UQAM
MAT1013
Analyse 1.

Vivien RIPOLL

Corrigé du devoir n° 1 (7 février 2013)

Remarques générales sur la correction:

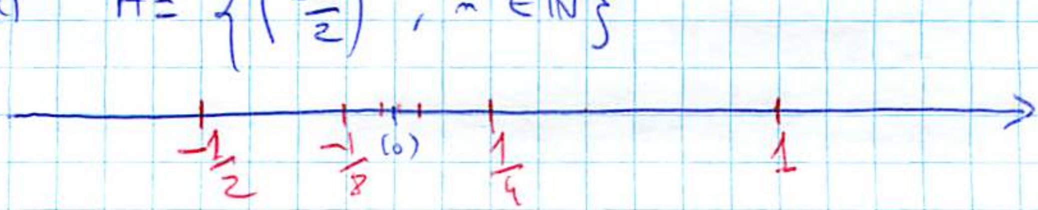
- La rédaction est importante. En général, sauf mention du contraire, on attend des preuves rigoureuses des affirmations.
- Ne pas utiliser d'abbréviations non définies.
- Ne pas rendre un brouillon, la présentation est importante
- Ne pas utiliser "$\Rightarrow$" à la place de donc. "$\Rightarrow$" signifie "implique" et ne peut s'utiliser que dans une phrase mathématique.
- Abbréviations utilisées par le correcteur sur vos copies:
  - j (ou J) = à justifier.
  - BR = ceci est un brouillon
  - EL = erreur de logique
  - RRAR = rédaction de la récurrence à revoir.

Exercice 1 [5 pts par question]

(on s'attendait à davantage de justifications que ce que la plupart des étudiants ont fourni. Comme l'énoncé n'était pas clair, j'ai tout de même mis pratiquement tous les points aux réponses justes sans justifications.)

[La rédaction ci-dessous est extrêmement détaillée dans un but pédagogique]

(a) $A = \left\{ \left(-\frac{1}{2}\right)^n,\ n \in \mathbb{N} \right\}$



On va montrer que $\sup A = \max A = 1$,
$\inf A = \min A = -\frac{1}{2}$

- Si <u>n est pair</u>, $\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$.

et $0 \leq \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^0} = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

donc en particulier, $-\frac{1}{2} \leq \left(-\frac{1}{2}\right)^n \leq 1$.

- Si <u>n est impair</u>, $\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{-1}{2^n}$.

et $\frac{-1}{2^n} \leq 0$

et (comme $n \geq 1$) $\frac{-1}{2^n} \geq \frac{-1}{2^1} = \frac{-1}{2}$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$ <u>impair</u>, $-\frac{1}{2} \leq \left(-\frac{1}{2}\right)^n \leq 1$.

On a donc vérifié que : $\forall x \in A$, $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$.

i.e., 1 est un <u>majorant</u> de A, et A est <u>majorée</u>.

et $-\frac{1}{2}$ est un <u>minorant</u> de A, et A est <u>minorée</u>.

De plus, $1 = \left(-\frac{1}{2}\right)^0$ donc $1 \in A$.

Donc 1 est nécessairement le plus petit des majorants,

i.e. la <u>borne supérieure</u> de A : $\boxed{1 = \sup A}$.

Comme $1 \in A$, on a aussi que 1 est le <u>plus grand</u> <u>élément</u> (ou <u>maximum</u>) de A, i.e. : $\boxed{1 = \max A}$

De même, $-\frac{1}{2} = \left(-\frac{1}{2}\right)^1 \in A$, donc $-\frac{1}{2}$ est la borne inférieure de A, et <u>aussi le plus petit élément de A</u>.

$$\boxed{-\frac{1}{2} = \inf A = \min A}.$$

(b) $B = \left\{ 3 + n + \frac{2}{n} + (-1)^n n \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

- Si <u>n est pair</u> : $3 + n + \frac{2}{n} + (-1)^n n$

$$= 3 + 2n + \frac{2}{n}$$

qui tend vers $+\infty$. Donc B ne peut pas avoir de majorant, $\boxed{\text{B n'est pas majorée}}$.

[Si on veut une démonstration qui n'utilise pas les limites, on peut dire : $3 + 2n + \frac{2}{n} \geqslant 2n$, supposons que M est un majorant de B, alors $\forall n \in \mathbb{N}$ pair, $M \geqslant 3 + 2n + \frac{2}{n} \geqslant 2n$.

Ceci est impossible à cause de la propriété archimédienne de $\mathbb{R}$]

En particulier, B <u>n'a pas de borne supérieure</u>, <u>ni de plus grand élément</u>.

- <u>Borne inférieure</u>.

  - lorsque <u>n est pair</u>, $(n \in \mathbb{N}^*)$, on a :

$$3 + n + \frac{2}{n} + (-1)^n n = 3 + 2n + \frac{2}{n} \geqslant 3 + 2 \times 2 = 7$$

  - lorsque <u>n est impair</u> :

$$3 + n + \frac{2}{n} + (-1)^n n = 3 + \frac{2}{n} > 3.$$

Donc 3 est un minorant de B, et <u>B est minorée</u>.

Montrons que $3 = \inf B$.

On sait que $\lim \left(3 + \frac{2}{n}\right) = 3 + 0 = 3$,

donc on peut trouver des $n \in \mathbb{N}$ ~~pairs~~ (impairs) tels que

$3 + \frac{2}{n}$ est aussi proche que l'on veut de 3. Donc il n'y a pas de minorant de B ~~p~~ strictement plus grand que 3.

[si on veut une preuve sans utiliser les limites, écrivons :

soit $\varepsilon > 0$. On veut montrer que $3 + \varepsilon$ n'est pas un minorant de B.

D'après la propriété archimédienne de $\mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{2}{n} < \varepsilon$ (prendre $n > \frac{2}{\varepsilon}$). On peut supposer que n est pair (quitte à le remplacer par $(n+1)$).

Alors : $3 + \frac{2}{n} \in B$, et $3 + \frac{2}{n} < 3 + \varepsilon$. Donc $(3+\varepsilon)$ n'est pas un minorant de B]

Donc $\boxed{3 = \inf B.}$.

Or a vu que $\forall x \in B,\ 3 < x$, donc $3 \notin B$.

Donc 3 n'est pas le plus petit élément de B, et B n'a <u>pas de plus petit élément</u>.

(c) $C = \left\{ \frac{2n+3}{2n-1},\ n \in \mathbb{N} \right\}$.

On a :

$$\frac{2n+3}{2n-1} = \frac{2n-1+4}{2n-1} = 1 + \frac{4}{2n-1}.$$

Si $n = 0$, $1 + \frac{4}{2n-1} = -3$

Si $n \geq 1$, $1 + \frac{4}{2n-1} \geq 1$

Donc pour tout $x \in C$, $x \geq -3$, et $-3 \in C$

Donc $\boxed{-3 = \min C = \inf C}$, et C est minoré.

Pour $n \geq 1$, $\underbrace{1 + \frac{4}{2n-1} \leq 1 + \frac{4}{1}}_{2n-1 \geq 1 \text{ donc}} = 5$

et 5 est atteint pour $n = 1$, i.e. $5 \in C$,

donc $\boxed{5 = \max C = \sup C}$ et C est majoré.

(d) $D = \left\{ \frac{2n+3}{2n+1}, n \in \mathbb{N} \right\}$.

On a :
$$\frac{2n+3}{2n+1} = \frac{2n+1+2}{2n+1} = 1 + \frac{2}{2n+1}.$$

. $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 + \frac{2}{2n+1} \leq 1 + \frac{2}{1} = 3$,

et 3 est atteint pour $n = 0$, i.e. $3 \in D$

donc $\boxed{3 = \max D = \sup D}$ et D est majoré.

. $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 + \frac{2}{2n+1} > 1$ donc 1 est un minorant

pour D, et D est minoré.

Comme $\lim \left(1 + \frac{2}{2n+1}\right) = 1$, on peut trouver des éléments de D aussi proches que l'on veut de 1.

[on peut aussi montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ $1 + \varepsilon$ n'est pas un minorant, en utilisant la propriété archimédienne de $\mathbb{R}$, cf. (b)].

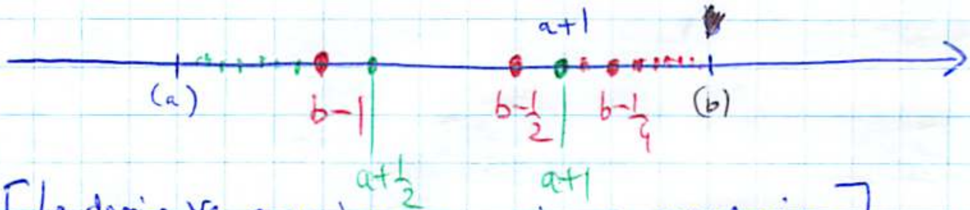
Donc $\boxed{1 = \inf D}$.

De plus, $\forall x \in D$, $x > 1$, donc $1 \notin D$, donc D n'a pas de plus petit élément.

Exercice 2 :

$$E = \left\{ a + \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^* \right\} \cup \left\{ b - \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

avec $a + 1 \leq b$.



[Le dessin va nous inspirer mais ne prouve rien]

[10pts] (a) On veut montrer que $b = \operatorname{Sup} E$.

- Montrons d'abord que b est un majorant de E.

  Soit $x \in E$. Alors on a <u>2 cas</u> :

  - si $x = a + \frac{1}{n}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$:

    $$x = a + \frac{1}{n} \leq a + 1 \leq b.$$

  - si $x = b - \frac{1}{n}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$:

    $$x = b - \frac{1}{n} < b.$$

  Donc : $\forall x \in E,\ x \leq b$, i.e. b est un <u>majorant de E</u>.

- <u>Soit $\varepsilon > 0$</u>. On veut montrer que $b - \varepsilon$ n'est pas un majorant de E, c'est-à-dire que : $\exists x \in E,\ x > b - \varepsilon$.

  Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} < \varepsilon$ (existe car $\lim \frac{1}{n} = 0$, ou directement par propriété archimédienne de $\mathbb{R}$: $\exists n \in \mathbb{N},\ n\varepsilon > 1$)

  Alors : $b - \frac{1}{n} > b - \varepsilon$.

  Avec $b - \frac{1}{n} \in E$.

<u>Conclusion</u>: b est le plus petit majorant possible, i.e

$$\boxed{b = \sup E}.$$

• Pour montrer que $a = \inf E$, c'est complètement analogue:

Pour tout $x \in E$,

si $x = a + \frac{1}{n}$, $x > a$

si $x = b - \frac{1}{n}$, $x \geq b - 1 \geq a$

donc a est bien un <u>minorant</u> de E.

Ensuite, si $\varepsilon > 0$, il faut montrer que $a + \varepsilon$ n'est pas un minorant de E.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

Alors $a + \frac{1}{n} < a + \varepsilon$. ~~donc~~, avec $a + \frac{1}{n} \in E$,

donc on peut conclure que $\boxed{a = \inf E}$.

(b) [5 pts] • <u>Si $a + 1 = b$</u>

alors $b = a + \frac{1}{1} \underline{\in E}$, donc comme $b = \sup E$

on a aussi que b est le plus grand élément de E:

$$\boxed{b = \max E}.$$

de même $a = b - 1 = b - \frac{1}{1} \in E$ donc comme

$a = \inf E$ on a en fait $\boxed{a = \min E}$.

• Si <u>$a + 1 < b$</u>.

On a : ~~$\forall x \in E$, $x < b$ d'après les calculs de la question~~

pour $x \in E$,

si $x = a + \frac{1}{n}$, $x \leq a + 1 < b$

et si $x = b - \frac{1}{n}$, $x < b$

donc $b \notin E$ et E n'a pas de plus grand élément.

De même, pour tout $x \in E$,

si $x = a + \frac{1}{n}$, $x > a$,

si $x = b - \frac{1}{n}$, $x \geqslant b - 1 > a$, donc

$a \notin E$ et E n'a pas de plus petit élément.

(c) [5 pts] Si $a + 1 > b$, on a :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a + \frac{1}{n} \leqslant a + 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b - \frac{1}{n} < b < a + 1$,

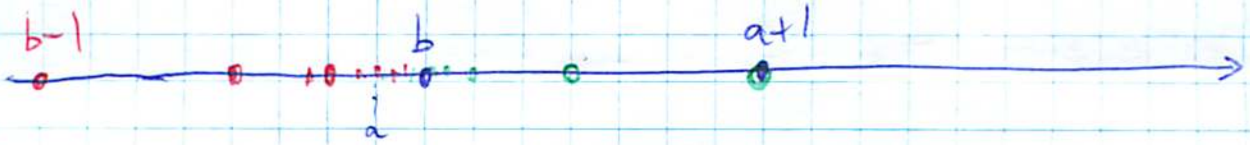
et $a + 1 = a + \frac{1}{1} \in E$, donc $\boxed{a + 1 = \sup E = \max E}$

de même : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a + \frac{1}{n} > a > b - 1$

et $b - \frac{1}{n} \geq b - 1$

et $b - 1 = b - \frac{1}{1} \in E$ donc

$\boxed{b - 1 = \inf E = \min E}$.



Exercice 3 :

(a) $F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_3 = 2,$
[5 pts]
$F_4 = 3, \quad F_5 = 5, \quad F_6 = 8.$

(b) Soit la propriété suivante :
[10 pts]
$$\mathcal{P}(n) : \sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2} - 1.$$

On va montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

• Initialisation : pour $n = 0$:

$$\sum_{i=0}^{n} F_i = \sum_{i=0}^{0} F_i = F_0 = 0,$$

et $F_{n+2} - 1 = F_{0+2} - 1 = F_2 - 1 = 1 - 1 = 0,$

donc $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.

• Transmission : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie. On va montrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a : $$\sum_{i=0}^{n+1} F_i = \sum_{i=0}^{n} F_i + F_{n+1}$$

$$= F_{n+2} - 1 + F_{n+1}$$

(par hypothèse de récurrence)

$$= F_{n+1} + F_{n+2} - 1$$

$$= F_{n+3} - 1 \quad \text{d'après la définition}$$

$$= F_{(n+1)+2} - 1$$

ce qui est bien la formule pour $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : par principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) [15 pts] Pour $n \in \mathbb{N}$ considérons la propriété $\mathcal{P}(n)$ suivante :

$$\mathcal{P}(n): \quad F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right).$$

On va montrer que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, en utilisant le principe de récurrence d'ordre 2.

- Initialisation :

  - $n=0$: on a $F_0 = 0$, et

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 \right) = \frac{1}{\sqrt{5}}(1-1) = 0$$

  donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

  - $n=1$: on a $F_1 = 1$, et

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 \right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}-(1-\sqrt{5})}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{5} = 1$$

  donc $\mathcal{P}(1)$ est vérifiée

- Transmission : Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé, et supposons que $\mathcal{P}(k)$ et $\mathcal{P}(k+1)$ sont vraies. On veut montrer que $\mathcal{P}(k+2)$ est vraie.

Calculons F_{k+2} en utilisant la formule de définition et l'hypothèse de récurrence :

$$F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\right)$$

(par hypothèse de récurrence)

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right]$$

Comme suggéré par l'énoncé, calculons :

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \quad \text{et}$$

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Donc en reportant dans l'égalité ci-dessus, on obtient :

$$F_{k+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}\right]$$

i.e., $\mathcal{S}(k+2)$ est vraie.

On peut conclure, par le principe de récurrence d'ordre 2, que $\mathcal{S}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4 :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

(a) [2pts] $u_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$,

$u_2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

$u_3 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{8+4\sqrt{5}}{4} = 2+\sqrt{5}.$

(b) [14pts] Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{P}(n)$ suivante :

$\mathcal{P}(n)$: il existe deux nombres rationnels strictement positifs a_n et b_n tels que

$$u_n = a_n + b_n\sqrt{5}$$

4 choses à vérifier

On va montrer par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

• initialisation : ~~$n=0$. $u_n = u_0$~~

$n=1$: $u_n = u_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$

on peut poser $a_1 = \frac{1}{2}$, $b_1 = \frac{1}{2}$. On a bien que

$u_1 = a_1 + b_1\sqrt{5}$, avec $a_1, b_1 \in \mathbb{Q}^+ \setminus \{0\}$.

• Transmission. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé. Supposons que $\mathcal{P}(k)$ est vraie :

i.e : il existe $a_k, b_k \in \mathbb{Q}^+ \setminus \{0\}$ tels que

$$u_k = a_k + b_k\sqrt{5}$$

On veut montrer que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

Calculons $u_{k+1} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

Donc : $u_{k+1} = u_k \times \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$= (a_k + b_k\sqrt{5})\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

(par hypothèse de récurrence)

$= \frac{1}{2}\left(a_k + 5b_k + b_k\sqrt{5} + a_k\sqrt{5}\right)$

$= \frac{a_k+5b_k}{2} + \frac{a_k+b_k}{2}\sqrt{5}$

Posons : $\boxed{a_{k+1} = \frac{a_k+5b_k}{2}}$ et $\boxed{b_{k+1} = \frac{a_k+b_k}{2}}$.

Alors on a bien que $u_{k+1} = a_{k+1} + b_{k+1}\sqrt{5}$.

⚠ Il faut aussi vérifier que $a_{k+1}, b_{k+1} \in \mathbb{Q}^+ \setminus \{0\}$.

Comme a_k et b_k sont rationnels, (par hypothèse de récurrence)

$a_{k+1} = \frac{a_k+5b_k}{2}$ aussi est rationnel (par les propriétés de corps de $\mathbb{Q}$)

de même, $b_{k+1} = \frac{a_k+b_k}{2} \in \mathbb{Q}$.

De plus, ~~a_{k+1}~~ par hypothèse de récurrence encore,

a_k et b_k sont strictement positifs,

donc $a_{k+1} = \frac{a_k+5b_k}{2} > 0$ aussi,

et $b_{k+1} = \frac{a_k+b_k}{2} > 0$ aussi

On a bien vérifié toutes les composantes de la propriété $\mathcal{P}(k+1)$.

Par le principe de récurrence, on peut conclure que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

(Les formules demandées sont encadrées plus haut)

(c) Supposons par l'absurde que $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$.
[7pts] Écrivons $\sqrt{5} = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}^*$,
et tel que la fraction $\frac{p}{q}$ soit irréductible.
Alors on obtient : $p^2 = 5q^2$, donc p^2 est multiple de 5. Comme 5 est premier, cela implique que 5 ~~divise~~ doit diviser p. On peut écrire $p = 5k$, ($k \in \mathbb{N}^*$).
Alors $5q^2 = (5k)^2 = 25k^2$ donc $q^2 = 5k^2$.
Alors comme ci-dessus, q^2 est multiple de 5, donc q est multiple de 5. Donc p et q sont multiples de 5,
contradiction car on avait choisi $\frac{p}{q}$ irréductible.
Donc : $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$. [Rq : le fait que 5 est premier est important dans la preuve : sinon on pourrait montrer de la même façon que $\sqrt{4} \notin \mathbb{Q}$!!]

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons par l'absurde que
[7pts] $u_n \in \mathbb{Q}$. D'après la question (b), on a
$u_n = a_n + b_n\sqrt{5}$, avec $a_n, b_n \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$
($b_n \neq 0$) donc $\boxed{\sqrt{5} = \frac{u_n - a_n}{b_n}}$; avec $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$, et $u_n \in \mathbb{Q}$ par hypothèse.
Donc par les propriétés de corps de $\mathbb{Q}$, on en déduit que $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$. Mais ceci est faux d'après la question (c). Contradiction.
Donc $\underline{u_n \notin \mathbb{Q}}$.
Rq : $b_n \neq 0$ est important ! Sinon $u_n = a_n \in \mathbb{Q}$!

(e) En calculant les premiers termes, on peut conjecturer
[bonus]
que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n^2 - 5b_n^2 = (-1)^n$.

Montrons ceci par récurrence.

- $\underline{n=1}$: On a $a_1 = \frac{1}{2}$, $b_1 = \frac{1}{2}$, donc

$$a_1^2 - 5b_1^2 = \frac{1}{4} - \frac{5}{4} = -1 = (-1)^1$$

donc la propriété est vraie pour $n=1$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, supposons qu'on ait $a_n^2 - 5b_n^2 = (-1)^n$,

montrons que $a_{n+1}^2 - 5b_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$.

On peut calculer en utilisant les relations entre a_{n+1}, b_{n+1} et a_n, b_n trouvées en question (b).

$$a_{n+1}^2 - 5b_{n+1}^2 = \left(\frac{a_n + 5b_n}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)^2$$

$$= \frac{a_n^2 + 10a_nb_n + 25b_n^2}{4} - \frac{5(a_n^2 + 2a_nb_n + b_n^2)}{4}$$

$$= \frac{-4a_n^2 + 20b_n^2}{4}$$

$$= -a_n^2 + 5b_n^2$$

$$= -(a_n^2 - 5b_n^2)$$

$$= -(-1)^n \quad \text{par hypothèse de récurrence}$$

$$= (-1)^{n+1}.$$

donc l'égalité est vérifiée pour $(n+1)$, et on peut conclure que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n^2 - 5b_n^2 = (-1)^n$.

Exercice 5. [bonus]

Soit $\mathcal{S}(n)$ une propriété dépendant de $n \in \mathbb{N}$. ~~On veut~~
On suppose que l'on a :

$$\begin{cases} \mathcal{S}(0) \text{ et } \mathcal{S}(1) \text{ sont vérifiées. } (1) \\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad [\, \mathcal{S}(k) \text{ et } \mathcal{S}(k+1) \Rightarrow \mathcal{S}(k+2) \,] \quad (2) \end{cases}$$

Montrons que $\mathcal{S}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

L'idée est de considérer une nouvelle propriété, construite à partir de $\mathcal{S}$, et que l'on va démontrer par récurrence simple.

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, la propriété $Q(n)$ suivante :

$$\boxed{Q(n) : \quad \mathcal{S}(n) \text{ et } \mathcal{S}(n+1) \text{ sont vraies}}.$$

Montrons, par récurrence (simple) sur n, que $Q(n)$ est vraie pour tout n.

- Initialisation : si $n = 0$, $Q(0)$ signifie : $\mathcal{S}(0)$ et $\mathcal{S}(1)$ vraies.

  C'est vérifié par hypothèse (1)

- Transmission : Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que $Q(k)$ est vraie (i.e, $\mathcal{S}(k)$ et $\mathcal{S}(k+1)$ vraies). Montrons qu'alors $Q(k+1)$ est vraie. (i.e, que $\mathcal{S}(k+1)$ et $\mathcal{S}(k+2)$ sont vraies)

  - $\mathcal{S}(k+1)$ est vraie par hypothèse de récurrence.

  - Comme $\mathcal{S}(k)$ et $\mathcal{S}(k+1)$ sont vraies par hypothèse de récurrence, d'après la propriété (2), on obtient que $\mathcal{S}(k+2)$ est vraie.

  Donc on a bien : $Q(k+1)$ vraie.

Par le principe de récurrence habituelle, on conclut que $Q(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier, $\mathcal{S}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. $\square$