MAT 1013 : Feuille d'exercices n°7

Séries, Tests de convergence

Exercice 1

a) On suppose $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell > 1$

Soit $\varepsilon > 0$ alors $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > N$ $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - \ell\right| < \varepsilon$

donc $\forall n > N$ $\ell - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n}$ car (a_n) est strictement positive.

On peut alors choisir ε tel que $1 < \ell - \varepsilon$ car $1 < \ell$ donc à partir d'un certain rang N on a $\forall n > N$ $1 < \frac{a_{n+1}}{a_n}$ et $a_n < a_{n+1}$

La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sera donc croissante à partir d'un certain rang.
La suite est strictement positive et croissante à partir d'un certain rang donc $\lim_n a_n \neq 0$ et la série est divergente.

b) On suppose $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$

Si $\forall n \in \mathbb{N}$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_{n+1} \geq a_n$ donc la suite

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite positive strictement et croissante donc $\lim_n a_n \neq 0$ et la série $\sum a_n$ est divergente.

c) Si l'on considère $a_n = \frac{1}{n}$, la série $\sum a_n$ est divergente

Si l'on considère $a_n = \frac{1}{n^2}$, la série $\sum a_n$ est convergente

Exercice 2

Soit S_n la suite des sommes partielles de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ série à termes positifs alors S_n est une suite croissante car $S_{n+1} - S_n = a_n > 0$ donc tend soit vers une limite finie soit vers $+\infty$. Donc si S_n possède une sous-suite convergente alors S_n est convergente car S_n possède alors une infinité de termes bornés et par croissance de S_n tout les termes de la suite sont bornés donc S_n est convergente.

Exercice 3

ⓐ S_n la suite des sommes partielles de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positive décroissante

On pose $u_k = a_{2^k} + \dots + a_{2^{k+1}-1}$

$S_0 = a_0 = u_0$ donc le cas de base est vérifié

On suppose alors que pour n fixé, $S_{2^n-1} = u_0 + \dots + u_{n-1} = \sum_{k=0}^{2^n-1} a_k$

Alors $S_{2^{n+1}-1} = \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} a_k = \sum_{k=0}^{2^n-1} a_k + a_{2^n} + \dots + a_{2^{n+1}-1} = S_{2^n-1} + u_n$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $S_{2^{n+1}-1} = u_0 + \dots + u_n$ par principe de récurrence

Or $u_k = a_{2^k} + \dots + a_{2^{k+1}-1}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante positive donc

$(2^{k+1} - 2^k)\, a_{2^{k+1}} \leq u_k \leq (2^{k+1} - 2^k)\, a_{2^k}$

$2^k a_{2^{k+1}} \leq u_k \leq 2^k a_{2^k}$ $\quad k \in \mathbb{N}$

ⓑ En sommant ces inégalités on obtient alors :

$\sum_{k=0}^{n} 2^k a_{2^{k+1}} \leq \sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n} 2^k a_{2^k}$

$\sum_{k=1}^{n+1} 2^{k-1} a_{2^k} \leq \sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n} 2^k a_{2^k}$

$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+1} 2^k a_{2^k} \leq S_{2^{n+1}-1} \leq \sum_{k=0}^{n} 2^k a_{2^k}$

ⓒ Ainsi par les inégalités précédentes on conclue à l'équivalence de la convergence de S_n et de celle de $\sum_{k=0}^{n} 2^k a_{2^k}$.

Exercice 4

$\alpha \in \mathbb{R}$

ⓐ Soit $\alpha \leq 1$ alors $n^\alpha \leq n$ donc $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^\alpha}$

Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ considérons alors $\sum_{k=1}^{n+1} 2^k \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{n+1} 1 = n+1 \xrightarrow{n\to\infty} \infty$

Donc $S_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$ et par comparaison $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ est divergente.

ⓑ $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$ et $b_n = 2^n a_{2^n}$ on a alors $\sum_{k=0}^{n} b_k = \sum_{k=0}^{n} 2^k \frac{1}{(2^k)^\alpha} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2^k)^{\alpha-1}}$

$$\sum_{k=0}^{n} b_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2^{\alpha})^{k-1}}$$

Or $\alpha > 1$ donc $\alpha - 1 > 0$ et $\frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1$ donc la série $\sum b_n$ est une série géométrique de raison $\frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1$ donc convergente. Et par comparaison $S_{2^{n+1}-1} \leq \sum_{k=0}^{n} 2^k a_{2^k}$ la suite $S_{2^{n+1}-1}$ est convergente donc les série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ sont convergentes pour $\alpha > 1$

(c) On a donc bien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ converge ~~⟺~~ $\alpha > 1$

Exercice 5:

Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ deux séries à termes strictements positifs.

$\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$

(a) On a alors $\frac{a_{N+1}}{a_N} \leq \frac{b_{N+1}}{b_N}$ donc $\frac{a_{N+1}}{a_N} \cdot \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} \cdots \frac{a_{N+p}}{a_{N+p-1}} \leq \frac{b_{N+1}}{b_N} \cdots \frac{b_{N+p}}{b_{N+p-1}}$

et $\frac{a_{N+p}}{a_N} \leq \frac{b_{N+p}}{b_N}$ $\forall p \in \mathbb{N}$

Donc $a_{N+p} \leq b_{N+p} \frac{a_N}{b_N}$ $\forall p \in \mathbb{N}$ donc $\forall n > N$ $a_n \leq b_n \frac{a_N}{a_N}$

(b) Si $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ est convergente alors grâce à l'inégalité précédente on peut comparer les série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ et conclure à la convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. On peut alors faire de même dans le cas où $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge et conclure à la divergence de $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$

(c) A partir d'un certain rang, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha}$ avec $\alpha > 1$.

Or $\frac{n}{n+1} = \frac{1/n+1}{1/n}$ on pose alors $b_n = \frac{1}{n^{\alpha}}$ et vérifie alors que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ pour tout n à partir d'un certain rang

donc d'après ce qui précède $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est convergente.

Exercice 6

ⓐ Soit $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ une série, S_n la suite de ses sommes partielles que l'on suppose bornée. Soit $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite décroissante vers 0.

On a $u_{n+1} h_{n+1} = h_{n+1}(S_{n+1} - S_n)$

Donc $u_{n+1} h_{n+1} + \dots + u_{n+p} h_{n+p} = h_{n+1}(S_{n+1} - S_n) + \dots + h_{n+p}(S_{n+p} - S_{n+p-1})$

$= h_{n+p} S_{n+p} - h_{n+1} S_n + h_{n+1} S_{n+1} - h_{n+2} S_{n+2} - h_{n+2} S_{n+1} + \dots + h_{n+p} S_{n+p-1}$

$= h_{n+p} S_{n+p} - h_{n+1} S_n + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (h_k - h_{k+1}) S_k$

ⓑ $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$ $|S_n| \leq M$

On a alors $|h_{n+1} u_{n+1} + \dots + h_{n+p} u_{n+p}| = |h_{n+p} S_{n+p} - h_{n+1} S_n + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (h_k - h_{k+1}) S_k|$

$\leq |h_{n+1} S_n| + |h_{n+p} S_{n+p} + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (h_k - h_{k+1}) S_k|$

$\leq 2 h_{n+1} M$ ceci $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall p \geq 1$

ⓒ En effet $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 de façon décroissante donc $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > N$ $h_n < \varepsilon$

Donc $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > N$ et $p \in \mathbb{N}$ on a $|U_{n+p} - U_n| < 2\varepsilon M$ où $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k h_k$

Donc la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy donc la série est convergente.

ⓓ Soit $\sum a_n$ cv et (b_n) décroissante minorée alors

$|a_{n+p}(b_{n+p} - \ell) + \dots + a_{n+1}(b_{n+1} - \ell)| \leq 2M |b_{n+1} - \ell|$

car $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est convergente donc bornée, ici par M et $(b_n - \ell)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante tendant vers 0 donc la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(b_n - \ell)$ est convergente. Or $\sum_{k=0}^{n} a_k(b_k - \ell) = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k - \ell \sum_{k=0}^{n} a_k$ on a ainsi $\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = \sum_{k=0}^{n} a_k(b_k - \ell) + \ell \sum_{k=0}^{n} a_k$ somme de deux séries convergentes donc convergente.

Exercice 7

ⓐ $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \geq \dfrac{1}{2\sqrt{n+1}}$

Or $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{2\sqrt{n+1}} \approx \dfrac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ série de Riemann divergente.

(b) $\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} = b_n$

On observe alors $\sum_{k=1}^{n} b_k = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 1 \xrightarrow{n\to\infty} -1$

La série est donc convergente de valeur -1.

(c) $c_n = \frac{2^{2n+1}}{5^n} = 2\left(\frac{4}{5}\right)^n$

Donc $\sum_{k=0}^{n} c_k = 2\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{4}{5}\right)^k$. Or $\left(\frac{4}{5}\right) < 1$ donc $\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{4}{5}\right)^k$ est

convergente vers la valeur $\frac{1}{1-4/5} = 5$

Donc $\sum_{k=0}^{n} c_k$ est convergente et $\lim_n \sum_{k=0}^{n} c_k = 10$

(d) $d_n = \frac{(\cos(n))^2}{3^n}$ ici $d_n \leq \frac{1}{3^n}$ qui est le terme général

d'une série convergente donc par comparaison $\sum_{n=0}^{k} d_n$ est convergente.

(e) $e_n = \frac{(n!)^3}{(3n)!}$ sont tous positifs.

$\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{((n+1)!)^3\ (3n)!}{(n!)^3\ (3(n+1))!} = \frac{(n+1)^3}{3(n+1)(3n+2)(3n+1)} = \frac{(n+1)^2}{3(3n+2)(3n+1)} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{27} < 1$

En utilisant alors le critère de D'alembert on conclut à la convergence de la série.

(f) $f_n = \frac{(2n^2-1)^n}{n^{2n}} = \left(2 - \frac{1}{n^2}\right)^n$

Donc $\lim_n (f_n)^{1/n} = \lim_n \left(2 - \frac{1}{n^2}\right) = 2 > 1$ donc le critère de Cauchy

affirme la divergence de la série.

(g) $g_n = \frac{n^{2n}}{(n^3+1)^n} = \left(\frac{n^2}{n^3+1}\right)^n$

Donc $\lim_n (g_n)^{1/n} = \lim_n \frac{n^2}{n^3+1} = 0 < 1$ donc le critère de Cauchy

affirme alors la convergence de la série.

(h) $h_n = \frac{\sin(nx)}{n^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$ fixé

Ici $|h_n| < \frac{1}{n^2}$ série de Riemann convergente donc la série $\sum_{n=1}^{\infty} h_n$ converge absolument c'est donc une série convergente.

(1) $i_n = \frac{\sqrt{n+\cos(n)}}{n} \geqslant \frac{\sqrt{n-1}}{n} \geqslant \frac{1}{n}$ $n > 1$

Donc la série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n+\cos(n)}}{n}$ est de même nature que $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ donc divergente et la convergence d'une série ne tenant pas à l'ajout d'un nombre fini de terme on peut conclure à la divergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+\cos(n)}}{n}$

Exercice 9

Soit $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1.4.7 \ldots (3n+1)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ici a_n est positif

On va donc appliquer le critère de D'Alembert.

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1.4.7 \ldots (3(n+1)+1) \cdot (n!) \cdot x^{n+1}}{1.4.7 \ldots (3n+1)((n+1)!) \cdot x^n} = \frac{(3n+4)x}{(n+1)} \xrightarrow{n \to \infty} 3x$

Donc la série est convergente si $x < \frac{1}{3}$

Si $x = \frac{1}{3}$ on a alors $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3n+4}{3n+3} \xrightarrow{n \to \infty} 1$ mais $\forall n \in \mathbb{N}$ $\frac{3n+4}{3n+1} > 1$ donc la série sera divergente.

Exercice 8 :

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$. Utilisons le critère de D'Alembert

$\frac{((n+1)!)^2 / (2(n+1))! \cdot x^{n+1}}{((n!)^2 / ((2n)!)) \cdot x^n} = \frac{(n+1)^2}{2(n+1)(2n+1)} x = \frac{(n+1)x}{2(2n+1)} \xrightarrow{n \to \infty} \frac{x}{4}$

Donc pour $x < 4$ la série sera convergente. Si $x = 4$ alors $\frac{4n+4}{2(2n+1)} = \frac{2n+2}{2n+1} \xrightarrow{n \to \infty} 1$ par valeur supérieure $\forall n \in \mathbb{N}$ donc la série est dv

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^p}{(qn)!} x^n$, de la même façon on obtient $\frac{(n+1)^{p-1} x}{q(qn+(q-1)) \cdots (qn+1)} \approx \frac{n^{p-1}}{q^q n^{q-1}} x = n^{p-q} \frac{x}{q^q}$

Donc, si $p > q$; $\lim_{n \to \infty} n^{(p-q)} \frac{x}{q^q} = +\infty$ ceci $\forall x \in \mathbb{R}^+$ fixé donc "la" série sera divergente

Si $q > p$ alors $\lim\limits_{n \to \infty} n^{(p-q)} \dfrac{x}{q^q} = 0$ ceci $\forall x \in \mathbb{R}_+$, la série sera donc convergente

Si $p = q$ alors la limite dépend alors du choix de $x \in \mathbb{R}_+$:

si $x > q^q$ alors $\dfrac{x}{q^q} > 1$ la série sera divergente

si $x < q^q$ alors $\dfrac{x}{q^q} < 1$ la série sera convergente

si $x = q^q$ alors $\dfrac{q^q (n+1)^{q-1}}{q(qn+(q-1)) \cdots (qn+1)} = \dfrac{(qn+q)^{q-1}}{(qn+(q-1)) \cdots (qn+1)}$

Or $qn + q > qn + k$ pour $1 \leq k \leq q-1$

Donc $\dfrac{qn+q}{qn+k} > 1$ pour $1 \leq k \leq q-1$

Et $\forall n \in \mathbb{N}$ $\dfrac{(qn+q)^{q-1}}{(qn+(q-1)) \cdots (qn+1)} > 1$ avec $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(qn+q)^{q-1}}{(qn+(q-1)) \cdots (qn+1)} = 1$

Grâce à un exercice précédent on conclut à la divergence de la série.