n \to 0$

$\Rightarrow 1 + x_n \to 1$

Exemple 15 Retour sur la suite $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n \geq 1$.

On a montré (exemple 6)

$$2 \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n < 3 \qquad n \geq 1$$

$$\Rightarrow \quad ① \quad \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \leq \frac{1}{2} \qquad n \geq 1$$

$$② \quad \frac{1}{3} < \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \qquad n \geq 1$$

en fait nous avons

$$\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{3} \quad (n \geq 2) \qquad \frac{1}{n+1} \leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \qquad n \geq 1 \qquad \cancel{n \geq 1}$$

d'où

$$\frac{1}{n+1} \leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \leq \frac{1}{2} \qquad n \geq 1$$

ces inégalités vont nous permettre de faire l'exercice no 3 du TP 26 janvier.

③ la suite x_n est croissante : $x_n < x_{n+1}$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{(n+1)^n}$$

$$= \frac{(n+2)^n n^n}{(n+1)^n (n+1)^n} \cdot \frac{n+2}{n+1}$$

$$= \left(\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\right)^n \cdot \frac{n+2}{n+1}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \frac{n+2}{n+1}$$

$$\geq \left(1 - \frac{n}{(n+1)^2}\right) \frac{n+2}{n+1}$$

$$= \frac{n^2+n+1}{n^2+2n+1} \frac{n+2}{n+1}$$

$$= \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 2}{n^3 + 3n^2 + 3n + 1} > 1$$

$$x_{n+1} > x_n$$

Théorème 14

Soit $\{x_n\}$ telle que

1) $x_n \leq x_{n+1} \qquad n \geq 1$
2) x_n est majorée.

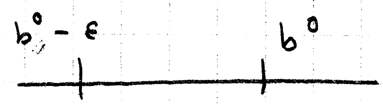
Alors

$$x_n \longrightarrow \sup \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$$

Preuve. Soit $b^0 = \sup \{x_n\}_1^{\infty}$

(existe puisque x_n est majorée)

Soit $\epsilon > 0$.



Il existe n_0 tel que $b^0 - \epsilon < x_{n_0} \leq b^0$

sinon b^0 ne serait pas la plus petite borne supérieure.

x_n est croissante signifie que $x_{n_0} \leq x_n \leq b^0$ pour tout $n \geq n_0$

On a donc montré que $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \, n_0$ tel que

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad b^0 - \epsilon < x_n \leq b^0$$

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad x_n \in V(b^0, \epsilon).$$

En particulier $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$

Définitions

x_n est

croissante si $x_n \leq x_{n+1} \quad \forall n$
strictement croissante si $x_n < x_{n+1} \quad \forall n$
décroissante si $x_n \geq x_{n+1} \quad \forall n$
strictement décroissante si $x_n > x_{n+1} \quad \forall n$
monotone si elle possède une de ces propriétés

Théorème 15 Toute suite monotone bornée converge

preuve.

une suite monotone (croissante) bornée admet un supremum. Par le Théo. 14 elle converge.

Soit x_n une suite décroissante bornée. Alors elle admet un infimum b_0.

Soit $\varepsilon > 0$.

Alors il existe n_0 tel que

$$b_0 \leq x_n < b_0 + \varepsilon$$

(sinon b_0 ne serait pas l'infimum de $\{x_n\}$.)

Puisque x_n est décroissante, on a

$$b_0 \leq x_n < b_0 + \varepsilon \quad \forall\ n \geq n_0.$$

Donc

$$n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in V(b_0, \varepsilon) \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = b_0$$

$\boxed{///}$

Proposition 16

Soit $\{x_n\}$ une suite dans $[0, \infty[$ telle que $x_n \to a$.

Alors $\sqrt{x_n} \to \sqrt{a}$.

preuve.

1er cas $a = 0$, donc $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ $\quad (x_n \geq 0)$

montrons que $\sqrt{x_n} \to 0$.

Soit $\varepsilon > 0$.

Prenons $N(\varepsilon)$ tel que $|x_n| < \varepsilon^2$ si $n > N(\varepsilon)$

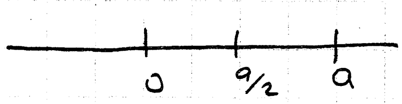
Alors

$$n > N(\varepsilon) \Rightarrow |\sqrt{x_n}| = \sqrt{x_n} < \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$$

conclusion: $\sqrt{x_n} \to 0$.

2ème cas

Supposons maintenant que $a > 0$.



$\exists\, N_1(\varepsilon)$ tel que

$\frac{a}{2} < x_n$ si $n > N_1(\varepsilon)$

ou $\sqrt{\frac{a}{2}} < \sqrt{x_n}$ si $n > N_1(\varepsilon)$

$x_n \to a \Rightarrow \exists\, N_2(\epsilon)$ tel que

$$n > N_2(\epsilon) \Rightarrow |x_n - a| < 2\sqrt{\tfrac{a}{2}}\,\epsilon$$

Prenons $n > \max\{N_1(\epsilon), N_2(\epsilon)\} = N(\epsilon)$
alors

$$|\sqrt{x_n} - \sqrt{a}| = \left| \frac{(\sqrt{x_n} - \sqrt{a})(\sqrt{x_n} + \sqrt{a})}{\sqrt{x_n} + \sqrt{a}} \right|$$

$$= \frac{|x_n - a|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{a}}$$

$$\leq \frac{|x_n - a|}{\sqrt{\frac{a}{2}} + \sqrt{\frac{a}{2}}} \qquad (n > N_1(\epsilon))$$

$$= \frac{|x_n - a|}{2\sqrt{\frac{a}{2}}}$$

$$< \frac{2\sqrt{\frac{a}{2}}\,\epsilon}{2\sqrt{\frac{a}{2}}} = \epsilon \qquad (n > N_2(\epsilon))$$

Donc $\sqrt{x_n} \to \sqrt{a}$.

▨

Exemple 16 On a vu que $\dfrac{5n+8}{2n+3} \to \dfrac{5}{2}$

De plus $\dfrac{5n+8}{2n+3} \geq 0 \quad \forall n$.

Donc

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{5n+8}{2n+3}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{5n+8}{2n+3}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

▨

Exemple 17 Soit la suite x_n définie par

$$x_1 = \sqrt{3}$$

$$x_n = \sqrt{3x_{n-1}} \qquad n \geq 2$$

Montrons d'abord que la suite converge, puis trouvons sa limite.

La suite est croissante et bornée supérieurement par 3.

$$x_1 = \sqrt{3} < 3$$

$$x_1 = \sqrt{3} < \sqrt{3\sqrt{3}} = x_2$$

Supposons que $x_m \leq 3$

$$x_m \leq x_{m+1}$$

Montrons que c'est vrai pour $m+1$:

$$x_{m+1} \leq 3$$

$$x_{m+1} \leq x_{m+2}.$$

$$x_{m+1} = \sqrt{3x_m} \leq \sqrt{3 \cdot 3} = 3$$

$$x_{m+1} = \sqrt{x_{m+1}^2} \leq \sqrt{3x_{n+1}} = x_{m+2}$$

Comme la suite est croissante et bornée supérieurement nous pouvons conclure que $\lim_{m \to \infty} x_m = x$.

$$x_{m+1} = \sqrt{3x_m} \qquad m \geq 1$$

$$\lim_{m \to \infty} x_{m+1} = x$$

$$\lim_{m \to \infty} x_{m+1} = \lim_{m \to \infty} \sqrt{3x_m} = \sqrt{\lim_{m \to \infty} 3x_m}$$

$$= \sqrt{3x}$$

D'où $x = \sqrt{3x}$

$$x^2 = 3x \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 3.$$

$x_m \nearrow x$ et $x_1 = \sqrt{3} \Rightarrow x = 3$.

$\boxed{////}$

<u>**Théorème 17**</u> Si $\lim_{m \to \infty} x_m = a$ et $\lim_{m \to \infty} y_m = b$

alors la suite $x_m + y_m$ converge.

De plus $\lim_{m \to \infty} (x_m + y_m) = a + b$.

(La limite d'une somme est la somme des limites).

preuve Soit $\varepsilon > 0$

$x_m \to a \Rightarrow \exists\, N_1(\varepsilon)$ tel que $m > N_1(\varepsilon) \Rightarrow |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

$y_m \to b \Rightarrow \exists\, N_2(\varepsilon)$ tel que $m > N_2(\varepsilon) \Rightarrow |y_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

Prenons $N(\varepsilon) = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$

$m > N(\varepsilon)$

$$\begin{aligned}
|x_m + y_m - (a+b)| &= |x_m - a + y_m - b| \\
&\le |x_m - a| + |y_m - b| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + |y_m - b| && m > N_1(\varepsilon) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon && m > N_2(\varepsilon)
\end{aligned}$$

Conclusion $x_m + y_m \to a + b$.

$\blacksquare$

Théorème 18 Soit $k \in \mathbb{R}$ et $x_m \to a$.

Alors $kx_m \to ka$.

Preuve.

Soit $\varepsilon > 0$

$x_m \to a \Rightarrow \exists\, N_1(\varepsilon)$ tel que $m > N_1(\varepsilon) \Rightarrow |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{1+|k|}$

Alors $m > N_1(\varepsilon) \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
|kx_m - ka| &= |k|\,|x_m - a| \\
&< |k| \frac{\varepsilon}{1+|k|} < \varepsilon
\end{aligned}$$

$\Rightarrow kx_m \to ka$

$\blacksquare$

Théorème 19 Soit $x_n \to a$ et
$y_n \to b$.

Alors $x_n y_n \to ab$.

(la limite d'un produit est le produit des limites)

Preuve.

Soit $\varepsilon > 0$.

$$
\begin{aligned}
|x_n y_n - ab| &= |x_n y_n - x_n b + x_n b - ab| \\
&\leq |x_n y_n - x_n b| + |x_n b - ab| \\
&= |x_n|\,|y_n - b| + |b|\,|x_n - a|
\end{aligned}
$$

La suite x_n converge, elle est donc bornée.

Prenons M tel que $|x_n| < M \quad \forall n$.
et $|b| < M$

$x_n \to a \Rightarrow \exists N_1(\varepsilon) \quad n > N_1(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}$

$y_n \to b \Rightarrow \exists N_2(\varepsilon) \quad n > N_2(\varepsilon) \Rightarrow |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M}$

Si $n > N(\varepsilon) = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$

alors

$$
\begin{aligned}
|x_n y_n - ab| &< M|y_n - b| + M|x_n - a| \\
&< M\frac{\varepsilon}{2M} + M\frac{\varepsilon}{2M} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}
$$

Conclusion $x_n y_n \to ab$.

////

Théorème 20 Si $\lim_{n\to\infty} x_n = a \neq 0$

Alors il existe N, $\beta > 0$ tel que

$$n > N \Rightarrow |x_n| > \beta > 0.$$

Preuve.

Prenons $\varepsilon = \frac{|a|}{2} > 0$.

$\exists\, N(\varepsilon)$ tel que

$$|x_n - a| < \frac{|a|}{2}, \quad n > N(\varepsilon)$$

$$n > N(\varepsilon) \Rightarrow \big|\,|x_n| - |a|\,\big| \leq |x_n - a| < \frac{|a|}{2}$$

$\Rightarrow |a| - |x_n| < |a|/2$

$$\Rightarrow |x_n| > \frac{|a|}{2}.$$

On pose $\beta = \frac{|a|}{2}$.

$\blacksquare$

Théorème 21 Soit $x_n \to a$

$$y_n \to b \neq 0.$$

On suppose $\frac{x_n}{y_n}$ définie sauf peut-être pour un nombre fini de termes (ie. $y_n \neq 0$ sauf pour un nombre fini de n)

Alors $\frac{x_n}{y_n} \longrightarrow \frac{a}{b}$.

preuve.

Les hypothèse donnent

$\exists\, N \quad n > N \Rightarrow |y_n| > \beta > 0$ pour un β.

$\exists\, N_1(\varepsilon) \quad n > N_1(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}\beta$.

$\exists\, N_2(\varepsilon) \quad n > N_2(\varepsilon) \Rightarrow |y_n - b| < \frac{\varepsilon\beta|b|}{2(1+|a|)}$

Prenons $N = \max\{N, N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$

alors $n > N \Rightarrow$

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} \right| = \frac{|bx_n - ay_n|}{|b||y_n|}$$

$$= \frac{|bx_n - ba + ab - ay_n|}{|b||y_n|}$$

$$\leq \frac{|b||x_n - a|}{|b||y_n|} + \frac{|a||y_n - b|}{|b||y_n|}$$

$$< \frac{|x_n - a|}{\beta} + \frac{|a||y_n - b|}{|b|\beta}$$

$$< \frac{\varepsilon\beta}{2\beta} + \frac{|a|\varepsilon|b|}{2|b|(1+|a|)}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\boxed{////}$

Exemple 18 $\quad x_n = \dfrac{3n+2}{n-1} \qquad n \geq 2$

Le théorème ne s'applique pas puisqu'il ne s'agit pas d'un quotient de deux suites qui convergent.

$$x_n = \frac{3n+2}{n-1} = \frac{3 + \frac{2}{n}}{1 - \frac{1}{n}}$$ est un quotient de

deux suites convergentes : $3 + \frac{2}{n} \to 3 \qquad 1 - \frac{1}{n} \to 1$

Alors $$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{2}{n}}{1-\frac{1}{n}} = \frac{\lim_{n\to\infty} 3 + \frac{2}{n}}{\lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n}} = \frac{3}{1}$$

Exemple 19 $\quad x_n = \sqrt{n^2+3n} - \sqrt{n^2+n}$

Ecrivons

$$x_n = \frac{\sqrt{n^2+3n} - \sqrt{n^2+n}}{\sqrt{n^2+3n} + \sqrt{n^2+n}} \left(\sqrt{n^2+3n} + \sqrt{n^2+n}\right)$$

$$= \frac{2n}{\sqrt{n^2+3n} + \sqrt{n^2+n}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1+\frac{3}{n}} + \sqrt{1+\frac{1}{n}}}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{3}{n}} + \sqrt{1+\frac{1}{n}}}$$

$$= \frac{2}{2} = 1$$

car $\lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{3}{n}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} 1+\frac{3}{n}} = \sqrt{1} = 1$

et $\lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n}} = 1$.

<u>Exemple 20</u> Soit $x_n \to a$

Montrons que $m \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (x_n)^m = a^m$

$m = 1$ la relation est triviale.

supposons la proposition $\lim_{n\to\infty} x_n^m = a^m$ vraie pour m, montrons qu'elle est vraie pour $m+1$

$$\lim_{n\to\infty} (x_n)^{m+1} = \lim_{n\to\infty} (x_n)^m (x_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} (x_n)^m \cdot \lim_{n\to\infty} x_n$$

$$= a^m \cdot a = a^{m+1}$$

Grâce au principe d'induction, la proposition est vraie pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Exemple 21

Soit $a > 0$

Soit $x_1 > 0$ (quelconque)

$$x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}} \right) \qquad n \geq 2$$

Nous allons montrer que $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$

Étape 1 $\quad x_n^2 \geq a \qquad n \geq 2.$

$$x_n^2 - a = \frac{1}{4}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}} \right)^2 - a$$

$$= \frac{1}{4}\left[x_{n-1}^2 + \frac{2a\,x_{n-1}}{x_{n-1}} + \frac{a^2}{x_{n-1}^2} - 4a \right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[x_{n-1}^2 - \frac{2a\,x_{n-1}}{x_{n-1}} + \frac{a^2}{x_{n-1}^2} \right]$$

$$= \frac{1}{4}\left(x_{n-1} - \frac{a}{x_{n-1}} \right)^2 \geq 0 .$$

Donc $x_n > 0 \quad n = 1, 2, \ldots$ et $x_n \geq \sqrt{a} \quad n \geq 2.$
La suite est donc bornée inférieurement.

Etape 2 $\quad$ Elle est décroissante.

$$x_n - x_{n-1} = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}} \right) - x_{n-1}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(x_{n-1} - \frac{a}{x_{n-1}} \right)$$

$$= -\frac{x_{n-1}^2 - a}{2\,x_{n-1}} \leq 0$$

La suite converge donc vers $b = \inf\{x_n\}$.

Nous terminons en montrant que $b = \sqrt{a}$!

On a $b > 0$. L'égalité $x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}} \right)$

Nous donne $b = \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}} \right)$

$$= \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} x_{n-1} + \frac{a}{\lim_{n\to\infty} x_{n-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(b + \frac{a}{b}\right)$$

D'où

$$2b = b + \frac{a}{b}$$

$$b^2 = a$$

$$b = \sqrt{a} \qquad (b = \lim x_n \,,\; x_n \geq \sqrt{a})$$

<u>Note 1</u> Si $x_n \to a$ et y_n diverge alors $x_n + y_n$ diverge

En effet, si $x_n + y_n$ convergeait alors

$y_n = (x_n + y_n) - x_n$ converge, une contradiction

<u>Note 2</u> Si x_n et y_n divergent, il se peut que $x_n + y_n$ converge :

$x_n = (-1)^n$ diverge

$y_n = (-1)^{n+1}$ diverge.

$x_n + y_n = \{0\}_{n=1}^{\infty}$ converge (suite constante)

4- Topologie de la droite réelle (introduction)

$E \subset \mathbb{R}$

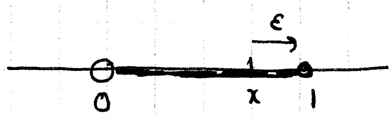
$x \in E$ est un <u>pt intérieur de E</u> si $\exists\, \varepsilon > 0$ tel que $V(x, \varepsilon) \subset E$

E est <u>ouvert</u> si $\forall x \in E$, x est un pt. intérieur de E.

Exemples

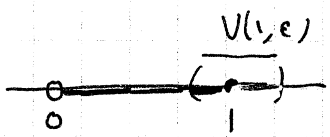
1) $E =]0, 1]$

si $x > 0$ et $x \neq 1$ alors x est un point intérieur de E.

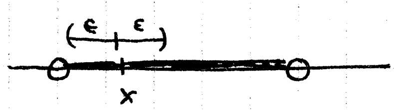


Prenons $\varepsilon = \min\{|x-0|, |x-1|\}$
alors
$$V(x, \varepsilon) \subset E.$$

$1 \in E$ n'est pas un pt. intérieur : soit $\varepsilon > 0$ alors $V(1, \varepsilon)$ contient toujours des pts qui ne sont pas dans E, à savoir $1 < y < 1 + \varepsilon$



2) $A =]a, b[$ est ouvert ! $a < b$



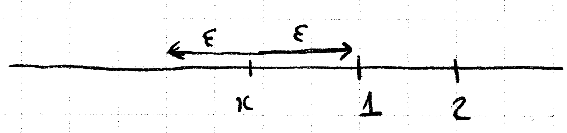
Soit $x \in A$, posons
$$\varepsilon = \min\{|x-a|, |x-b|\} > 0$$
alors $V(x, \varepsilon) \subset A$
car si $y \in V(x, \varepsilon)$
$$a \leq x - \varepsilon < y < x + \varepsilon \leq b \implies y \in A.$$

3) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ est ouvert.

soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$
alors $\exists\, n \in \mathbb{N}$

2 cas : $x < 1$
$x > 1$

si $x < 1$ prenons $\varepsilon = |x-1|$ et
$$V(x, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$$



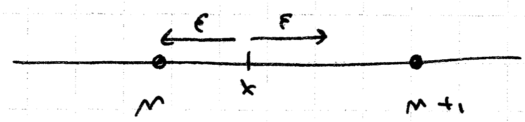
car $y \in V(x, \varepsilon) \implies$
$$x - \varepsilon < y < x + \varepsilon = 1$$
et $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.

si $x > 1$ $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tel que

$$n < x < n+1$$

prenons $\varepsilon = \min \{ |x-n| , |x-(n+1)| \} > 0$

Alors $V(x, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.



$F \subset \mathbb{R}$ est <u>fermé</u> si F^c est ouvert.

<u>Proposition 1</u> Soient $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ une famille d'ouverts

alors $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ est un ouvert.

preuve.

soit $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$.

$x \in U_i$ pour un certain indice

$\exists\, \varepsilon >$ tel que $V(x, \varepsilon) \subset U_i$

$\Rightarrow x \in V(x, \varepsilon) \subset U_i \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$

donc x est un pt intérieur de $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$.

$\boxed{///}$

Note La <u>proposition est vraie</u> pour une <u>union quelconque</u> d'ouverts :

$\bigcup_{i \in I} U_i$ est un ouvert

si chaque U_i, $i \in I$ est un ouvert.

<u>Proposition 2</u> Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}$

alors

$U \cap V$ est ouvert.

preuve.

soit $x \in U \cap V$

$\Rightarrow \exists\, \varepsilon_1 > 0$ $V(x, \varepsilon_1) \subset U$

$\exists\, \varepsilon_2 > 0$ $V(x, \varepsilon_2) \subset V$

prenons $\varepsilon = \min \{ \varepsilon_1, \varepsilon_2 \} > 0$

alors $x \in V(x, \varepsilon) \subset V(x, \varepsilon_i)$

et $V(x, \varepsilon) \subset U \cap V$

donc x est un pt intérieur.

$\boxed{///}$

Par induction, on montre que toute intersection finie d'ouverts est un ouvert :

$$\bigcap_{i=1}^{m} U_i = \text{ouvert} \quad \text{si } U_i \text{ est un ouvert}, i=1,\dots,m$$

$\mathbb{R}$ est ouvert !
$\emptyset$ est ouvert ! Existe-t-il un x de $\emptyset$ qui ne soit ouvert un pt intérieur de $\emptyset$

Résumé des propriétés des ouverts de $\mathbb{R}$.

1) $\mathbb{R}$, $\emptyset$ sont ouverts
2) une intersection finie d'ouverts est un ouvert
3) une union quelconque d'ouverts est un ouvert.

<u>Exemple 4</u> Soit $E_m =]-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}[$ ouvert de $\mathbb{R}$ $m = 1, \dots, \infty$.

Alors $\bigcap_{m=1}^{\infty} E_m = \{0\}$

et $\{0\}$ n'est pas ouvert.

<u>Exemple 5</u> Chaque pt de $\mathbb{R}$ est un fermé.
en effet :
soit $a \in \mathbb{R}$: $\mathbb{R} \setminus \{a\} =]-\infty, a[\cup]a, \infty[$
une union de deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$.

<u>Exemple 6</u> $\mathbb{Z}$ est un fermé de $\mathbb{R}$

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \left( ]i-1, i[\cup]-i, -i+1[\right)$$

une union d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$.

donc $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ est ouvert
et
$\mathbb{Z}$ est fermé.

Note : $\mathbb{N}$ est fermé également.

Exemple 7

$$E = \{ \tfrac{1}{n} , n \in \mathbb{N} \} \text{ n'est pas fermé.}$$

considérons $0 \in \mathbb{R} \setminus E = E^c$

montrons que 0 n'est pas un pt. intérieur.

Soit $\varepsilon > 0$, puisque $\frac{1}{n} \to 0$ $\exists N(\varepsilon)$ tel que $n > N(\varepsilon) \Rightarrow \frac{1}{n} \in V(0, \varepsilon)$

Donc tout voisinage de 0 contient toujours des pts de E.

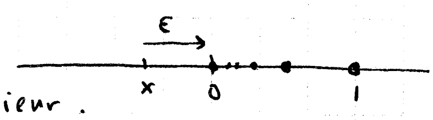
Par conséquent, aucun voisinage $V(0, \varepsilon)$ n'est contenu dans $\mathbb{R} \setminus E$.

Maintenant considérons $F = E \cup \{0\}$. Montrons que F est fermé.

Soit x un pt du complément de F : $x \neq 0$ et $x \neq \frac{1}{n}$ $n = 1, \dots \infty$

Si $x < 0$

alors $V(x, |x|) \subset F$



tout pt. à gauche de 0 est un pt. intérieur.

Si $x > 0$ et $x \neq \frac{1}{n}$, $n = 1, \dots$, et $x < 1$

$$\exists\, n \text{ tel que } \frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n}$$

et x est un pt intérieur de l'intervalle ouvert $\left] \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right[\subset F^c$

Si $x > 1$ alors x est un pt intérieur de $]1, \infty[\subset F^c$

Donc F^c est ouvert. $\Rightarrow$ F est fermé.

En fait :
$$F^c =]-\infty, 0[\cup]1, \infty[\cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \left] \tfrac{1}{i+1}, \tfrac{1}{i} \right[\right)$$
$$= \text{union d'ouverts} = \text{ouvert.}$$

Proposition 3 Une intersection quelconque de fermés est un fermé.

Une union finie de fermés est un fermé.

Preuve.

Soient F_i, $i \in I$ des fermés de $\mathbb{R}$

Montrons que $\left(\bigcap_{i \in I} F_i \right)^c$ est un ouvert.

$$\left(\bigcap_{i\in I} F_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} F_i^c = \text{union d'ouverts !}$$

$$= \text{ouvert.}$$

Donc le complément de $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un ouvert. Par conséquent $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un fermé.

Soit $F_1, \dots, F_n$ une famille de fermés de $\mathbb{R}$.

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} F_i^c$$

$$= \text{intersection finie d'ouverts de } \mathbb{R}.$$

$$= \text{ouvert.}$$

$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} F_i$ est un fermé.

$\boxed{///}$

<u>Note</u> $\mathbb{R}^c = \emptyset$ et $\emptyset^c = \mathbb{R} \Rightarrow \emptyset$ et $\mathbb{R}$ sont des fermés.

<u>Exemple 8</u>

$F = [a, b]$ est fermé car

$F^c =]-\infty, a[\cup]b, \infty[$ une union de deux ouverts.

$A =]-\infty, a]$ est fermé car $A^c =]a, \infty[$ un ouvert.

<u>Exemple 9</u> $E_n = \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]$ $n = 2, \dots$

les E_n sont des fermés de $\mathbb{R}$.

$(*)$ $\bigcup_{n=2}^{\infty} E_n =]0, 1[$ un ouvert.

Chaque $E_n \subset]0,1[$.
donc $\bigcup_{n=2}^{\infty} E_n \subset]0,1[$.

Soit $x \in]0,1[$ $\qquad E_1 = \{1/2\}$ $\qquad E_2 = \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$

Si $x < \frac{1}{2}$, $\exists\, n_0$ tel que $n > n_0 \Rightarrow \frac{1}{n} < x$

donc $x \in E_m$ si $m > m_0$.

Si $1 > x > \frac{1}{2}$ alors $\frac{1}{m} \to 0 \Rightarrow \exists N_0$ tel que

$$m > N_0 \Rightarrow x < 1 - \frac{1}{m}$$

$$\Rightarrow x \in E_m \quad , m > N_0 .$$

On a montré $\forall x \in]0,1[$, $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$

$$\Rightarrow]0,1[\subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$$

ce qui montre que $]0,1[= \bigcup_{i=1}^{\infty} [+\frac{1}{m} , 1 - \frac{1}{m}]$

<u>Définition</u>. Soit $E \subset \mathbb{R}$. $E \neq \emptyset$.

On dit que a est un <u>point d'accumulation de E</u> si

1) Tout voisinage de a rencontre un point de E autre que a.

$\Leftrightarrow$ 2) $\forall \epsilon > 0 \quad V'(a, \epsilon) \cap E \neq \emptyset$

L'ensemble des pts d'accumulation de E est noté E', on dit que c'est l'<u>ensemble dérivé de E</u>.

<u>Exemple 10</u>

$$E = \{ \frac{1}{m} \mid m \geq 1 \}.$$

$E' = \{0\}$ Tout voisinage de la forme $V(0, \epsilon)$ rencontre un pt de la forme $\frac{1}{m} \neq 0$.

donc $0 \in E'$

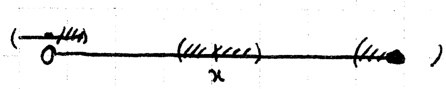
E' ne contient pas d'autres pts. (voir exemple 7)

<u>Exemple 11</u> $\quad E =]0, 1]$

$\quad E' = [0, 1]$

Soit $x \in [0,1]$ Tout voisinage de la forme $V(x, \epsilon)$ rencontre $]0, 1]$ en un pt autre que x.

$$V'(x, \epsilon) \cap]0, 1] \neq \emptyset$$



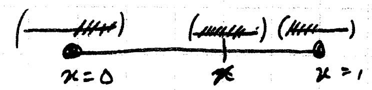
Tout pt x de $[0, 1]^c$ possède un voisinage de la forme $V(x, \epsilon)$ tel que $V(x, \epsilon) \cap [0, 1] = \emptyset$

Exemple 12

$$E = \mathbb{Q} \cap [0,1]$$

$$E' = [0,1]$$

Soit $x \in [0,1]$. Tout voisinage de x de la forme $V(x,\varepsilon)$ rencontre une infinité de pts de $\mathbb{Q}$ (densité des rationnels)



Proposition 4 $E \subset \mathbb{R}$

$x \in E' \iff \forall \varepsilon > 0 \quad V(x,\varepsilon) \cap E$ contient une infinité de pts.

Preuve.

$\Leftarrow$ Supposons que tout voisinage de x contienne une infinité de pts de E. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $V(x,\varepsilon)$ contient une infinité de pts de E il contient certainement un pt $e \in E$ différent de x. Donc $x \in E'$.

$\Rightarrow$ supposons que $x \in E'$. On procède par contradiction. On suppose qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $U(x,\varepsilon) \cap E$ est fini, alors

$$V'(x,\varepsilon) \cap E = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

(si $U'(x,\varepsilon) \cap E = \emptyset$ alors $x \notin E'$)

Posons

$$\delta = \min\{|x-a_1|, \ldots, |x-a_n|\} > 0$$

Alors $V(x,\delta) \cap E = \{x\}$

i.e. $V'(x,\delta) \cap E = \emptyset$

et x n'est pas un pt. d'accumulation.

$\blacksquare$

Proposition 5 $E \subset \mathbb{R}$

$a \in E' \iff \exists \{x_n\} \subseteq E \quad x_n \neq a \ \forall n$ telle que $x_n \to a$.

preuve

$\Rightarrow$ soit $a \in E'$ pour chaque entier positif n, prenons $x_n \in E$ tel que

$$0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}$$

le voisinage $]a-\frac{1}{n}, a+\frac{1}{n}[$ contient toujours un pt de E différent de a.

La suite $\{x_n\}$ converge vers a. En effet, soit $\epsilon > 0$.
Prenons $N(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon}$.

$$n > N(\epsilon) \Rightarrow 0 < |x_n - a| < \frac{1}{n} < \epsilon .$$

$\Longleftarrow$ Supposons que $\{x_n\} \subset E$
$x_n \neq a \ \forall n$
$x_n \to a$.

Soit $\epsilon > 0$ alors puisque $x_n \to a$, le voisinage $V(a, \epsilon)$ contient tous les termes de la suite sauf peut-être un nombre fini.
Donc tout voisinage de a contient une infinité de pts de E.
$\Rightarrow a \in E'$

Exemple 13

$$E = \left\{ \frac{3n+1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$3 \in E'$

en effet: $x_n = \frac{3n+1}{n} \longrightarrow 3$ et $x_n \in E$
$x_n \neq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Proposition 6

Soit $E \subset \mathbb{R}$. $E \neq \emptyset$.

$E \cup E'$ est un fermé.

Preuve. Il faut montrer que le complément de $E \cup E'$ est un ouvert.

Soit $a \in (E \cup E')^c$. Montrons que a est un pt intérieur de $(E \cup E')^c$.
puisque $a \notin E'$, $\exists \ \epsilon > 0$ tel que

$$V'(a, \epsilon) \cap E = \emptyset$$

puisque $a \notin E$

$$V(a, \epsilon) \cap E = \emptyset$$

$$\Rightarrow \quad V(a, \epsilon) \subset E^c$$

Soit $y \in V(a,\varepsilon) \subset E^c$

$\exists\, \delta > 0$ tel que $V(y,\delta) \subset V(a,\varepsilon) \cap E^c$
donc y possède un voisinage qui ne rencontre pas E
$\Rightarrow y \notin E'$.

$$\Rightarrow V(a,\varepsilon) \subset (E^c \cap E'^c) = (E \cup E')^c$$

et a est un pt intérieur de $(E \cup E')^c$.

Définition : $E \subset \mathbb{R}$.

$\overline{E} = E \cup E'$ fermeture de E
l'adhérence de E.

Proposition 7 E est fermé $\Leftrightarrow$ $E = \overline{E}$

Preuve

1) $\Rightarrow$ Supposons E fermé. Notons d'abord que E est toujours contenu dans $E \cup E' = \overline{E}$.
Pour montrer que $\overline{E} \subset E$ il suffit de montrer que $E' \subset E$, c'est-à-dire que E contient ses points d'accumulation.

Soit $a \in E'$ montrons que $a \in E$
Si $a \notin E$ prenons $\varepsilon > 0$ tel que $V(a,\varepsilon) \subset E^c$,
cela est possible puisque E^c est ouvert (E est fermé).
$\Rightarrow V(a,\varepsilon) \cap E = \emptyset$
ce qui contredit le fait que $a \in E'$.

2) $\Leftarrow$ Supposons que $\overline{E} = E$
Montrons que le complément de E est ouvert.
Soit $x \in E^c$
puisque $E = \overline{E} = E \cup E'$
$\Rightarrow x \notin E'$, donc x n'est pas un pt d'accumulation de E.
$\exists\, \varepsilon > 0$ Tel que $V'(x,\varepsilon) \cap E = \emptyset$
$x \notin E \Rightarrow V(x,\varepsilon) \cap E = \emptyset$
$\Rightarrow x$ pt intérieur de E^c
$\Rightarrow E^c$ est ouvert.

plus court : $\overline{E} = E \cup E'$ est fermé, prop 6, donc E est fermé.

Proposition 8

Soit E un fermé de $\mathbb{R}$.
Soit $\{x_n\}$ une suite contenue dans E qui converge vers a.
Alors $a \in E$.

Preuve.

Supposons que $a \notin E$, $a \in E^c$

E^c est un ouvert $\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0$ tel que $V(a,\varepsilon) \cap E = \emptyset$

il existe donc un voisinage $V(a,\varepsilon)$ ne contenant aucun pt de E, donc de $\{x_n\}$.

ce qui contredit le fait que $x_n \to a$.

∎

Proposition 9

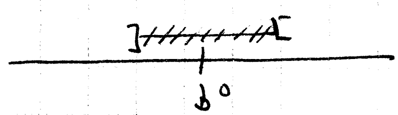
Soit E fermé et borné supérieurement.
Alors $\sup(E) \in E$.

preuve.

Soit $b^0 = \sup(E)$ (existe car E est borné supérieur.)

si b^0 est un pt d'accumulation de E, $b^0 \in E$ car E est fermé.

si b^0 n'est pas un pt d'accumulation.
$\exists\, \varepsilon > 0$ tel que $V'(b^0,\varepsilon) \cap E = \emptyset$



$b^0 = \sup(E) \Rightarrow \exists\, x$ dans $V(b^0,\varepsilon) \cap E$

$\Rightarrow x = b^0$

et $b^0 \in E$.

Exemple 14

$$E =]0,1[$$

$$\sup(E) = 1 \notin E$$

$$E =]0,1]$$

$$\sup(E) = 1 \in E$$

Théorème de Bolzano-Weierstrass

Tout ensemble infini et borné admet au moins un pt d'accumulation.

Preuve. Soit E borné et infini

$$E \subset [a, b] \qquad a < b$$

$[a, b]$ contient une infinité de pts de E.

On pose $a_0 = a$, $b_0 = b$.

On construit une suite d'intervalles $[a_n, b_n]$ ayant les propriétés :

a) $\lambda[a_n, b_n] = b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$

b) $a_0 \le a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n \le \cdots \le b_n \le b_{n-1} \le \cdots \le b_1 \le b_0$

i.e. $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$

c) $[a_n, b_n]$ contient une infinité d'éléments de E

Étape 1 $[a_0, b_0] = [a, b]$ a), b), c) sont vérifiées.

Supposons que $[a_n, b_n]$ vérifie les conditions a), b) et c).

$$[a_n, b_n] = \left[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right] \cup \left[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n\right]$$

Comme $[a_n, b_n]$ contient une infinité d'éléments de E, un des deux sous-intervalles contient une infinité de pts de E.

Disons que c'est $\left[a_n, \dfrac{a_n+b_n}{2}\right]$

alors on pose $a_{n+1} = a_n$

$$b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$$

L'intervalle $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ vérifie les propriétés a, b, c).

On construit ainsi par induction la séquence de sous-intervalles recherchée.

Étape 2

Soit $A = \{a_n \; ; \; n = 0, 1, 2, \dots\}$.

A est borné par $b_0 = b$

donc $\sup(A) = \alpha$ existe.

Montrons que $\alpha \in [a_n, b_n]$ $\quad \forall n = 0, 1, \dots$

On a $\quad a_n \leq \alpha \quad \forall n = 0, 1, \dots$

Prenons b_k quelconque, a_n quelconque

$$a_n \leq a_{n+k} \leq b_{n+k} \leq b_k$$

Donc b_k est un majorant de A.

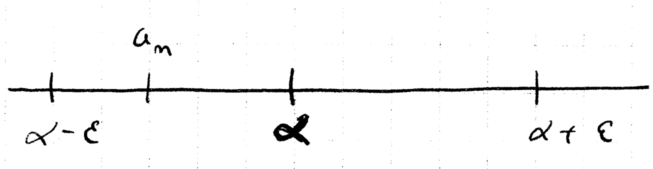
$$\Rightarrow \sup(A) \leq b_k$$

$$\Rightarrow \alpha \leq b_k \quad \forall k = 0, 1, \dots$$

$$\Rightarrow \alpha \in [a_n, b_n] \quad \forall n = 0, 1, \dots$$

Étape 3 Montrons que α est un pt. d'accumulation de E.

Montrons que tout voisinage $V(\alpha, \varepsilon)$ contient une infinité de pts de E.



$\alpha - \varepsilon$ n'est pas une borne sup de E $\Rightarrow \exists \; n$ tel que

$$\alpha - \varepsilon < a_n \leq \alpha$$

Prenons $m > n$ tel que $\quad b_m - a_m < \dfrac{b_0 - a_0}{2^m} < \dfrac{b_0 - a_0}{m} < \varepsilon$

Alors $\quad a_n \leq \underbrace{a_m \leq \alpha \leq b_m}_{<\varepsilon} \Rightarrow [a_m, b_m] \subset$

$]\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon[$

Et nous voyons que

$$[a_m, b_m] \subset V(\alpha, \varepsilon)$$

et $[a_m, b_m]$ contient une infinité de pts de E.

$\blacksquare$

Exemple 15

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ sont infinis mais non bornés.

$$\mathbb{N}' = \emptyset$$
$$\mathbb{Z}' = \emptyset$$

$\mathbb{Q}$ infini, non borné.

$$\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$$

Sous-suites (ou suites partielles)

suite : $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
$n \mapsto x_n = x(n)$

soit $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$n \mapsto 2n$ (σ strictement croissante)

$x \circ \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
$n \mapsto 2n \mapsto x_{2n} = x(2n)$

est une sous-suite de x, notée x_{2n}

<u>Définition.</u> x_n une suite, $\{n_k\}$ une suite d'entiers tels que $1 \le n_1 < n_2 < n_3 < \dots$
On appelle $\{x_{n_k}\}$ une sous-suite de la suite $\{x_n\}$

$$[\, n_i = \sigma(i) \,]$$

<u>Exemples</u> 16 $x_n = \frac{1}{n}$ $n \geq 1$

$\sigma(n) = 2n$ $x_{2n} = \frac{1}{2n}$

$\sigma(n) = n^2$ $x_{n^2} = \frac{1}{k^2}$

$\sigma(n) = 3^n$ $x_{3^n} = \frac{1}{3^n}$

"contre exemple" $1, 1/2, 1/8, 1/4, 1/16,$ n'est pas une sous-suite de $\{\frac{1}{n}\}$

<u>Proposition 9</u> Soit $\{x_n\}$ une suite convergente.
Alors toute sous-suite de $\{x_n\}$ converge

Preuve. Supposons que $x_n \to a$
Soit $x_{n_i} = x \circ \sigma$ une sous-suite de $\{x_n\}$.

Soit $\varepsilon > 0$ $\exists\, N(\varepsilon)$ tel que $|x_n - a| < \varepsilon$ dès que $n > N(\varepsilon)$
$\sigma(k) = n_k \geq k$. Donc si $k > N(\varepsilon)$
$\Rightarrow n_k > N(\varepsilon)$

$\Rightarrow \quad |x_{n_k} - a| < \varepsilon$

Donc $\lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k} = a$.

$\boxed{////}$

Proposition 10 Si une suite x_n possède deux sous-suites qui convergent vers des valeurs différentes alors x_n diverge.

Preuve. conséquence immédiate de la prop. précédente.

Proposition 11

Soit $\{x_n\}$ une suite bornée. Alors $\{x_n\}$ a une sous-suite qui converge.

Preuve.

Soit $\{x_n\}$ une suite bornée.

1er cas Si $x(\mathbb{N}) \subset \mathbb{R}$ est fini, un des termes de $x(\mathbb{N})$, disons x_i apparait une infinité de fois.

La suite constante $\{x_i\}$ est une sous-suite de x_n qui converge vers x_i

2ème cas Si $x(\mathbb{N}) \subset \mathbb{R}$ est infini, puisque $\{x_n\}$ est bornée, Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, cet ensemble infini possède un pt. d'accumulation noté a.

On construit une sous-suite de $\{x_n\}$ qui converge vers a.

Prenons n_1 tel que $x_{n_1} \in V(a, 1)$

Prenons $n_2 > n_1$ tel que $x_{n_2} \in V(a, 1/2)$. Cela est possible car a est un pt d'accumulation de $\{x_n, n > n_1\}$.

On continue de la sorte, en prenant $n_3 > n_2$ tel que $x_{n_3} \in V(a, \frac{1}{3})$.

De manière générale, on a $x_{n_k} \in V(a, \frac{1}{k})$

On obtient une sous-suite $x_{n_k} \longrightarrow a$.

$\boxed{////}$

Proposition 12 $E \subset \mathbb{R}$ est fermé et borné ssi Toute suite d'éléments de E possède une sous-suite qui converge vers un élément de E.

Preuve. $\Rightarrow$ Supposons E fermé et borné.

Soit $\{x_n\} \subset E$ une suite contenue dans E.
Alors $\{x_n\}$ est bornée. Par la proposition précédente, $\{x_n\}$ possède une sous-suite $\{x_{n_k}\} \subset E$ qui converge vers a.
Puisque E est fermé, $x_{n_k} \to a \in E$.

$\Leftarrow$ Supposons que E est non fermé, non borné, ou les deux.

Si E est non borné, $\exists \{x_n\} \subset E$ tel que $|x_n| > n \quad \forall n$.
et il ne peut exister de sous-suite qui converge vers un élément de E.

Si E est non fermé, $E \neq \bar{E} = E \cup E'$. $\exists\ x_0 \in E'$, $x_0 \notin E$.
Donc $\exists$ une suite $\{x_n\} \subset E$, $x_n \neq x_0 \quad \forall n$, avec

$$x_n \to x_0$$

Toute sous-suite de $\{x_n\}$ doit converger vers $x_0 \notin E$. $\blacksquare$

Définition (1) $E \subset \mathbb{R}$ est compact s'il est fermé et borné.

Exemple 17 $E =]0,1[\qquad \{x_n = \frac{1}{n}\} \subset E$.

$$x_n \to 0 \notin E.$$

Suites de Cauchy

Une suite $\{x_n\}$ est appelée une suite de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \quad | \quad n, m > N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon$$

ou encore

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \mid \forall m > N(\varepsilon), \forall k > 0 \quad \Rightarrow \quad |x_{m+k} - x_m| < \varepsilon$$

Exemple 18 $\{\frac{1}{n}\}$ est une suite de Cauchy.

Prenons $k > 0$

$$|x_{n+k} - x_n| = \left|\frac{1}{n+k} - \frac{1}{n}\right| \leq \frac{1}{n+k} + \frac{1}{n} < \frac{2}{n}$$

Prenons $n_0 = \frac{2}{\varepsilon}$, alors $2/n < \varepsilon$. si $n > n_0$

alors $|x_{n+k} - x_n| < \frac{2}{n} < \varepsilon$.

Exemple 19 $x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \cdots\cdots + \frac{1}{n!}$

est une suite de Cauchy.

Soit $k > 0$

$$|x_{n+k} - x_n| = \frac{1}{(n+1)!} + \cdots\cdots + \frac{1}{(n+k)!}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots + \frac{1}{(n+2)\cdots(n+k)}\right]$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)!}\left[\underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{k-1}}}_{<2}\right]$$

$$< \frac{2}{(n+1)!} < \frac{2}{n+1}$$

Si $\varepsilon > 0$ est donné, il suffit de prendre $\frac{2}{n+1} < \varepsilon$,

c'est-à-dire $\underbrace{\frac{2}{\varepsilon} - 1}_{N(\varepsilon)} < n$

Exemple 20 $\{x_n = \sqrt{n}\}$.

$$|x_{n+k} - x_n| = \sqrt{n+k} - \sqrt{n} = \frac{k}{\sqrt{n+k} + \sqrt{n}} < \frac{k}{2\sqrt{n}}$$

Ce n'est pas une suite de Cauchy. On doit avoir pour tout $\varepsilon > 0$ un $N(\varepsilon)$ tel que $n > N(\varepsilon)$, $k > 0$ $\frac{k}{2\sqrt{n}} < \varepsilon$.
impossible!

Exemple 21

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

n'est pas une suite de Cauchy.

Considérons $|x_{2n} - x_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}$

$$> \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ fois}} = \frac{1}{2}$$

Proposition 13 Toute suite de Cauchy est bornée.

Preuve.

Soit $\{x_n\}$ une suite de Cauchy.

$\exists N$ tel que $n > N$, $k > 0 \Rightarrow$

$$|x_{n+k} - x_n| < 1$$

Pour $n = N+1$, $k > 0$ $\quad |x_{N+1+k} - x_{N+1}| < 1$

$$\Rightarrow |x_{N+1+k}| < |x_{N+1}| + 1 \quad \forall k > 0$$

Prenons $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{N+1}|, |x_{N+1}| + 1\}$

alors $\quad |x_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$\blacksquare$

Théorème 14 Critère de Cauchy (fondamental!)

Une suite est convergente $\Leftrightarrow$ elle est de Cauchy.

Preuve. $\Longrightarrow$ Supposons que $x_n \to x_0$.

Soit $\varepsilon > 0$. $\exists N(\varepsilon)$ tel que

$$|x_n - x_0| < \varepsilon/2 \quad \forall n > N(\varepsilon).$$

Prenons $n, m > N(\varepsilon)$

$$|x_n - x_m| = |x_n - x_0 - (x_m - x_0)|$$

$$\leq |x_n - x_0| + |x_m - x_0| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

et nous concluons que $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy.

$\Leftarrow$ Supposons que $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy. Nous savons par la prop. 13 que $\{x_n\}$ est bornée.

$\exists$ $\{x_{n_k}\}$ une sous-suite de $\{x_n\}$ qui converge vers x_0.

$$x_{n_k} \to x_0.$$

Soit $\varepsilon > 0$

$\exists N_1(\varepsilon)$ tel que $n_i > N_1(\varepsilon) \Rightarrow |x_{n_i} - x_0| < \frac{\varepsilon}{2}$.

$\exists N_2(\varepsilon)$ tel que $|x_{m+k} - x_m| < \varepsilon/2$ $\quad m > N_2(\varepsilon)$
$k > 0$.

Prenons $N(\varepsilon) = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$

et $\quad m = n_i > N(\varepsilon)$

alors on a à la fois $|x_m - x_0| < \varepsilon/2$

$$|x_{m+k} - x_m| < \varepsilon/2$$

d'où $\quad n = m + k$ donne avec $m > N(\varepsilon)$

$$|x_n - x_0| = |x_{m+k} - x_0|$$
$$\leq |x_{m+k} - x_m| + |x_m - x_0|$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$\Rightarrow x_n \to x_0.$

$\boxed{\text{MQE}}$

<u>Remarque.</u> $(\mathbb{R}, d)$ un espace métrique

i) $0 \leq d(x,y)$

ii) $d(x,y) = 0$ ssi $x = y$

iii) $d(x,y) = d(y,x)$

iv) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

pour $\mathbb{R}$: $\quad d(x,y) = |x-y|$

Soit (M, d) un espace métrique quelconque. Une suite
$x : \mathbb{N} \to M$, $\{x_n\} \subset M$
est une suite de Cauchy si
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, N(\varepsilon) \text{ tel que}$$
$$n, m > N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

On dit qu'un espace métrique (M, d) est un espace complet si toute suite de Cauchy converge.
Le théorème 14 nous dit que $(\mathbb{R}, |\ |)$ est un espace métrique complet.

<u>Exemple 21</u> $\mathbb{Q}$ n'est pas complet.

prenons
$$x_0 = 2$$
$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$$

x_n est une suite dans $\mathbb{Q}$. Nous avons montré que
$$x_n \to \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

La suite $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ puisqu'elle converge, donc elle est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$. Cependant cette suite ne converge pas dans $\mathbb{Q}$.

<u>Définition</u>. Soit (M, d) un espace métrique.

Soit $T : M \to M$.
On dit que T est <u>contractante</u> si $\exists\ 0 < k < 1$ tel que
$$d(T(x), T(y)) \leq k\, d(x, y) \qquad \forall x, y \in M.$$

Si T est contractante;
$$d(T^2(x), T^2(y)) \leq k\, d(T(x), T(y))$$
$$\leq k^2 d(x, y)$$

On montre par récurrence que
$$d(T^n(x), T^n(y)) \leq k^n d(x, y) \qquad n \geq 1.$$

<u>Inégalité fondamentale de contraction</u> (15)

$T : (M, d) \to (M, d)$ K-contractante, $0 < K < 1$

alors

$$d(x,y) \leq \frac{1}{1-K}\left(d(x,T(x)) + d(y,T(y))\right)$$

preuve. inégalité du triangle.

$$d(x,y) \leq d(x,T(x)) + d(T(x),T(y)) + d(T(y),y)$$

$$d(x,y) \leq d(x,T(x)) + K\, d(x,y) + d(T(y),y)$$

$$(1-K)\, d(x,y) \leq d(x,T(x)) + d(T(y),y)$$

$$d(x,y) \leq \frac{1}{1-K}\left(d(x,T(x)) + d(T(y),y)\right)$$

<u>Définition</u> $x \in M$ est un pt fixe de T si $T(x) = x$.

<u>Corollaire 16</u> Si T est K-contractante, alors T admet au plus un pt fixe.

preuve. supposons $x = T(x)$ $y = T(y)$

$$d(x,y) \leq \frac{1}{1-K}\left(d(x,T(x)) + d(y,T(y))\right)$$

$$\leq \frac{1}{1-K}\left(d(x,x) + d(y,y)\right) = 0$$

$$\Rightarrow x = y.$$

$\blacksquare$

<u>Proposition 17</u> Soit $T : M \to M$ une application K-contractante. Soit $x_0 \in M$.
Alors la suite $\{T^m(x_0)\}_{m=1}^{\infty}$ est une suite de Cauchy.

preuve.

$$d(T^n(x_0), T^m(x_0)) \leq \frac{1}{1-K}\left(d(T^n(x_0), T^{n+1}(x_0)) + d(T^m(x_0), T^{m+1}(x_0))\right)$$

$$\leq \frac{1}{1-K}\left(K^n d(x_0, T(x_0)) + K^m d(x_0, T(x_0))\right)$$

$$\leq \frac{d(x_0, T(x_0))}{1-K}\left(K^m + K^m\right)$$

Puisque $0 < K < 1$, $K^m \to 0$ lorsque $m \to \infty$. Soit $\varepsilon > 0$. $\exists\ N(\varepsilon)$ tel que $m > N(\varepsilon) \Rightarrow$

$$\frac{K^m\, d(x_0, T(x_0))}{(1-K)} < \frac{\varepsilon}{2}$$

alors $n, m > N(\varepsilon) \Rightarrow$

$$d(T^n(x_0), T^m(x_0)) \leq \varepsilon .$$

$\boxed{///}$

<u>Proposition 18</u> Soit (M, d) un espace métrique complet. Soit $T: M \to M$ K-contractante

alors

1) T possède un seul pt fixe p : $T(p) = p$.
2) Soit $x_0 \in M$, $T^n(x_0) \to p$

preuve.

$\{T^n(x_0)\}$ est une suite de Cauchy qui converge puisque M est complet.

Ecrivons $T^n(x_0) \to p$.

Il reste à montrer que p est un pt fixe : $T(p) = p$.

Nous allons montrer que

$$d(p, T(p)) < \varepsilon \quad \forall\ \varepsilon > 0.$$

Soit $\varepsilon > 0$.

$$d(p, T(p)) \leq d(p, T^n(x_0)) + d(T^n(x_0), T(p))$$

$$\leq d(p, T^n(x_0)) + K\, d(T^{n-1}(x_0), p)$$

puisque $T^n(x_0) \to p$, $\exists\ N(\varepsilon)$ tel que $n > N(\varepsilon)$

$$d(p, T^n(x_0)) < \frac{1}{1+K}\, \varepsilon$$

Prenons $n+1 > N(\varepsilon)$, alors

$$d(p, T(p)) < \frac{1}{1+K}\,\varepsilon + \frac{K}{1+K}\,\varepsilon = \varepsilon .$$

Donc p est l'unique pt. fixe de T. $\boxed{///}$

5 Fonctions continues

$$D \subset \mathbb{R} \qquad f : D \to \mathbb{R}$$

Définition 1 f est continue en $x_0 \in D$ si

$$\forall \{x_n\} \subset D \qquad x_n \to x_0 \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \to f(x_0)$$

(f préserve la convergence des suites vers x_0)

f est continue dans D si f est continue en chacun des pts de D.

Exemple 1
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

f n'est pas continue en $x_0 = 0$

Soit $x_n = -\frac{1}{n}$

alors $x_n \to 0$ mais $f(x_n) = 0 \ \forall n$

$$\Rightarrow f(x_n) = 0 \neq f(x_0) = 1$$

Notons que si $y_n = \frac{1}{n}$ $\quad f(y_n) = 1 \quad \forall n$

et $\lim f(y_n) = 1 = f(0)$

où $\lim_{n \to \infty} y_n = 0$.

Pour montrer la continuité de f en x_0, il faut montrer que pour toute suite $x_n \to x_0$ on a

$$f(x_n) \to f(x_0).$$

f est continue dans $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Soit $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Prenons $x_n \to x_0 \neq 0$.

$\exists N : n > N \Rightarrow x_n \neq 0$. $x_n > 0$ ou $x_n < 0$

alors pour $n > N$
$$f(x_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_0 > 0 \\ 0 & \text{si } x_0 < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \begin{cases} 1 = f(x_0) & \text{si } x_0 > 0 \\ 0 = f(x_0) & \text{si } x_0 < 0 \end{cases}$$

donc f est continue en $x_0 \neq 0$.

Exemple 2 $\quad f(x) = x^2 \; : \; x \in \mathbb{R}$.

f est continue.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

Soit $x_n \to x_0$. Il faut montrer que

$$x_n^2 \to x_0^2$$

(Voir l'exemple 20 page 3-31)

Dans l'exemple 20 : $x_n \to x_0 \Rightarrow \{x_n\}$ est bornée.

Prenons M tel que

$$|x_0| \leq M$$
$$|x_n| \leq M \quad \forall n.$$

Alors
$$\begin{aligned} |x_n^2 - x_0^2| &= |x_n - x_0|\,|x_n + x_0| \\ &\leq |x_n - x_0|\,(|x_n| + |x_0|) \\ &\leq |x_n - x_0|\, 2M. \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$ prenons N tel que $n > N \Rightarrow |x_n - x_0| < \frac{\varepsilon}{2M}$

Alors $|x_n^2 - x_0^2| \leq \varepsilon$ si $n > N$

$$\Rightarrow x_n^2 \to x_0^2.$$

Dans l'exemple 20 p. 3-31 on a montré que

si $x_n \to x_0$ alors $x_n^k \to x_0^k$ $\forall k \geq 1$

i.e. $f(x) = x^k$ est continue $\forall k \geq 1$.

Proposition 1 $f : D \to \mathbb{R}$ continue.

soit $A \subset D$ $f|_A : A \to \mathbb{R}$

(la restriction de f à A).

Alors $f|_A$ est continue.

preuve. Soit $\{x_n\} \subset A$ $x_n \to x_0$

alors $f|_A(x_n) = f(x_n)$.

La continuité de f dans $D \Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} f|_A(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

On a montré : $\forall \{x_n\} \subset A$ $x_n \to x_0 \in A \subset D$.

$$\Longrightarrow \quad f|_A(x_n) \to f|_A(x_0) = f(x_0)$$

$\blacksquare$

Proposition 2 $f ; g : D \to \mathbb{R}$.

si f et g sont continues alors

1) $f+g : D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)+g(x)$ est continue.

2) $\kappa f : D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \kappa f(x)$ $(\kappa \in \mathbb{R})$ est continue.

3) $f \cdot g : D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)g(x)$ est continue.

4) $\dfrac{f}{g}$ est continue en $x_0 \in D$ si $g(x_0) \neq 0$.

i.e. $\dfrac{f}{g}$ est continue dans $D \setminus \{x \mid g(x) = 0\}$

Preuve

(3) $x_0 \in D$, soit $\{x_n\}$ une suite dans D telle que

$x_n \to x_0$

cont. de $f \Rightarrow$ $f(x_n) \to f(x_0)$
cont de $g \Rightarrow$ $g(x_n) \to g(x_0)$

$$\lim_{n\to\infty} ((f+g)(x_n)) = \lim_{n\to\infty} (f(x_n) + g(x_n))$$

$$= \lim_{n\to\infty} f(x_n) + \lim_{n\to\infty} g(x_n)$$

$$= f(x_0) + g(x_0)$$

$$= (f+g)(x_0)$$

(4) Soit $x_0 \in D$, $g(x_0) \neq 0$.

Continuité de $g \Rightarrow \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x_0) \neq 0$.

$\Longrightarrow \exists N : n \geq N \Rightarrow g(x_n) \neq 0$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{f}{g}\right)(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)}$$

$$= \frac{\lim_{n\to\infty} f(x_n)}{\lim_{n\to\infty} g(x_n)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{f}{g}\right)(x_0)$$

Les points 1), 2) et 3) sont laissés en exercice. $\blacksquare$

Exemple 3

Un polynôme de degré n est une fonction continue.

En effet : $x \mapsto x^n$ est continue. $\forall n \geq 1$

$x \mapsto a_n x^n$ est continue a_n $\mathbb{R}$, $n \geq 1$

$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ est continue.

Exemple 4

P, Q deux polynômes.

$\frac{P}{Q} : \mathbb{R} \setminus \{x : Q(x) = 0\} \to \mathbb{R}$ est continue.

Exemple 5

$$\sqrt{\ } : [0, \infty[\ \to [0, \infty[$$
$$x \longmapsto \sqrt{x}$$

est continue. (voir Prop. 16 p. 3-24)

$$\sqrt[3]{\ } : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \sqrt[3]{x}$$ est continue (TP 2 fois !)

Proposition 3 $f : D \to \mathbb{R}$ continue

$g : E \to \mathbb{R}$ continue

supposons que $f(D) \subset E$

Alors $g \circ f : D \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto g(f(x)) = g \circ f(x)$

est continue.

Preuve.

Soit $x_n \to x_0 \in D$ $\{x_n\} \subset D$.

alors f continue $\Rightarrow$ $f(x_n) \longrightarrow f(x_0)$

g continue $\Rightarrow$ $g(f(x_n)) \longrightarrow g(f(x_0))$

i.e. $g \circ f(x_n) \longrightarrow g \circ f(x_0)$.

Donc $g \circ f$ est continue.

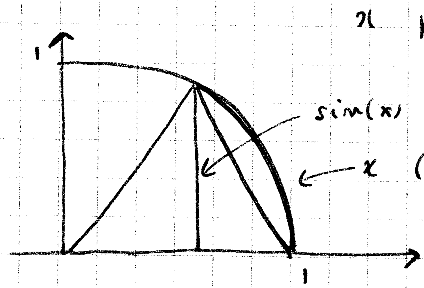
$\boxed{\text{///}}$

Exemple 6

$\sin(x) : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ est continue.

1) continuité en $x = 0$.

x petit : $|\sin(x)| < |x|$



Soit $x_n \to 0$ $|\sin(x_n)| \leq |x_n|$

$\Rightarrow |\sin(x_n)| \to 0 \Rightarrow \sin(x_n) \to 0$.

$\lim\limits_{n \to \infty} \sin(x_n) = \sin(\lim\limits_{n \to \infty} x_n) = \sin(0) = 0.$

2) continuité en x_0

Soit $y_n \to x_0$

posons $x_n = y_n - x_0$.

alors $x_n \to 0$

$$\sin(y_n) = \sin(x_n + x_0)$$

$$= \underbrace{\sin(x_n)\cos(x_0)}_{\substack{\to 0 \\ \text{car } \sin(x_n) \to 0}} + \sin(x_0)\cos(x_n)$$

il reste à montrer que $x_n \to 0 \Rightarrow \cos(x_n) \to 1$

mais $\cos(x_n)^2 = 1 - \sin(x_n)^2 \to 1$

donc $\cos(x_n)^2 \to 1$

mais $\cos(x_n) > 0$ x_n petit.

$\Rightarrow \cos(x_n) \to 1$.

donc $y_n \to x_0 \Rightarrow \sin(y_n) \to \sin(x_0)$

et la fonction sinus est continue.

De plus : $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

$= g \circ f(x)$

où $f(x) = x + \frac{\pi}{2}$ continue

$g(x) = \sin(x)$ continue.

Donc cosinus est continue.

Par conséquent, $\tan(x)$, $\cotg(x)$, $\sec(x)$, $\cosec(x)$ sont continues là où elles sont définies.

__Exemple 7__

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

f est discontinue partout !

$r \in \mathbb{R}$

prenons $q_n \to r$ $q_n \in \mathbb{Q}\ \forall n$

$z_n \to r$ $z_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\ \forall n$

$f(q_n) = 1\ \forall n \Rightarrow f(q_n) \to 1$

$f(z_n) = 0\ \forall n \Rightarrow f(z_n) \to 0$

on ne peut avoir $\lim f(x_n) = f(\lim x_n)$.

Exemple 8

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

f est continue en 0 seulement

Notons que $|f(x)| \leq |x|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Si $x_n \to 0 \quad |f(x_n)| \leq |x_n|^2 \to 0$

donc $|f(x_n)| \to 0$

$$f(x_n) \to 0 = f(0) = f(\lim_{n \to \infty} x_n)$$

donc f est continue en 0.

Soit $x_0 \neq 0$

Prenons $y_n \to x_0 \quad y_n \in \mathbb{Q}^c \quad \forall\, n \geq 1$

alors $f(y_n) = 0 \quad \forall n$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(y_n) = 0$$

$$\Rightarrow \text{mais } f(\lim_{n \to \infty} y_n) = f(x_0) = x_0^2 \neq 0$$

f n'est pas continue en $x_0 \neq 0$.

Proposition 4

$f, g : D \to \mathbb{R}$ continues.

supposons que $E \subset D$ avec $\overline{E} = D$

et $f_{|E} = g_{|E}$

alors $f = g$.

preuve.

soit $x_0 \in D$

alors $x_0 \in E'$

$$\Rightarrow \exists \{x_n\} \subset E, x_n \to x_0$$

$$\lim_n f(x_n) = f(x_0)$$

$$\lim_n g(x_n) = g(x_0)$$

mais $g(x_n) = f(x_n) \quad \forall n \geq 1$

$$\Rightarrow \quad g(x_0) = f(x_0)$$

$$\Rightarrow \quad f = g \text{ sur } D.$$

$\blacksquare$

Exemple 9

$$f : [0,1] \to \mathbb{R} \qquad \text{(Dirichlet)}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ 1/q & \text{si } x = p/q \quad (p,q) = 1 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Nous allons montrer que

f est continue en chaque irrationnel

f est discontinue en chaque rationnel.

Soit $r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ alors $f(r) \neq 0$.

Prenons $z_n \to r \quad z_n \notin \mathbb{Q}$

$$f(z_n) = 0 \quad \forall n$$

donc $\lim_n f(z_n) = 0 \neq f(\lim_n z_n)$

donc f n'est pas continue en chacun des $r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$

Soit $r \in [0,1]$, r irrationnel.

Prenons $x_n \to r$

$$f(r) = 0$$

nous allons montrer que $f(x_n) \to 0$

Soit $\varepsilon > 0$. Prenons q_0 un entier tel que

$$\frac{1}{q_0} < \varepsilon$$

il existe un nombre fini de fractions $\frac{p}{q}$ telles que $q \leq q_0$

$\exists N$ tel que $n \geq N \Rightarrow x_n$ n'est pas une de ces fractions.

pour $n \geq N$,

$$f(x_n) = 0 \quad \text{si} \quad x_n \notin \mathbb{Q}$$

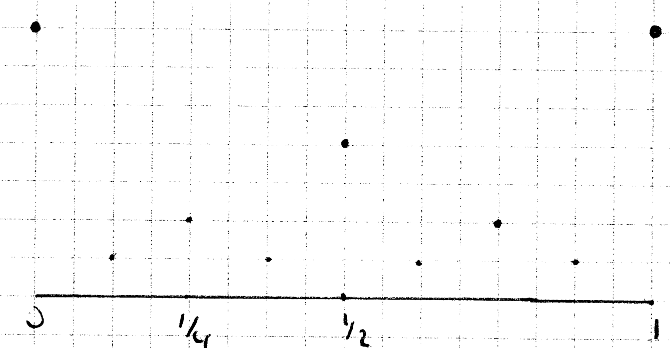
ou

$$f(x_n) = \frac{1}{q} \quad \text{si} \quad x_n = \frac{p}{q} \qquad q > q_0$$

on a donc $f(x_n) = 0$ ou $f(x_n) = \frac{1}{q} < \frac{1}{q_0} < \varepsilon$

$\Rightarrow \quad n \geq N \Rightarrow |f(x_n)| < \varepsilon$.

ε étant quelconque il vient : $f(x_n) \to 0$.



Propriétés des fonctions continues

Rappel. $D \subset \mathbb{R}$ D compact $:=$ D fermé et borné.

On a vu : prop 12 p. 4-16

$E \subset \mathbb{R}$ est compact $\Leftrightarrow$ toute suite $\{x_n\}$ dans E possède une sous-suite qui converge vers un pt de E.

prop 9 p. 4-10

E fermé et borné supérieurement $\Rightarrow$ $\sup(E) \in E$
E fermé et borné inférieurement $\Rightarrow$ $\inf(E) \in E$

Théorème 5 Soit D un ensemble compact, $f : D \to \mathbb{R}$ continue.
Alors $f(D)$ est compact.

Preuve. Soit $\{y_n\}$ une suite de pts de $f(D)$.

Prenons $\{x_n\} \subset D$ telle que $f(x_n) = y_n$ $(n \geq 1)$

$\{x_n\}$ est une suite dans D. D est compact entraîne que $\exists \{x_{n_i}\}$ une sous-suite qui converge vers $x_0 \in D$

$$\lim_{i \to \infty} x_{n_i} = x_0$$

La continuité de f entraîne $\lim_{i \to \infty} f(x_{n_i}) = f(x_0)$

i.e. $\lim_{i \to \infty} y_{n_i} = f(x_0) \in f(D)$

Donc $\{y_{n_i}\}$ est une sous-suite de $\{y_n\}$ qui converge vers $f(x_0) \in f(D)$.

Donc $f(D)$ est compact, i.e. fermé et borné. ▨

Corollaire 6 D compact, $f : D \to \mathbb{R}$ continue.

- $\exists A, B$ tels que $f(D) \subset [A, B]$

Théorème 7 D compact, $f : D \to \mathbb{R}$ continue.

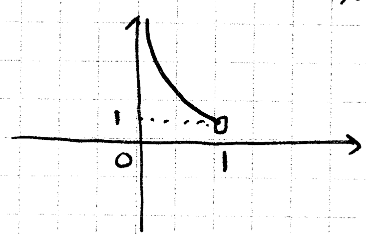
$$\exists\, a \in D \quad f(a) = \sup_{x \in D} f(x)$$

$$\exists\, b \in D \quad f(b) = \inf_{x \in D} f(x)$$

Autrement dit, f atteint son suprémum en $a \in D$

f atteint son infimum en $b \in D$

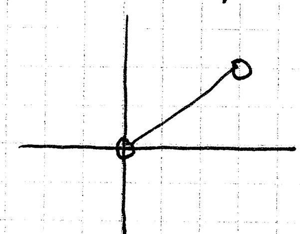
Exemple 10 $f = \frac{1}{x}$, $D =]0,1[$



$\sup_{x \in D} f(x)$ n'existe pas

$\inf_{x \in D} f(x) = 1$

$f = x$ $\quad D =]0,1[$



$\inf_{x \in D} f(x) = 0 \qquad \nexists\, a \in D \quad f(a) = 0$

$\sup_{x \in D} f(x) = 1 \qquad \nexists\, a \in D \quad f(a) = 1$

preuve. D compact $\Rightarrow f(D)$ compact

Posons $M = \sup \{ f(x) \mid x \in D \}$

$m = \inf \{ f(x) \mid x \in D \}$.

$\forall x \in D$ on a

$$m \leq f(x) \leq M$$

Prop. 9, 4-10 $\Rightarrow$ $M \in f(D)$

$m \in f(D)$

$\Rightarrow \exists\, a \in D \quad f(a) = M$

$\exists\, b \in D \quad f(b) = m$.

$\boxed{//}$

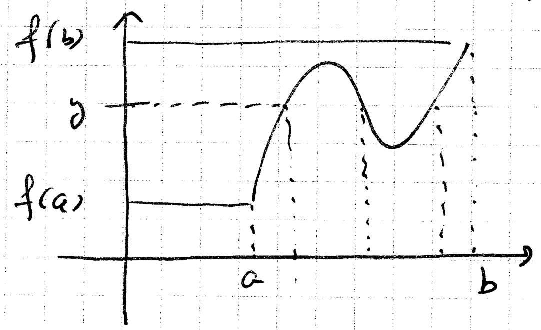
Théorème des valeurs intermédiaires 8

$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue

avec $f(a) \neq f(b)$.

Soit y compris entre $f(a)$ et $f(b)$

Alors $\exists\ c \in]a, b[$ tel que $f(c) = y$.



preuve supposons $f(a) < f(b)$

(l'autre cas est semblable)

Posons $A = \{ x \mid x \in [a, b] \text{ et } f(x) < y \}$

$A \neq \emptyset \quad (a \in A)$

A est borné supérieurement par b.

Donc $\sup(A) = c$ existe.

de plus $c \in [a, b]$

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $c - \frac{1}{n}$ n'est pas une borne supérieure de A.

$\Rightarrow \forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\ x_n \in A$ avec $c - \frac{1}{n} < x_n \leq c$

Donc $\lim_{n \to \infty} x_n = c$

$f(x_n) < y \quad \forall n \Rightarrow$

$\lim_{n \to \infty} f(x_n) \leq y$

$\Rightarrow f(\lim_{n \to \infty} x_n) = f(c) \leq y$

Posons maintenant $z_n = \min\{ b, c + \frac{1}{n} \}$

$c \leq z_n \leq c + \frac{1}{n}$

$\lim_{n \to \infty} z_n = c$

de plus

$$f(z_n) \geq y \quad \text{car} \quad z_n \notin A.$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(z_n) \geq y$$

i.e. $$f(\lim_{n\to\infty} z_n) \geq y$$

$$\Rightarrow \quad f(c) \geq y$$

Donc $f(c) = y$

$\boxed{///}$

<u>Corollaire 9</u> $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. $f(a) \neq f(b)$, continue.

Alors $f([a, b])$ est un intervalle.

preuve.

$\exists \; u, v \in [a, b]$ tels que

$$f(u) \leq f(x) \leq f(v) \qquad \forall x \in [a, b]$$

$f(a) \neq f(b) \quad \Rightarrow \quad f(u) < f(v)$

$$\Rightarrow \quad f([a, b]) \subset [f(u), f(v)]$$

Soit $f(u) < y < f(v)$. Par le th. des valeurs intermédiaires

$\exists \; c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.

$$\Rightarrow \quad f([a, b]) \supset [f(u), f(v)]$$

D'où

$$f([a, b]) = [f(u), f(v)]$$

$\boxed{///}$

<u>Exemple 11</u> $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

Montrons $\exists \; x \in [-1, 0]$ tel que $f(x) = 0$

$$f(-1) = -1 - 2 + 1 = -2 < 0$$

$$f(0) = 0 - 2 \cdot 0 + 1 = 1$$

$$\exists \; c \in]-1, 0[\qquad f(c) = 0$$

<u>Exemple 12</u> $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \quad \exists \; x_0 : \quad x_0^n = a$$

en effet:

soit $f(x) = x^n - a : [0, a+1] \rightarrow \mathbb{R}$

$f(0) = -a < 0$

$f(a+1) = (a+1)^n - a > 0$

$\exists \; c \in]0, a+1[\quad f(c) = 0.$

<u>Exemple 13</u> $\quad f : [0,1] \to [0,1]$ continue.

alors il existe $c \in [0,1] \; : \; f(c) = c$.

Soit $\quad F(x) = f(x) - x$

Si $f(0) = 0$ ou $f(1) = 1$ alors $c = 0$ ou 1

supposons $f(0) > 0 \quad f(1) < 1$ alors

$F(0) > 0$ et $F(1) < 0$

$\exists \; c \in]0,1[$ tel que $\quad F(c) = 0$

i.e. $\quad f(c) = c$.

<u>Une définition équivalente de la continuité.</u>

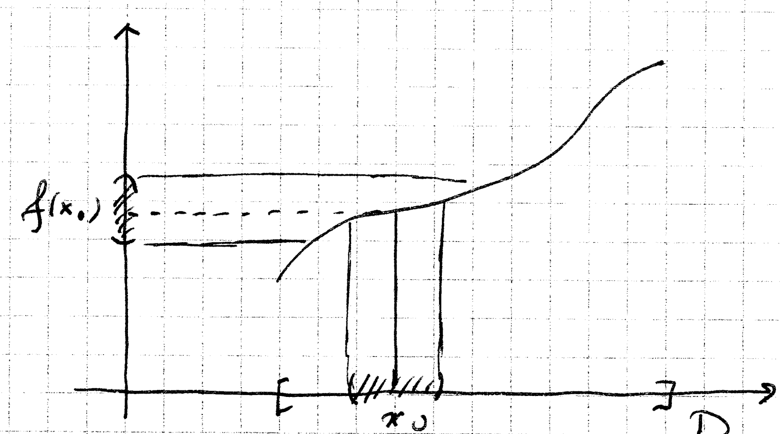
<u>Déf 2.</u> $\quad f : D \to \mathbb{R}$

$x_0 \in D$

f est continue en x_0 si

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; \delta > 0$ tel que $\quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$\forall \; V(f(x_0), \varepsilon) \quad \exists \; V(x_0, \delta) \quad f(V(x_0, \delta) \cap D) \subset V(f(x_0), \varepsilon)$



Supposons f continue en x_0 au sens de la définition 2

Soit $\{x_n\} \subset D \quad x_n \to x_0$

montrons que $f(x_n) \to f(x_0)$.

Soit $\varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tel que

$$\forall x \in D, \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$x_n \to x_0 \implies \exists N(\delta)$ tel que

$$n \geq N(\delta) \implies |x_n - x_0| < \delta$$

Donc $n \geq N(\delta) \implies |f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$

Donc $f(x_n) \to f(x_0)$ et f est continue en x_0 au sens de la définition 1.

On a donc montré : "déf 2 $\implies$ déf 1".

Supposons que f n'est pas continue en x_0 au sens de la définition 2. Montrons que f n'est pas continue en x_0 au sens de la déf. 1.

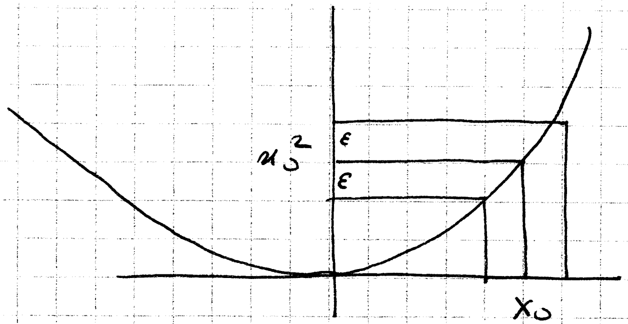
Hypothèse. $\exists \varepsilon > 0$ $\forall \delta > 0$ $\exists x$ $|x - x_0| < \delta$ et $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$

Pour tout $n \geq 1$ prenons $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$

Alors $x_n \to x_0$ et $f(x_n) \not\to f(x_0)$.

Donc f n'est pas continue au sens de la déf. 1.

<u>Exemple 14</u> $f(x) = x^2$ est continue.



Soit $\varepsilon > 0$

il faut trouver $\delta(x_0) > 0$ tel que

$$|x - x_0| < \delta(x_0) \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$$|x^2 - x_0^2| = |x - x_0|\,|x_0 + x|$$

Prenons x tel que $|x - x_0| < 1$

$\Rightarrow \quad \big| |x| - |x_0| \big| \leq |x - x_0| < 1$

$\Rightarrow \quad |x| \leq |x_0| + 1 = M$

Alors $\quad |x - x_0| \leq |x| + |x_0| \leq 2M$, pour $\quad |x - x_0| < 1$

Prenons $\quad |x - x_0| < \delta(x_0) = \dfrac{\varepsilon}{2M}$

Alors $\quad |x^2 - x_0^2| = |x - x_0|\,|x + x_0|$

$\leq |x - x_0| \, 2M$

$\leq \delta(x_0) \, 2M$

$\leq \dfrac{\varepsilon}{2M} \, 2M = \varepsilon$

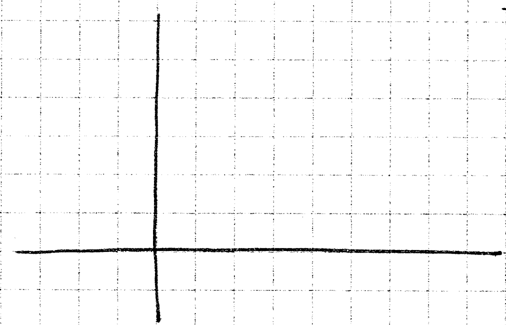
$\boxed{}$

Exemple 15

$f(x) = \frac{1}{x}$ est continue en $x_0 \neq 0$.

Soit $x_0 > 0$ (le cas $x_0 < 0$ est laissé en exercice)

Soit $\varepsilon > 0$ (ε assez petit pour avoir $\frac{1}{\varepsilon} > x_0$)



$$\delta = x_0 - \left(\frac{1}{x_0} - \varepsilon\right)^{-1} = \frac{\varepsilon x_0^2}{1 + x_0 \varepsilon} > 0.$$

$|x - x_0| < \delta \Rightarrow$

$$\frac{-\varepsilon x_0^2}{1 + x_0 \varepsilon} < x - x_0 < \frac{\varepsilon x_0^2}{1 + x_0 \varepsilon} < \frac{\varepsilon x_0^2}{1 - \varepsilon x_0}$$

$$0 < \frac{x_0}{1 + \varepsilon x_0} < x < x_0 + \frac{\varepsilon x_0^2}{1 - \varepsilon x_0} = \frac{x_0}{1 - \varepsilon x_0}$$

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| = \frac{|x - x_0|}{x x_0} < \frac{\varepsilon x_0^2}{(1 + \varepsilon x_0) x x_0} < \frac{\varepsilon x_0^2}{(1 + \varepsilon x_0)} \frac{1 + \varepsilon x_0}{x_0^2} = \varepsilon$$

et f est continue pour $x_0 > 0$.

Exemple 16

$f : D \to E$ $\quad g : E \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Alors $g \circ f$ est continue.

Soit $x_0 \in D$, $y_0 = f(x_0)$.

Soit $\varepsilon > 0$

continuité de g en $y_0 \Rightarrow \exists\, \delta_1$ tel que

$y \in E$, $|y - y_0| < \delta_1 \Rightarrow |g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$.

continuité de f en $x_0 \Rightarrow \exists\, \delta_2$ tel que

$x \in D$ $\quad |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \delta_1$

Donc $x \in D$, $|x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow$

$$|f(x) - f(x_0)| < \delta_1$$

$$\Rightarrow |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |g \circ f(x) - g \circ f(x_0)| < \varepsilon$$

D'où la continuité de $g \circ f$ en x_0

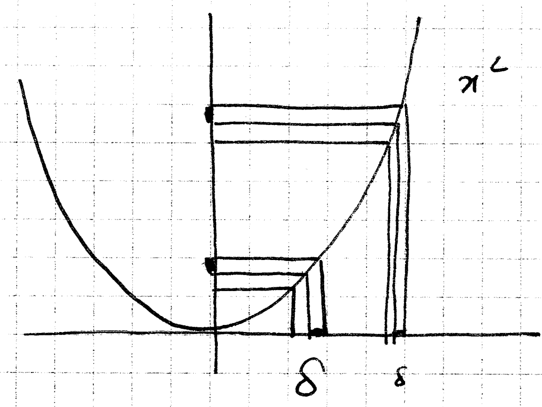
Continuité de f sur E

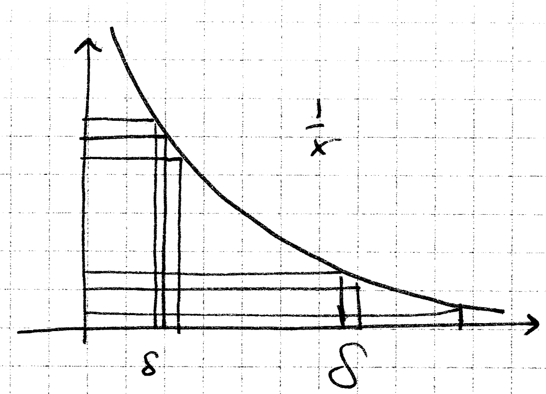
$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall y \qquad |y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon$

Continuité uniforme de f sur E

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall x \quad \forall y \qquad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

le même $\delta > 0$ est bon pour tous les pts de E !





<u>Exemple 17</u>

$f(x) = x$ est uniformément continue.

Soit $\varepsilon > 0$ prenons $\delta = \varepsilon$! $|x-y| < \delta \Rightarrow$

$$|x-y| = |f(x) - f(y)| < \delta = \varepsilon$$

donc $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$!

<u>Exemple 18</u>

$f(x) = \sin(x)$ est uniformément continue.

identité

$$\sin(y) - \sin(x) = 2\sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right)\cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right)$$

$$|\sin(y) - \sin(x)| = 2\left|\sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right)\right|\left|\cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right)\right|$$

$$\leq 2\left|\sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right)\right|$$

$$\leq 2\,\frac{|x - x_0|}{2} = |x - x_0|$$

pour $|x - x_0|$ assez petit

On prend $\delta = \varepsilon$!

$$|x-y| < \delta \Rightarrow |\sin(x) - \sin(y)| < \varepsilon.$$

<u>Exemple 19</u>

$f(x) = x^2$ est uniformément continue dans $[1, 3]$

Soit $\varepsilon > 0$ donné. On doit trouver $\delta > 0$ tel que

$$x, y \in [1, 3] \quad |x-y| < \delta \Rightarrow |x^2 - y^2| < \varepsilon$$

$$|x^2-y^2| = |x-y|\,|x+y| \leq |x-y|\,6$$

Prenons $\delta = \frac{\varepsilon}{6}$

$$|x-y| < \delta \implies |x^2-y^2| < \varepsilon$$

<u>Exemple 20</u> f n'est pas uniformément continue dans $\mathbb{R}$.

La négation de la continuité uniforme est

$$\exists\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, \delta > 0 \quad \exists x\ \exists y \in D \quad |x-y| < \delta \ \text{ et } \ |f(x)-f(y)| \geq \varepsilon$$

$$x = \frac{\varepsilon}{\delta} \qquad y = x + \frac{\delta}{2}$$

$|x-y| < \delta$ et

$$|f(x)-f(y)| = |x+y|\,|x-y| = \left(2x + \frac{\delta}{2}\right)|x-y|$$

$$= \left(2x + \frac{\delta}{2}\right)\frac{\delta}{2} > x\delta = \varepsilon$$

<u>Exemple 21</u> $f = \frac{1}{x}$ est uniformément continue sur $[1, 4]$

mais pas dans $]0, 4]$

(*) $|f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \frac{|x-y|}{|x||y|} \leq |x-y|$ car $xy \geq 1$

si $x, y \in [1, 4]$

il suffit de prendre $\delta = \varepsilon$.

(*) $x = \frac{\delta}{8\varepsilon} \qquad y = x + \frac{\delta}{2}$

alors $|x-y| = \frac{\delta}{2} < \delta$ eT

$$|f(x) - f(y)| = \frac{\delta/2}{\delta y/8\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{y/4} \geq \varepsilon$$

$$\hookrightarrow \left|\frac{x-y}{xy}\right| = \frac{\delta}{2}\,\frac{1}{\left(\frac{\delta}{8\varepsilon}\right)y}$$

Théorème 10 $f : D \to \mathbb{R}$

D compact

f continue.

Alors f est uniformément continue.

Preuve.

Supposons le contraire. $\exists\, \varepsilon > 0$ tel que $\forall\, n \geq 1$

$$\exists\, x_n \in D \quad \exists\, y_n \in D \quad \text{avec}$$

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

D est compact, $\exists\; x_{n_i} \to x_0 \in D$

On a $$|x_{n_i} - y_{n_i}| < \frac{1}{n_i}$$

d'où

$$y_{n_i} \to x_0 \quad \text{également}:$$

(en fait $$|y_{n_i} - x_0| \leq \underbrace{|y_{n_i} - x_{n_i}|}_{< \frac{1}{n_i}} + \underbrace{|x_{n_i} - x_0|}_{\to 0}$$)

La continuité sur $D \Rightarrow$

$$f(x_{n_i}) \to f(x_0)$$

$$f(y_{n_i}) \to f(x_0)$$

mais $|f(x_{n_i}) - f(y_{n_i})| \geq \varepsilon \quad \forall\, n_i$

une contradiction $\boxed{}$

Limite.

Soit $f : D \to \mathbb{R}$, $a \in D'$ (a est un pt. d'accumulation de D)

$$L = \lim_{x \to a} f(x)$$

signifie : $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x \in D \;\; 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

Remarque. Il n'est pas nécessaire que $a \in$ domaine de $f = D$.

Exemple.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & x \neq 2 \\ 0 & x = 2 \end{cases}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Montrons que $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$. Soit $x \neq 2$

$$|f(x) - 4| = \left| \frac{x^2-4}{x-2} - 4 \right| = |x+2-4| = |x-2|$$

Prenons $\delta = \varepsilon$. Alors

$$0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |x-2| < \varepsilon (= \delta)$$

$$\Rightarrow |f(x) - 4| < \varepsilon$$

Exemple $f(x) = x^2$

On montre que $\lim_{x \to a} f(x) = a^2 \quad \forall a \in \mathbb{R} = \mathrm{dom}(f)$

Soit $\varepsilon > 0$ $\quad |x^2 - a^2| = |x-a||x+a|$

Si $|x-a| < 1 \Rightarrow |x| < |a| + 1$
($|x|$ est majoré par $|a|+1$ autour de a)

Donc $|x-a| < 1 \Rightarrow |x+a| \leq |x| + |a|$
$\leq |a|+1 + |a| = 2|a| + 1$

Prenons $\delta = \min \left\{ 1, \dfrac{\varepsilon}{2|a|+1} \right\}$

Alors $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |x^2 - a^2| = |x-a||x+a|$

$$\leq |x-a|(2|a|+1)$$

$$< \delta (2|a|+1)$$

$$< \frac{\varepsilon}{2|a|+1}(2|a|+1) = \varepsilon$$

Proposition unicité de la limite

$f : D \to \mathbb{R}$, $a \in D'$ Soit $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$

$$\lim_{x \to a} f(x) = L_2$$

alors $L_1 = L_2$

preuve.

Soit $\varepsilon > 0$

$\exists \delta_1 > 0 \quad \forall x \in D \quad 0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \varepsilon/2$

$\exists \delta_2 > 0 \quad \forall x \in D \quad 0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - L_2| < \varepsilon/2$

Prenons $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ et $x \in D$, $0 < |x - a| < \delta$

$$\begin{aligned} |L_1 - L_2| &= |L_1 - f(x) + f(x) - L_2| \\ &\leq |f(x) - L_1| + |f(x) - L_2| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

On a montré : $|L_1 - L_2| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow L_1 = L_2$

$\boxed{\text{VU}}$

Proposition Equivalence de définitions.

Soit $f : D \to \mathbb{R}$, $a \in D'$

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \iff \left\{ \begin{array}{l} \forall x_n \to a \quad x_n \in D, \quad x_n \neq a \\ \text{alors} \quad f(x_n) \to L. \end{array} \right.$$

preuve. $\Rightarrow$ Soit $\varepsilon > 0$. À montrer : si $x_n \to a$, $x_n \in D$, $x_n \neq a$, alors $f(x_n) \to L$.

$\exists \delta > 0$ tel que $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

puisque $x_n \to a$ $\exists N(\delta)$ tel que $n > N(\delta) \Rightarrow 0 < |x_n - a| < \delta$

Soit $n > N(\delta)$ alors

$$0 < |x_n - a| < \delta \Rightarrow |f(x_n) - L| < \varepsilon$$

On a montré : $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\delta(\varepsilon))$ tel que

$$n > N(\delta(\varepsilon)) \Rightarrow |f(x_n) - L| < \varepsilon$$

d'où $f(x_n) \to L$.

$\Leftarrow$ nous allons démontrer que si $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ n'est pas L alors il existe une suite $\underset{x_n \neq a}{x_n \to a}$ et $f(x_n) \not\to L$.

par hypothèse,

$$\exists\, \varepsilon > 0 \quad \forall n \quad \exists\, \underset{x_n \neq a}{x_n \in D} \quad 0 < |x_n - a| < \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad |f(x_n) - L| \geq \varepsilon$$

On a donc une suite $\underset{x_n \neq 0}{x_n \to a}$ car $|x_n - a| < \frac{1}{n}$

et $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon$.

i.e. $f(x_n)$ ne converge pas vers L. $\blacksquare$

Critères pour la non-existence de la limite.

On peut 1) trouver $x_n \to a$ $x_n \neq a$ et $f(x_n) \not\to L$

2) trouver $x_n \to a$ $x_n \neq a$

$y_n \to a$ $y_n \neq a$

et $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n \to \infty} f(y_n)$

Exemple $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ $x \neq 0$.

prenons $x_n \to 0$ tel que $\sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = 1$ $\forall n$

i.e. $x_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$

prenons $y_n \to 0$ tel que $\sin\left(\frac{1}{y_n}\right) = -1$ $\forall n$

$y_n = \dfrac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2n\pi}$

$\lim\limits_{x \to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'existe pas car

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = 1$$

et $\lim\limits_{n \to \infty} f(y_n) = -1$

Proposition. $\lim_{x\to a} f(x) = L \Rightarrow f$ est localement bornée autour de a.

preuve. Soit $\varepsilon = 1$

$\exists\, \delta > 0$ tel que $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < 1$

$\Rightarrow \quad |f(x)| < |L| + 1$ dès que $0 < |x-a| < \delta$

Prenons $M = \begin{cases} |L|+1 & \text{si } a \notin D_f \\ \max\{|f(a)|, |L|+1\} & \text{si } a \in D_f \end{cases}$

alors $x \in D$ et $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)| \leq M$.

i.e. f est bornée par M sur le voisinage $V(a, \delta) \cap D$.

$\boxtimes$

Proposition Théorème du sandwich

Soient $f, g, h : D \to \mathbb{R}$ $\quad a \in D'$

$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in D$

Si $\lim_{x\to a} f(x) = L = \lim_{x\to a} h(x)$

alors $\lim_{x\to a} g(x) = L$.

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$.

$\exists\, \delta_1 \quad 0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

$\exists\, \delta_2 \quad 0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |h(x) - L| < \varepsilon$

Prenons $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ alors $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow$

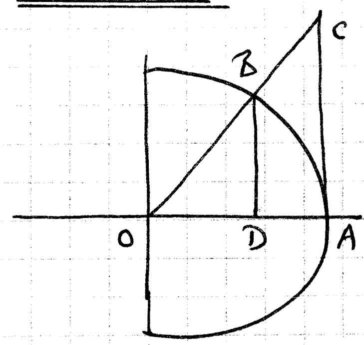
$$L - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \varepsilon$$

donc $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |g(x) - L| < \varepsilon$

d'où $\lim_{x\to a} g(x) = L$.

$\boxtimes$

Exemple $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$



On a en comparant les aires

$$\frac{1}{2}\, \overline{BD} \cdot \overline{OD} < \underbrace{\text{secteur}(AOB)}_{= \frac{x}{2}} < \frac{1}{2}\, \overline{OA}\,\overline{CA}$$

d'où

$$\overline{BD}\,\overline{OD} < x < \overline{OA}\,\overline{CA}$$

i.e. $\sin x \cos x < x < 1 \tan x$

$$\frac{1}{\cos x} < \frac{\sin x}{x} < \cos(x) .$$

Or $\lim_{x \to 0} \cos(x) = 1$ (prochaine proposition)
$(= \cos(0))$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 .$$

Proposition. $f : D \to \mathbb{R}$

$a \in D$, $a \in D'$

f continue en $a \iff \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

preuve.

$\Rightarrow$ Soit $\varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

donc $\exists \delta > 0 :$ $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

d'où $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

$\Leftarrow$ supposons que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Soit $\varepsilon > 0$.

$\exists \delta > 0$ $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

mais $|f(a) - f(a)| = 0 < \varepsilon$

$\Rightarrow \exists \delta > 0$ $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

d'où la continuité de f en $x = a$. $\blacksquare$

Remarques. <u>limite à droite</u> et <u>limite à gauche</u>

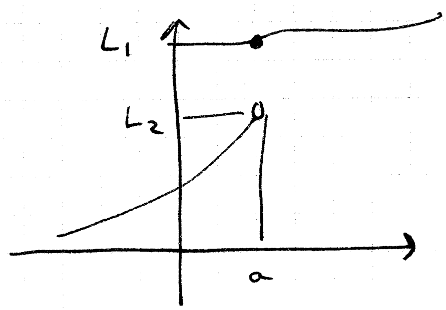
$$f : D \to \mathbb{R} \qquad a \in D'$$

$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ si $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$

$$\forall x \in D \cap \,]a, a+\delta[\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ si $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$

$$\forall x \in D \cap \,]a-\delta, a[\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$



$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L_1$$

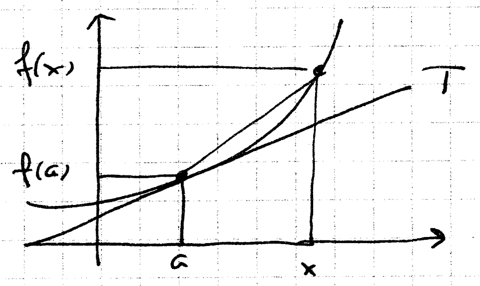
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L_2$$

il est clair que $\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{x \to a^+} f(x) = L \\ \lim_{x \to a^-} f(x) = L \end{cases}$

<u>Définition</u> Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ $a \in D_f'$ $a \in D_f$

Si $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L \in \mathbb{R}$ on dit que f est <u>dérivable</u> en $x = a$
(ou <u>différentiable</u> en $x = a$) et on écrit

$$f'(a) = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$



Posons $T(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$
(droite tangente)

la fonction $T(x)$ a la propriété

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T(x)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{x-a}$$

$$= \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right)$$

$$= f'(a) - f'(a) = 0$$

Donc non seulement $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) - T(x) = 0$

mais on a en plus $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T(x)}{x - a} = 0$

On peut approcher $f(x)$ par $T(x)$ autour de $x = a$.

$$f(x) \simeq f(a) + f'(a)(x-a)$$

$$f(a+h) \simeq f(a) + f'(a)\, h$$

$h = x - a$

Posons $u(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a)$ $\quad x \neq a$

alors $\displaystyle\lim_{x \to a} u(x) = 0$

On a

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + u(x)(x-a)$$

Exemple $f(x) = \frac{1}{x}$ $x \neq 0$

alors f est différentiable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Soit $a \neq 0$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{a - x}{(x-a)xa}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{-1}{xa} = -\frac{1}{a^2}$$

Exemple $f(x) = \sin x$

f est différentiable en $x = 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(page 6-5)

Proposition $f : D_f \to \mathbb{R}$

$a \in D_f \quad a \in D_f'$

Si $f'(a)$ existe, alors f est continue en $x = a$.

preuve. $x \neq a \implies$

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a)$$

et

$$\lim_{x \to a} (f(x) - f(a)) = \lim_{x \to a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) \right]$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \to a} (x - a)$$

$$= f'(a) \cdot 0 = 0$$

Donc $\lim_{x \to a} f(x) - f(a) = 0$

$$\implies \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Donc f est continue en a. $\blacksquare$

<u>Exemple</u> $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto [x]$ (partie entière de x)

f n'est pas continue en $x_0 \in \mathbb{Z}$,

donc f n'est pas différentiable en chaque $x_0 \in \mathbb{Z}$.

Si $x_0 \notin \mathbb{Z}$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{[x] - [x_0]}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{0}{x - x_0} = 0.$$

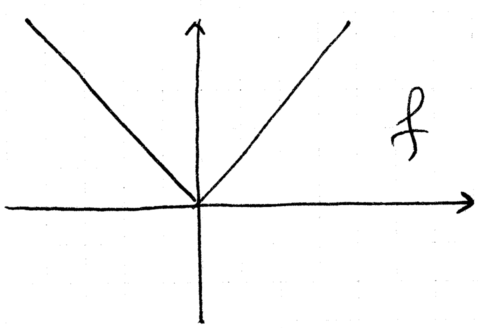
<u>Exemple</u> $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

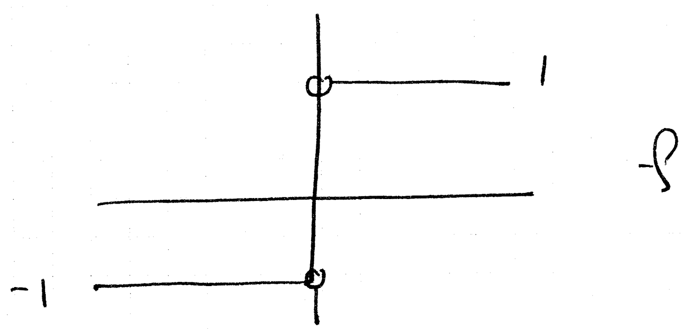
$x \mapsto |x|$ est continue.

f n'est pas différentiable en $x = 0$.

en effet
$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

On vérifie aisément que
$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$





<u>Exemple</u> $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x \neq 0$

$f(0) = 0$.

f est continue en $x = 0$.

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x \sin(1/x)}{x} = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

On a vu que $\lim_{x \to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'existe pas

donc $f'(0)$ n'existe pas.

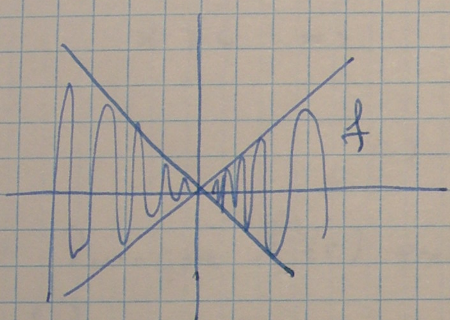
cependant

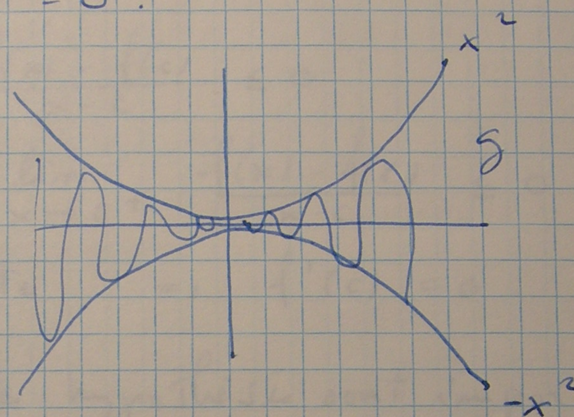
$$g(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{x^2 \sin(1/x)}{x} = x \sin(1/x)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x \sin(1/x) = 0.$$

$$\Rightarrow g'(0) = 0.$$





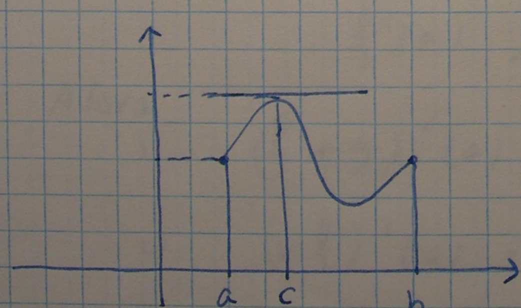
Théorème de Rolle

$f : D = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue.

$f(a) = f(b)$

$f'(x)$ existe $\forall x \in]a, b[$

alors $\exists\, c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$



preuve. Si f est constante alors $f'(c) = 0$ $\forall c$

Supposons f non constante. $\exists\, m < M$ avec

$$m = \inf_{x \in D} f(x) < M = \sup_{x \in D} f(x)$$

Supposons $M \neq f(a) = f(b)$

$\exists\, c \in \,]a,b[$ tel que

$$f(c) = M.$$

Nous montrons que $f'(c) = 0$.

$$x < c \implies \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

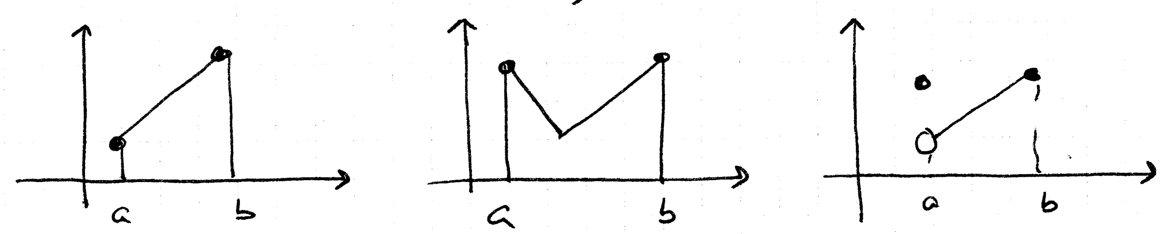
$$\text{donc } \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

$$x > c \implies \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

$$\implies \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

Puisque $f'(c)$ existe, $\implies f'(c) = 0$. $\blacksquare$

<u>Remarque</u>. Toutes les hypothèses sont importantes.



<u>Proposition</u> $f, g : D \to \mathbb{R}$ $a \in D$, $a \in D'$

$f'(a)$, $g'(a)$ existent.

Alors

1) $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$

2) $(kf)'(a) = k f'(a)$

3) $(fg)'(a) = f'(a)\, g(a) + f(a)\, g'(a)$

4) Si $g(a) \neq 0$ alors

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)\, g(a) - g'(a)\, f(a)}{g(a)^2}$$

Preuve.

1), 2) (démo)

3)
$$\lim_{x\to a} \frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(x) + f(a)g(x) - f(a)g(a)}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a} \left(g(x) \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + f(a) \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \right)$$

$$= \lim_{x\to a} g(x) \cdot \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + f(a) \lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

$$= g(a)\, f'(a) + f(a)\, g'(a)$$

4). Si $g(a) \neq 0$, $g(x) \neq 0$ sur un voisinage de a par la continuité de g en $x = a$.

$$\lim_{x\to a} \frac{f/g\,(x) - f/g\,(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{g(x)g(a)(x-a)}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{f(x)g(a) - f(a)g(a) + f(a)g(a) - f(a)g(x)}{g(x)g(a)(x-a)}$$

$$= \lim_{x\to a} \left(\frac{(f(x)-f(a))g(a)}{g(a)g(x)(x-a)} - \frac{f(a)(g(x)-g(a))}{g(a)g(x)(x-a)} \right)$$

$$= \frac{g(a)\, f'(a)}{g(a)^2} - \frac{f(a)\, g'(a)}{g(a)^2}$$

$$= \frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{g(a)^2}$$

$\boxed{///}$

Exemple $f(x) = x^n \qquad n \in \{1, 2, \dots\}$

$$f'(a) = n a^{n-1}$$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x-a} = \frac{x^n - a^n}{x-a} = x^{n-1} + x^{n-2}a + \dots + x a^{n-2} + a^{n-1}$$

D'où
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} x^{n-1} + \lim_{x\to a} x^{n-2} a + \dots + \lim_{x\to a} a^{n-1}$$

$$= a^{n-1} + a^{n-1} + \dots + a^{n-1} \quad (n \text{ fois})$$

$= m a^{m-1}$

On écrit $f'(x) = m x^{m-1}$.

En général si $P(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$

$$P'(x) = \sum_{i=1}^{m} i a_i x^{i-1}$$

<u>Exemple</u> $f(x) = \frac{1}{x^m}$ $m \in \{1, 2, \ldots\}$

Alors $f'(x) = \frac{(1)' x^m - (1)(x^m)'}{(x^m)^2}$

$$= \frac{0 - m x^{m-1}}{x^{2m}} = \frac{-m}{x^{m+1}}.$$

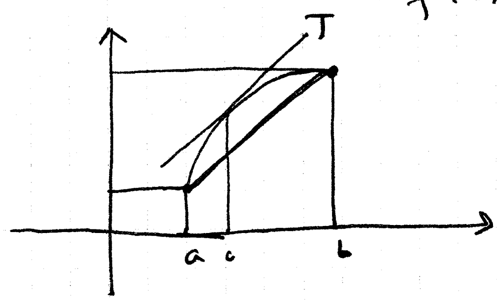
<u>Propositoon</u> Theroreme de la mosenne

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue

$f'(x)$ existe dans $]a, b[$

alors $\exists\, c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{x - a}$$



interprétation : la droite tangent T en $(c, f(c))$ est parallèle à la droite sécante passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$

preuve. Posons $F(x) = f(x) - f(a) - (x - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

F est continue dans $[a, b]$

F' existe dans $]a, b[$ et

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{x - a}$$

de plus $F(a) = 0$

$F(b) = 0$

par le théorème de Rolle $\exists\, c \in]a, b[$ tel que $F'(c) = 0$

i.e. $f'(c) = f($

d'où la conclusion

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$\boxed{\text{QED}}$

Remarques. On peut écrire

$$f(b) = f(a) + f'(c)(b-a) \qquad a < c < b \qquad [a, b]$$

$$f(x) = f(a) + f'(c)(x-a) \qquad a < c < x \qquad [a, x]$$

$$f(a+h) = f(a) + f'(a+\theta h)(h) \qquad 0 < \theta < 1 \qquad [a, a+h]$$

Exemple Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue.

Supposons que $f'(x)$ existe $\forall x \in]a, b[$

et $m \leq f'(x) \leq M \quad \forall x \in]a, b[$

alors

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

permet d'écrire

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$$

si $|f'(x)| \leq M \quad \forall x \in]a, b[$ alors on peut écrire

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b-a|$$

Proposition $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue.

supposons $f'(x)$ existe dans $]a, b[$

a) si $f'(x) = 0 \quad \forall x \in]a, b[$ alors f est constante.

b) si $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in]a, b[$ alors f est croissante (strictement croissante si $f'(x) > 0$)

c) si $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in]a, b[$ alors f est décroissante (strictement décroissante si $f'(x) < 0$)

preuve. a) Soit $x \in]a, b]$

$\exists\, c \in]a, x[$ tel que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c) = 0$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = f(a)$$
$$\text{et} \quad f \equiv \text{cte}$$

b) prenons $x < y$ $\quad x, y \in [a, b]$

$\exists\, c \in]x, y[$ tel que

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(c) \geq 0$$

comme $x - y < 0 \Rightarrow f(x) - f(y) \leq 0$

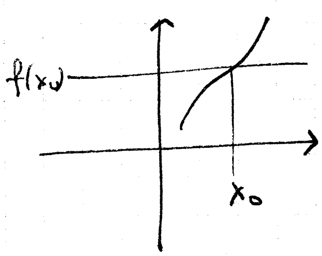
i.e. $f(x) \leq f(y)$

c) idem.

$\boxed{}$

<u>Remarque</u>. Soit $f'(x_0) > 0$.

$\Rightarrow$ pour x proche de x_0 : $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$.



si $x > x_0$ est proche de x_0, alors $f(x) > f(x_0)$.

si $x < x_0$ est proche de x_0, alors $f(x) < f(x_0)$

<u>Exemple</u> si $f'(x) = g'(x) \quad \forall\, x \in D$

alors $f = g + \text{cte}$.

en effet : $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0 \quad \forall x$

$\Rightarrow (f - g) \equiv \text{cte}$.

$\Rightarrow f(x) = g(x) + c \quad \forall x$.

Théorème Formule de Cauchy.

$$f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{continues.}$$

Supposons f, g dérivables sur $]a, b[$.

Si $g'(x) \neq 0 \ \forall\, x \in \,]a, b[$ alors $\exists\, c \in \,]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Preuve.

1) $$g(b) - g(a) = g'(c)(b - c) \quad \text{où } c \in \,]a, b[$$

$$\Rightarrow \quad g(b) - g(a) \neq 0.$$

2) Posons

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\left(g(x) - g(a)\right)$$

h est continue dans $[a, b]$

$h'(x)$ existe dans $]a, b[$ $\qquad h(a) = h(b) = 0$.

Th. de Rolle $\Rightarrow \quad h'(c) = 0$ pour $c \in \,]a, b[$

$$\Rightarrow \quad 0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\, g'(c)$$

i.e. $$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(c)}.$$

$\blacksquare$

Proposition (Règle de chaîne)

$$f : [a,b] \to \mathbb{R} \qquad g : [c,d] \to \mathbb{R} \quad , \quad f([a,b]) \subset [c,d]$$

Supposons f différentiable en x_0 et g différentiable en $y_0 = f(x_0)$, Alors $g \circ f$ est différentiable en x_0 et

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Preuve. Ecrivons

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)[f'(x_0) + u(x)]$$

où $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = 0$

$$g(y) - g(f(x_0)) = (y - f(x_0))[g'(f(x_0)) + v(y)]$$

où $\lim\limits_{y \to f(x_0)} v(y) = 0$.

$h = g \circ f$.

$$\begin{aligned} h(x) - h(x_0) &= g(f(x)) - g(f(x_0)) \\ &= (f(x) - f(x_0))[g'(f(x_0)) + v(f(x))] \\ &= (x - x_0)[f'(x_0) + u(x)][g'(f(x_0)) + v(f(x))] \end{aligned}$$

On a donc

$$\frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = [f'(x_0) + u(x)][g'(f(x_0)) + v(f(x))]$$

$$\lim_{x \to x_0} f'(x_0) + u(x) = f'(x_0)$$

car $u(x) \to 0$

$\lim\limits_{x \to x_0} v(f(x)) = 0$ car $f(x) \to f(x_0)$ par continuité de f

donc $v(f(x)) \to 0$.

Nous avons $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \cdot g'(f(x_0))$

$\boxed{}$

__Exemple__ Soit $f :]a,b[\to f(]a,b[)$ strictement croissante ou décroissante.

Supposons $f'(x_0)$ existe $\neq 0$

$(f^{-1})'(f(x_0))$ existe.

Alors

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

$$\begin{tikzcd} x_0 \arrow[r, bend left, "f"] & f(x_0) = y_0 \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

On a $$(\underbrace{f^{-1} \circ f}_{Id})'(x_0) = (f^{-1})'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

$$1 = (f^{-1})'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

i.e. $$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

ou encore

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

__Exemple__ $f(x) = e^x = \exp(x)$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left] & e^x = y \arrow[l, bend left, "\ln y"] \end{tikzcd}$$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(\ln y)} = \frac{1}{\exp(\ln y)} = \frac{1}{y}$$

__Exemple__

$$f(x) = x^m :]0,\infty[\to]0,\infty[$$

$$f^{-1}(x) = x^{1/m} = \sqrt[m]{x}.$$

$$(x^{1/m})'(y \; (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

$$= \frac{1}{m\left(f^{-1}(y)\right)^{m-1}}$$

$$= \frac{1}{m\left(y^{1/m}\right)^{m-1}} = \frac{1}{m\, y^{1-1/m}}$$

$$= \frac{1}{m}\, y^{1/m - 1}$$

<u>Théorème.</u> $f :]a,b[\to f(]a,b[)$ strictement croissante.

Soit $x_0 \in]a,b[$ $f'(x_0) \neq 0$.

Alors $f^{-1}(y)$ est différentiable en $y_0 = f(x_0)$ et

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

preuve. 1) f est continue en $x_0 \Rightarrow f^{-1}$ est continue en y_0

On a donc $y_0 = f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$

$$x_0 = f^{-1}(y_0) = \lim_{y \to y_0} f^{-1}(y)$$

On a $\dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \dfrac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$

Posons $\begin{cases} G(y) = \dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} \\ F(x) = \dfrac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} \end{cases}$

$$\lim_{y \to y_0} G(y) = L \iff \lim_{x \to x_0} F(x) = L$$

Soit $\varepsilon > 0$ $\exists\ \delta > 0$ $0 < |y - y_0| < \delta \Rightarrow |G(y) - L| < \varepsilon$

$\exists\, d > 0 :$ $0 < |y - y_0| < d \Rightarrow |F(x) - L| < \varepsilon$

$\exists\, \delta_1 > 0$ $0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \delta$

$(|y - y_0| < d)$ $\therefore$ $|F(x) - L| < \varepsilon$

$$F(x) = \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)^{-1}$$

$$\text{et} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \neq 0 .$$

$$\lim_{x \to x_0} F(x) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

$$\Rightarrow \lim_{y \to y_0} G(y) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

$$\text{i.e.} \quad \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

$\blacksquare$

<u>Proposition.</u> $f :]a,b[\longrightarrow f(]a,b[)$ strictement croissante.

f continue en $x_0 \Rightarrow f^{-1}$ continue en $f(x_0) = y_0$.

preuve. 1) f^{-1} est strictement croissante.

$y, y_1 \in f(]a,b[) \qquad y < y_1$

$f(x) = y$
$f(x_1) = y_1$

si $x_1 \leq x \qquad f(x_1) \leq f(x)$
$y_1 \leq y$

2) Soit $x_0 = f^{-1}(y_0) \in]a,b[$

Soit $\epsilon > 0 \qquad]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[\subset]a,b[$

$$f(]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[) =]f(x_0 - \epsilon), f(x_0 + \epsilon)[$$

$f(x_0) \in$

$$\exists \delta \quad]f(x_0) - \delta, f(x_0) + \delta[\subset]f(x_0 - \epsilon), f(x_0 + \epsilon)[$$

donc $y \in V(f(x_0), \delta) \Rightarrow f^{-1}(y) \in V(x_0, \epsilon)$

$\blacksquare$

Règle de L'hopital

(1) $f, g : [c, c+\delta_0] \to \mathbb{R}$

continues
différentiables sur $]c, c+\delta_0[$
$f(c) = g(c) = 0.$

Alors si $\lim_{t \to c^+} \frac{f'(t)}{g'(t)}$ existe alors

$\lim_{t \to c^+} \frac{f(t)}{g(t)}$ existe et les limites sont égales.

preuve. L'existence de $\lim_{t \to c^+} \frac{f'(t)}{g'(t)} = L \Rightarrow$

$\exists\ \delta' \leq \delta_0$ tel que $g'(t) \neq 0$ sur $]c, c+\delta'[$

$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta \leq \delta'$ tel que

$$c < t < c+\delta \Rightarrow \left| \frac{f'(t)}{g'(t)} - L \right| < \varepsilon$$

Prenons $0 < h < \delta$

$a = c$
$b = c + h$

f et g satisfont les hypothèses du théorème de Cauchy.

$\Rightarrow\ \exists\ x \in\ ]c, c+h[\ \subset\ ]c, c+\delta[$

$$\frac{f(c+h)}{g(c+h)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

d'où
$$\left| \frac{f(c+h)}{g(c+h)} - L \right| = \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - L \right| < \varepsilon$$

$$\forall\ 0 < h < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(c+h)}{g(c+h)} - L \right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h)}{g(c+h)} = L = \lim_{t \to c^+} \frac{f(t)}{g(t)}$$

(2) $f, g : [c-\delta_0, c] \to \mathbb{R}$

idem.

(3) $f, g : [c-\delta_0, c+\delta_0] \to \mathbb{R}$

Formule de Taylor

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}$$

$f', f^{(2)}, \ldots, f^{(m-1)}$ existent et sont continues sur $[a, b]$

$f^{(m)}$ existe dans $]a, b[$

Soient $\alpha \neq \beta$ des pts de $[a, b]$.

Alors il existe $\alpha < \xi < \beta$ tel que

$$f(\beta) = P(\beta) + \frac{f^{(m)}(\xi)}{m!} (\beta - \alpha)^m$$

$$\text{où } P(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!} (t - \alpha)^k$$

Preuve

Soit M tel que

$$f(\beta) = P(\beta) + M(\beta - \alpha)^m$$

Définissons $g(t) = f(t) - P(t) - M(t - \alpha)^m$

$$t \in [a, b]$$

On doit montrer que $m! M = f^{(m)}(\xi)$ pour un certain $\alpha < \xi < \beta$.

Si $t \in]a, b[$ alors $g^{(m)}(t) = f^{(m)}(t) - m! M$

La preuve sera terminée si on montre que

$$g^{(m)}(\xi) = 0 \quad \text{pour } \alpha < \xi < \beta$$

On a $P^{(k)}(\alpha) = f^{(k)}(\alpha) \quad k = 0, \ldots, m-1$

$$\Rightarrow \quad g(\alpha) = g'(\alpha) = \ldots = g^{(k-1)}(\alpha) = 0$$

$$g(\beta) = f(\beta) - P(\beta) - M(\beta - \alpha)^m = 0$$
(choix de M)

On a $g(\beta) = g(\alpha) = 0$

$\exists \ \xi_1 \quad g'(\xi_1) = 0 \quad \alpha < \xi_1 < \beta$

On a $\quad g'(\alpha) = 0 = g'(\xi_1)$

$\Rightarrow \exists\ \xi_2 \quad g''(\xi_2) = 0 \quad \alpha < \xi_2 < \xi_1$

$\ldots \quad g^{(n-1)}(\alpha) = 0 = g^{(n-1)}(\xi_{n-1})$

$\Rightarrow \exists \alpha < \xi < \xi_{n-1} \quad g^{(n)}(\xi) = 0.$

$\boxed{}$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$$

$$+ \underbrace{\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n}_{\text{reste de Lagrange}}$$

$$a < \xi < x$$

<u>Exemple</u> $\quad f(x) = \sin x \qquad a = 0$

$$f(x) = \sin(0) + \cos(0)(x) - \sin(0)\frac{x^2}{2!} - \cos(0)\frac{x^3}{3!} + \sin(0)\frac{x^4}{4!}$$

$$+ \cos(\xi)\frac{x^5}{5!}$$

$$f(x) = \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\cos(\xi) \quad 0 < \xi < x$$

si $x \geq 0 \quad \sin(x) \leq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$