UQÀM | **Session d'hiver 2013**
MAT1013 | Vivien Ripoll
Analyse 1 | (vivien.ripoll@lacim.ca)

Devoir 2

N.B. : ce devoir fait 3 pages.

- Devoir à rendre au plus tard **le mardi 12 mars** (Rappel : 15% en moins sur la note par jour de retard). Une copie par étudiant doit être rendue. La copie doit être personnelle, manuscrite, et écrite à l'encre (bille ou plume, pas de crayon gris). Veuillez **soigner la présentation** de votre copie.
- Sauf mention explicite du contraire, il faut **démontrer** tout ce que l'on affirme. Les étapes des calculs et des raisonnements doivent figurer sur la copie. Si l'on utilise un théorème du cours, il faut le dire explicitement. La qualité et à la précision de la rédaction seront des critères importants lors de la notation.
- Les exercices sont indépendants, et leur ordre n'a pas d'importance. À l'intérieur d'un même exercice, on pourra utiliser les résultats des questions précédentes pour répondre à une question donnée.
- Le barême annoncé est indicatif et pourrait être modifié. Il n'est pas nécessaire de faire toutes les questions pour avoir la note maximale.
- Les questions marquées (*) sont légerement plus difficiles mais on suggère de les travailler.

Exercice 1. [20 pts]

Soit $a \in \mathbb{R}^+$, et $b > 0$ fixés. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = b, \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right).$$

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq \sqrt{a}$. [On pourra utiliser, en la démontrant, la propriété : $\forall x, y \in \mathbb{R}^+, \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$.]

(c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} \leq u_n$.

(d) Montrer que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

(e) En utilisant cet exercice avec un choix judicieux de a et b, donner un exemple d'une suite de nombres rationnels qui converge vers un nombre irrationnel.

Exercice 2. [30 pts]

On dit que deux suites (u_n) et (v_n) sont *adjacentes* si :
- (u_n) est croissante ;
- (v_n) est décroissante ;
- $(u_n - v_n)$ tend vers 0.

(a) Soient (u_n) et (v_n) deux suites adjacentes. Montrer que $(v_n - u_n)$ est décroissante. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.

(b) Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers des limites finies.

(c) On note ℓ la limite de (u_n) et ℓ' celle de (v_n). Montrer que $\ell = \ell'$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \ell \leq v_n$.

Posons maintenant, pour $n \geq 1$:

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \quad \text{et} \quad v_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{nn!}$$

(d) Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Leur limite commune est notée e et appelée constante de Neper (c'est la base du logarithme néperien : $e = \exp(1)$).

(e) À quel rang faut-il calculer u_n pour être sûr d'avoir une approximation de e à 10^{-2} près ? Le faire.

(f) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ il existe un unique nombre réel $h_n \in]0,1[$ tel que

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{h_n}{nn!}.$$

(g) (*) Montrer que e est irrationnel. [On pourra procéder par l'absurde et utiliser l'égalité précédente.]

Exercice 3. [30 pts]

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle. On définit une autre suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}.$$

Le but de cet exercice est de montrer la propriété (P) suivante :

$$(u_n) \text{ tend vers } \ell \implies (v_n) \text{ tend vers } \ell \tag{P}$$

(où ℓ est un nombre réel ou $\pm\infty$).

(a) Montrer d'abord que si (u_n) tend vers 0, alors (v_n) tend vers 0. Indication : certains des ingrédients importants de la preuve sont ci-dessous, *dans le désordre*. On pourra les réécrire en les réordonnant, et ajouter des arguments si nécessaire, afin d'obtenir une preuve complète.

1. Il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que, si $n > N'$, $\dfrac{1}{n} < \dfrac{\varepsilon}{2|S_N|}$.
2. Alors si $n > N$,
$$|u_{N+1} + \cdots + u_n| < \left(1 - \frac{N}{n}\right)\frac{\varepsilon}{2}.$$
3. Alors, si $n > \max(N, N')$, on a : $|v_n| < \varepsilon$.
4. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, si $n > N$, $|u_n| < \varepsilon/2$.
5. Si $n > N$,
$$|v_n| < \frac{|S_N|}{n} + \left(\frac{n-N}{n}\right)\frac{\varepsilon}{2} < \frac{|S_N|}{n} + \frac{\varepsilon}{2}.$$
6. Posons $S_N = u_1 + u_2 + \cdots + u_N$.

(b) Montrer que si (u_n) converge vers une limite finie ℓ, alors (v_n) converge aussi vers ℓ. [On pourra se ramener au cas de la question (a) en étudiant $(u_n - \ell)$ et $(v_n - \ell)$.]

(c) (*) Montrer que si (u_n) tend vers $+\infty$, alors (v_n) tend vers $+\infty$. Conclure pour la propriété (P).

(d) Soit (x_n) une suite réelle telle que $(x_{n+1} - x_n)$ tend vers une limite $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite (x_n/n) tend aussi vers α.

(e) La réciproque de (P) est-elle vraie en général, i.e., a-t-on :

$$(v_n) \text{ tend vers } \ell \implies (u_n) \text{ tend vers } \ell \ ?$$

(f) Montrer que la réciproque de (P) est vraie si l'on suppose (u_n) croissante.

Exercice 4. [30 pts]

Soit (u_n) une suite bornée. On définit deux autres suites (s_n) et (i_n) en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$s_n = \sup\{u_k \mid k \geq n\} \quad \text{et} \quad i_n = \inf\{u_k \mid k \geq n\}.$$

(a) Montrer que pour tout n, s_n existe. Expliquer pourquoi la suite (s_n) est décroissante et minorée, et donc convergente.

La limite de (s_n) est appelée *limite supérieure* de (u_n), et notée $\limsup(u_n)$. On pourrait montrer de même que i_n existe pour tout n, et que la suite (i_n) est croissante et majorée, donc convergente. La limite de (i_n) est appelée *limite inférieure* de (u_n), et notée $\liminf(u_n)$.

(b) Déterminer la limite supérieure et la limite inférieure de la suite $\left(\dfrac{(-1)^n n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

(c) Montrer que pour tout n, $i_n \leq u_n \leq s_n$. En déduire que si $\limsup(u_n) = \liminf(u_n)$, alors (u_n) converge et $\lim(u_n) = \limsup(u_n) = \liminf(u_n)$.

(d) Montrer réciproquement que si (u_n) converge, alors $\limsup(u_n) = \liminf(u_n) = \lim(u_n)$. [On pourra utiliser la définition de la limite et la caractérisation de la borne supérieure avec la notation ε.]

(e) On dit qu'un réel a est une valeur d'adhérence de la suite (u_n) s'il existe une suite extraite de (u_n) qui converge vers a. Montrer que si a est une valeur d'adhérence, alors $a \leq \limsup(u_n)$.

(f) (*) Montrer que $\limsup(u_n)$ est elle-même une valeur d'adhérence de (u_n).

Ainsi $\limsup(u_n)$ est la plus grande valeur d'adhérence de (u_n). On peut montrer de même que $\liminf(u_n)$ est la plus petite valeur d'adhérence de (u_n).