UQÀM
MAT1013
Analyse 1

Session d'hiver 2013
Vivien Ripoll
(vivien.ripoll@lacim.ca)

Devoir 1

Devoir à rendre au plus tard le jeudi 7 février (Rappel : 15% en moins sur la note par jour de retard). Une copie par étudiant doit être rendue. La copie doit être personnelle, manuscrite, et écrite à l'encre (bille ou plume, pas de crayon gris).

Une attention particulière sera portée à la qualité et à la précision de la rédaction. Les étapes des calculs et des raisonnements doivent figurer sur la copie. Les exercices sont indépendants, et leur ordre n'a pas d'importance. À l'intérieur d'un même exercice, on pourra utiliser les résultats des questions précédentes pour répondre à une question donnée. Le barème annoncé est indicatif et pourrait être modifié. Les questions marquées (*) sont facultatives (4(e) et 5).

Exercice 1. [20 pts]

Pour chacun des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants, dire s'il est majoré, minoré, donner sa borne supérieure et sa borne inférieure dans $\mathbb{R}$ (si elles existent), et préciser s'il a un maximum, un minimum.

(a) $\left\{ \left(\frac{-1}{2} \right)^n \mid n \in \mathbb{N} \right\}$

(b) $\left\{ 3 + n + \frac{2}{n} + (-1)^n n \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$

(c) $\left\{ \frac{2n+3}{2n-1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$

(d) $\left\{ \frac{2n+3}{2n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$

Exercice 2. [20 pts]

Soient a, b des réels tels que $a + 1 \leq b$. On considère le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ suivant :

$$E = \left\{ a + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\} \cup \left\{ b - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\} .$$

(a) Montrer que $\sup(E) = b$ et que $\inf(E) = a$.

(b) Est-ce que E a un plus grand élément ? un plus petit élément ? [On pourra étudier à part le cas $a + 1 = b$.]

(c) Déterminer $\sup(E)$ et $\inf(E)$ lorsque $a + 1 > b$.

Complément de cours : Le principe de récurrence *d'ordre 2* est une généralisation du principe de récurrence vu en cours :

Théorème (Principe de récurrence d'ordre 2)**.**
Soit un énoncé $\mathcal{P}(n)$ dépendant de $n \in \mathbb{N}$. Si l'on a :

(1) $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ vrais ;

(2) étant donné $k \in \mathbb{N}$ fixé, si $\mathcal{P}(k)$ et $\mathcal{P}(k+1)$ sont vrais, alors $\mathcal{P}(k+2)$ est vrai ;

Alors $\mathcal{P}(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

L'exercice suivant est une application de ce théorème.

Exercice 3. [30 pts]

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit un nombre F_n de la façon suivante : $F_0 = 0$; $F_1 = 1$, et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n\ .$$

(a) Calculer les nombres F_i pour i de 0 à 6.

(b) Montrer par récurrence sur n (récurrence habituelle) que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2} - 1\ .$$

(c) En utilisant le principe de récurrence d'ordre 2, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)\ .$$

[Indication : on pourra au préalable développer $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$ et $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2$.]

Exercice 4. [30 pts]

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit un réel $u_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

(a) Calculer u_1, u_2 et u_3.

(b) Montrer (par récurrence sur n) que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe deux nombres rationnels strictement positifs a_n, b_n, tels que

$$u_n = a_n + b_n\sqrt{5}.$$

On donnera des formules exprimant a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n, b_n.

(c) Montrer que $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$.

(d) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \notin \mathbb{Q}$.

(e) (*) Donner la valeur de $a_n^2 - 5b_n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 5. (*)

En utilisant le principe de récurrence vu en cours, donner une démonstration rigoureuse du théorème du principe de récurrence d'ordre 2 énoncé plus haut.