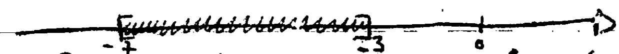
MAT1013 : Feuille TP n° 3

Valeurs absolues, suites, limites

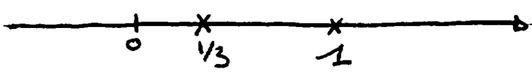
Exercice 1 :

ⓐ $A := \{x \in \mathbb{R} \mid |x+5| \le 2\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \le x+5 \le 2\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -7 \le x \le -3\}$



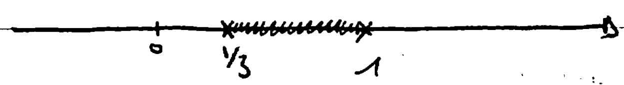
ⓑ $B := \{x \in \mathbb{R} \mid |3x-2| = 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x-2 = 1\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid 3x-2 = -1\}$

$= \{x \in \mathbb{R} \mid x = 1\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x = 1/3\} = \{1/3, 1\}$

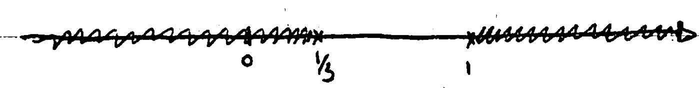


ⓒ $C := \{x \in \mathbb{R} \mid |3x-2| < 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x-2 < 1\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid 3x-2 > -1\}$

$= \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1/3\}$



ⓓ $D := \{x \in \mathbb{R} \mid |3x-2| > 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1/3\}$



Exercice 8 :

Soit $u_n = \dfrac{3n^2 - 2}{2n^2 - 1}$

ⓐ $\left|u_n - \frac{3}{2}\right| = \left|\frac{3n^2-2}{2n^2-1} - \frac{3}{2}\right| = \left|\frac{(3n^2-2)\cdot 2 - 3(2n^2-1)}{4n^2-2}\right| = \left|\frac{-1}{4n^2-2}\right|$

qui pour $n \in \mathbb{N}^*$ est égale à $\dfrac{1}{4n^2-2}$.

Donc on veut trouver N tel que $\dfrac{1}{4n^2-2} < 10^{-3}$ $\forall n > N$

$\dfrac{1}{4n^2-2} < 10^{-3} \Leftrightarrow 4n^2 - 2 > 10^3 \Leftrightarrow n^2 > \dfrac{10^3+2}{4} = \dfrac{501}{2}$

Or $\sqrt{\dfrac{501}{2}} \approx 16$ ainsi pour $N = 17$ notre inégalité est vérifiée

ⓑ Soit $\varepsilon > 0$, existe-t-il N tel que $\forall n > N$ $\dfrac{1}{4n^2-2} < \varepsilon$?

$\dfrac{1}{4n^2-2} < \varepsilon \Leftrightarrow 4n^2 - 2 > 1/\varepsilon \Leftrightarrow 4n^2 > 2 + 1/\varepsilon$

Donc par propriété archimédienne de $\mathbb{R}$ on sait qu'il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > N_\varepsilon$ $2 + 1/\varepsilon < 2N_\varepsilon < 2n$ et $2 + 1/\varepsilon < 4N_\varepsilon^2 < 4n^2$.

Ainsi $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$ vérifiant $n \ge N$ alors $\left|u_n - \frac{3}{2}\right| < \varepsilon$

La suite u_n converge vers $3/2$

Exercice 9 :

(a) $u_n = \dfrac{2}{n^2+3n+1} \leq \dfrac{2}{n^2} \leq \dfrac{2}{n}$

Alors soit $\varepsilon < 1$, par propriété archimédienne de $\mathbb{R}$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > N$ on a $2 < \varepsilon N$ et donc $2/N < \varepsilon$

Ainsi $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > N$ on a $|u_n| = u_n < \varepsilon$

Donc $u_n \xrightarrow{n \to \infty} 0$

(b) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

Or $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} > 2\sqrt{n}$ donc $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$

Soit $\varepsilon > 0$ alors $\dfrac{1}{2\sqrt{n}} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \sqrt{\dfrac{1}{2\varepsilon}}$. Or par propriété archimédienne de $\mathbb{R}$, on sait qu'il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > N_\varepsilon$ on ait $\sqrt{\dfrac{1}{2\varepsilon}} < N_\varepsilon < n$

Ainsi $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > N$ on a $|u_n| < \varepsilon$ donc $u_n \xrightarrow{n \to \infty} 0$.

(c) $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n+5} = \dfrac{1}{\sqrt{n} + 5/\sqrt{n}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

Donc d'après ce qui a été fait précédemment modulo la constante $1/2$ on a $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $n > N$ $|u_n| < \varepsilon$ donc $u_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

(d) $u_n = \dfrac{\cos n}{n}$ alors $|u_n| = \dfrac{|\cos n|}{n} \leq \dfrac{1}{n}$

Ainsi comme $0 \leq |u_n| \leq 1/n$ par convergence de $1/n$ vers 0 on déduit que $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$ vérifiant $n > N$, alors $0 \leq |u_n| < \varepsilon$ donc u_n converge vers 0.

Exercice 11

(a) C'est vrai, voir une proposition du cours

(b) C'est faux, on peut prendre comme exemple, $\cos(n)$, $\sin(n)$, $\dfrac{(-1)^n}{2}$ et bien d'autres

(c) C'est faux, la suite $\dfrac{(-1)}{n}$ est convergente et croissante mais aussi $1 + \dfrac{(-1)}{n}$, $\dfrac{\sin(5\pi/2)}{n}$ et bien d'autres encore.

(d) C'est faux, les suites n, n^2, $\sqrt{n}$, $180n+2$, le prouve

(e) C'est encore faux, voir (c)

(f) Ça c'est vrai, c'est un théorème du cours.

(g) C'est encore vrai par définition d'une suite croissante car $u_0 \leq u_n$ $\forall n$ donc minorée par u_0

(h) C'est faux, $\left(\frac{-1}{2}\right)^n$ converge vers 0 mais $(-1)^n 2^n$ diverge

(i) C'est faux, par exemple $\frac{(-1)^n}{2} + \frac{(-1)^{n+1}}{2}$ converge vers 0 alors que $\frac{(-1)^n}{2}$ et $\frac{(-1)^{n+1}}{2}$ sont des suites qui divergent

(j) C'est vrai

(k) C'est faux, voir (i)

Amusez-vous à trouver d'autres exemples, c'est un bon exercice.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]