MAT 1013 : Feuille d'Exercices 2 : Rationnels, Majorants, Bornes supérieures

Exercice 2.

ⓐ Soient $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ tels que $a \geq b$, $c \geq d$.
Montrer que $a+c \geq b+d$.
Si $a \geq b$ alors $(a-b) \geq 0$. Si $c \geq d$ alors $(c-d) \geq 0$
Ainsi $(a-b)+(c-d) \geq 0$ et $a+c \geq b+d$

ⓑ Soient $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ tels que $a \geq b \geq 0$, $c \geq d \geq 0$
Montrer que $ac \geq bd$
Si $a \geq b$ alors $(a-b) \geq 0$. Or $c \geq 0$ donc $(a-b)c \geq 0$
et $ac \geq bc$
De même $c \geq d$ donc $(c-d) \geq 0$ et $b \geq 0$ donc $b(c-d) \geq 0$ et
$bc \geq bd$.
Par transitivité de la relation d'ordre sur $\mathbb{Q}$ on obtient alors $ac \geq bd$

ⓒ Soient $a, b \in \mathbb{Q}$ tels que $a \geq b \geq 0$
Montrer que $a^2 \geq b^2$ puis que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a^n \geq b^n$
$a \geq b$ et $a \geq 0$ donc $a^2 \geq ba$. De même $a \geq b$ et $b \geq 0$
donc $ba \geq b^2$ donc par transitivité de la relation d'ordre sur $\mathbb{Q}$
on a bien $a^2 \geq b^2$. On vient donc de vérifier les cas $n = 0, 1, 2$
Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, $a^n \geq b^n$.
Alors $a^{n+1} = a^n . a \geq a^n . b \geq b^n . b = b^{n+1}$ donc par principe de récurrence $a^n \geq b^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3

ⓐ Est que la somme de deux irrationnels est toujours un irrationnel ?
La réponse est évidemment, non. Un contre exemple simple est $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$
Et le produit ?
La réponse est la même car $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$

ⓑ Montrer que : $x \notin \mathbb{Q}$, $y \in \mathbb{Q} \Rightarrow x+y \notin \mathbb{Q}$
Supposons que $x+y \in \mathbb{Q}$ alors il existe $z \in \mathbb{Q}$ tels que $x+y = z$
et $x = z - y$ donc $x \in \mathbb{Q}$ (car la somme de deux rationnels est un rationnel) contradiction

ⓒ Montrer que : $x \notin \mathbb{Q}$, $y \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \Rightarrow xy \notin \mathbb{Q}$.
Supposons $xy \in \mathbb{Q}$ alors il existe $z \in \mathbb{Q}$ tels que $xy = z$ donc
$x = z/y$ et $x \in \mathbb{Q}$ contradiction

Exercice 4 :

ⓐ Montrer que $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$.
Supposons que $\sqrt[3]{2} \in \mathbb{Q}$ il existe donc p et $q \in \mathbb{Z}$ tels que $\sqrt[3]{2} = p/q$
avec p/q irréductible. et $q \neq \pm 1$
Donc $2 = p^3/q^3$ et $2q^3 = p^3$. Sachant que q ne divise pas p
2 divise donc p^3 et divise donc p car 2 est premier. Ainsi il
existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $p = 2k$.
Ainsi $2q^3 = 8k^3$ et $q^3 = 4k^3$. Or k ne divisant pas q
on a que 2 divise q ce qui n'est pas possible non plus donc
$\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$

ⓑ Montrer que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$
Procédons comme précédemment on a alors $\sqrt{3} = p/q$ et $3 = p^2/q^2$
Ainsi $3q^2 = p^2$ donc 3 divise p et $p = 3k$ donc $3q^2 = 9k^2$
et $q^2 = 3k^2$.
k ne divisant pas q on en déduit que 3 divise q ce qui n'est
pas possible car contredisant notre hypothèse donc $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.