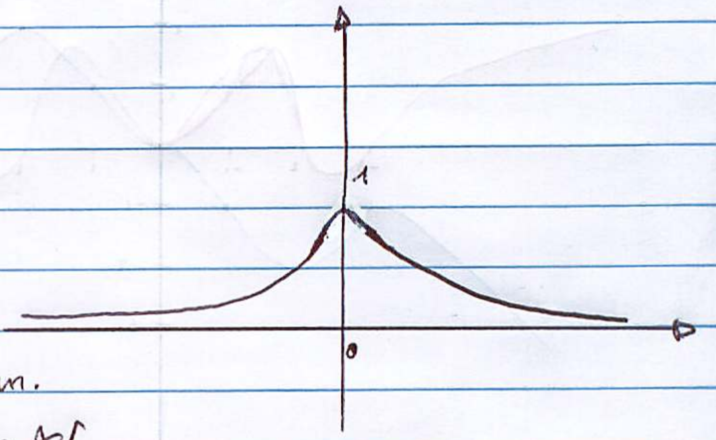
MAT 1013 : Feuille d'exercices 10

Exercice 1

Sur $[0,\infty[$ si $x<y$ (ou $]-\infty,0]$)
alors $x^2+1 < y^2+1$ et $\frac{1}{x^2+1} > \frac{1}{y^2+1}$

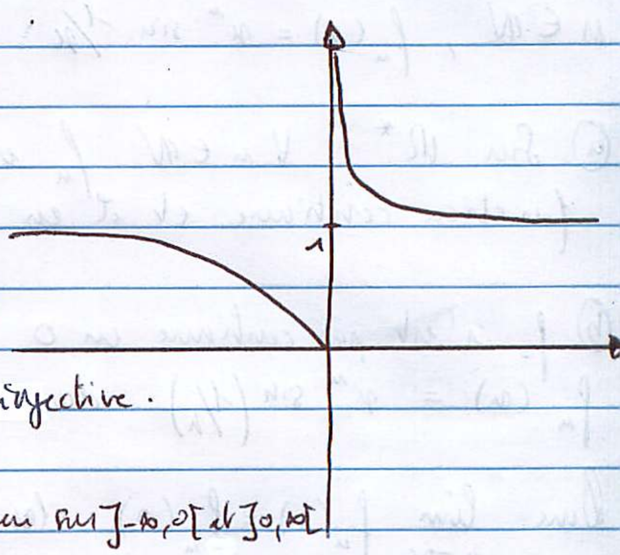


donc f est décroissante sur $[0,\infty[$ et croissante sur $]-\infty,0]$. Donc 0 est le point où f atteint son maximum.
La fonction sera donc monotone sur $I=[0,\infty[$ ou $I=]-\infty,0]$. Si on la restreint à un de ces deux intervalles, f sera injective. f est de plus continue et surjective sur l'ensemble $f(I)$.
Donc d'après le théorème de la fonction réciproque f^{-1} existe et est continue sur $f(I)$.
On a alors $y = f(x) = \frac{1}{1+x^2} \Leftrightarrow y(1+x^2) = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1-y}{y}$

Donc $x = \pm\sqrt{\frac{1-y}{y}} = f^{-1}(y)$ le $+$ ou le $-$ dépendant de I.

Exercice 2

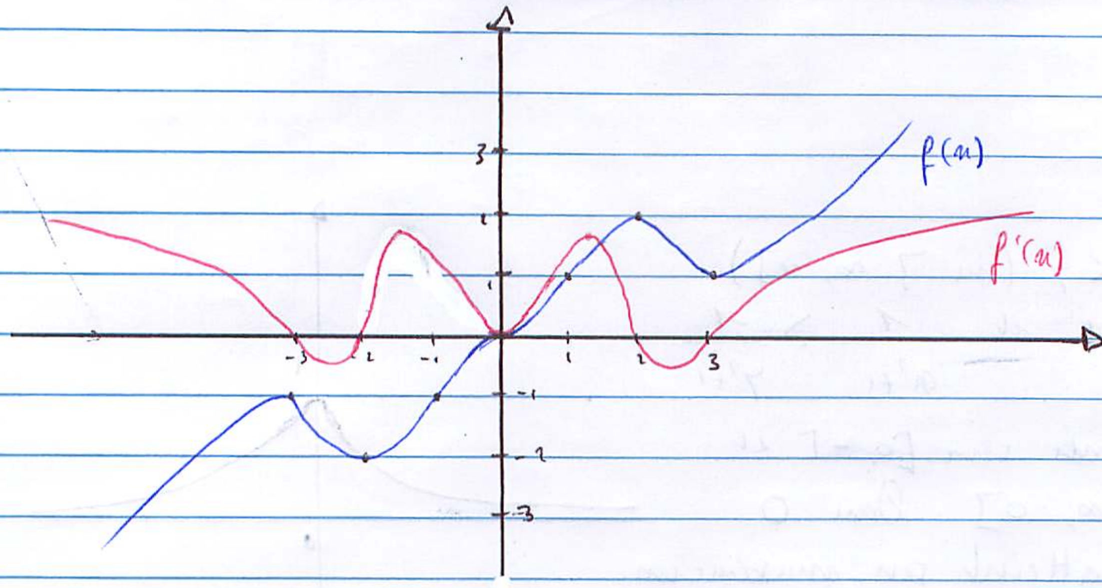
$f(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right)$ $\quad f : \mathbb{R}^* \longrightarrow]0,\infty[\setminus \{1\}$



f est tout d'abord une fonction continue sur $\mathbb{R}^*$ car composition de fonctions continues sur cet ensemble. De plus f y est monotone car si $x<y$, $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$ et $\exp\left(\frac{1}{x}\right) > \exp\left(\frac{1}{y}\right)$
f est donc décroissante sur $]-\infty,0[$ et $]0,\infty[$ donc injective.
Par définition, f est surjective sur $f(\mathbb{R}^*)$ et en utilisant le théorème de la fonction réciproque sur $]-\infty,0[$ et $]0,\infty[$ on sait qu'il existe $f^{-1} :]0,\infty[\setminus\{1\} \longrightarrow \mathbb{R}^*$ et que f^{-1} est continue.
On a alors $y = \exp\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow \ln y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\ln y}$

$f^{-1}(y) = \frac{1}{\ln y}$

Exercice 3



Exercice 4

$\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$

$x \longmapsto f(x) = x^\alpha$

Alors $f(0) = 0$

Ainsi $\dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \dfrac{h^\alpha}{h} = h^{\alpha - 1}$

Et $\lim_{h \to 0} h^{\alpha-1}$ existe si et seulement si $\alpha \geq 1$ donc f est dérivable en 0 pour $\alpha \geq 1$.

Exercice 7

$n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = x^n \sin 1/x \quad x \in \mathbb{R}^*$ et $f_n(0) = 0$

(a) Sur $\mathbb{R}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}$ f_n est continue comme composée et produit de fonction continue et il en est de même pour la dérivabilité.

(b) f_0 n'est pas continue en 0 par un de nos exercices précédent.
$f_n(x) = x^n \sin(1/x)$ donc $|f_n(x)| \leq |x|^n$ et $\lim_{x \to 0} |x|^n = 0$

Donc $\lim_{x \to 0} f_n(x) = f_n(0)$ les fonctions f_n sont continues en 0 $\forall n \geq 1$

(c) On calcule le taux de variation, $\dfrac{f_1(x+h) - f_1(0)}{h} = \dfrac{h \sin(1/h)}{h} = \sin(1/h)$

Or $\lim_{h \to 0} \sin(1/h)$ n'existe pas donc la fonction f_1 n'est pas dérivable en 0.

(d) On fait de même pour $n \geq 2$ on a alors $\dfrac{f_n(x+h) - f_n(0)}{h} = h^{n-1} \sin\left(\dfrac{1}{h}\right)$

Donc $|h^{n-1} \sin(1/h)| \leq |h|^{n-1}$

et $\lim_{h \to 0} |h|^{n-1}$ existe si et seulement si $n \geq 2$ donc f_n est dérivable en 0 pour $n \geq 2$

et on obtient alors $f_n'(0) = 0$

(e) $f_2'(x) = \begin{cases} 2x \sin(1/x) - \cos(1/x) & x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Mais $\lim_{x \to 0} 2x \sin(1/x) = 0$ et $\cos(1/x)$ ne possède pas de limite en 0

Donc la limite en 0 de $f_2'(x)$ n'existe pas la fonction n'est donc pas continue en 0.

(f) Si $n \geq 3$ $f_n'(x) = \begin{cases} n x^{n-1} \sin(1/x) - x^{n-2}\cos(1/x) & \text{pour } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

On a alors $\lim_{x \to 0} f_n'(x) = 0$ et $f_n'(0) = 0$ donc f_n' est continue en 0

Exercice 9

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$ $|f(x)| \leq x^2$.

Alors $-(x+h)^2 \leq f(x+h) \leq (x+h)^2$ et $-x^2 \leq f(x) \leq x^2$

Donc pour $x = 0$ $-h^2 \leq f(h) \leq h^2$ et $f(0) = 0$

En 0 on a alors $\left|\frac{f(0+h) - f(0)}{h}\right| \leq |h| \xrightarrow{h \to 0} 0$

Donc $\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$ existe et est égale à 0, f est dérivable en 0, $f'(0) = 0$

Exercice 10

$f : D \to \mathbb{R}$ dérivable en $a \in D$

$$\frac{a f(x) - x f(a)}{x-a} = \frac{a f(x) - a f(a) + a f(a) - x f(a)}{x-a} = a\left(\frac{f(x) - f(a)}{x-a}\right) - f(a)$$

Or $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = f'(a)$ car f est dérivable en $a \in D$

Donc $\lim_{x \to a} \frac{a f(x) - x f(a)}{x-a} = a f'(a) - f(a)$