UQÀM **Session d'hiver 2013**
MAT1013 Vivien Ripoll
Analyse 1 (vivien.ripoll@lacim.ca)

Feuille d'exercices 11 : Dérivabilité, théorèmes fondamentaux

Opérations sur les dérivées

Exercice 1. En utilisant le formule pour la dérivée d'une fonction réciproque, calculer les dérivées des fonctions arccos, arcsin, arctan.

Exercice 2. Soit $f(x) = x^5 + 2x + 1$.

(a) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Elle admet donc une fonction réciproque, que l'on notera g.

(b) Expliquer pourquoi g est dérivable.

(c) Sans essayer de calculer une expression explicite pour $g(x)$ (c'est impossible), déterminer $g(-2)$, $g(1)$, et $g(4)$, puis $g'(-2)$, $g'(1)$, et $g'(4)$.

Théorèmes de Rolle et théorème des accroissements finis

Exercice 3. Rappelons que $f : I \to \mathbb{R}$ est dite *lipschitzienne* sur I si

$$\exists k \in \mathbb{R}, \forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

(a) Montrer que si f est dérivable sur I et que f' est bornée sur I, alors f est lipschitzienne sur I.

(b) Expliquer pourquoi c'est le cas en particulier si I est un segment et que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I (i.e, f dérivable et f' continue).

Exercice 4. Soit I un intervalle, et $f : I \to \mathbb{R}$.

(a) On suppose que f est deux fois dérivable sur I, et que f est nulle en 3 points distincts $a_1 < a_2 < a_3 \in I$. Montrer qu'il existe $c \in I$ tel que $f''(c) = 0$. [Utiliser plusieurs fois le théorème de Rolle.]

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que f est n fois dérivable sur I, et qu'il existe au moins $n+1$ points de I où f est nulle. Montrer qu'alors il existe $c \in I$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Exercice 5. (une généralisation du théorème de Rolle)

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[0, +\infty[$, dérivable sur $]0, +\infty[$. On suppose que $f(0) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

(a) Montrer que f atteint un maximum ou un minimum sur $]0, +\infty[$.

(b) En déduire qu'il existe $c \in]0, +\infty[$, tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 6. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$. On suppose que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $f(c)f'(c) = \frac{1}{2}$. [On pourra utiliser la fonction $g(x) = (f(x))^2 - x$.]

Exercice 7. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. On suppose que $\forall x \in]a,b[, f'(x) \neq 0$.

(a) Montrer que f est injective sur $[a,b]$.

(b) Soit $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ une autre fonction continue sur $[a,b]$, et dérivable sur $]a,b[$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $\dfrac{g(b)-g(a)}{f(b)-f(a)} = \dfrac{g'(c)}{f'(c)}$.
[On pourra utiliser la fonction $h(x) = g(x) - g(a) - \frac{g(b)-g(a)}{f(b)-f(a)}(f(x) - f(a))$.]

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose qu'il existe $m > 0$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) \geq m$.

(a) Donner une interprétation graphique de cette hypothèse pour le graphe de f.

(b) Montrer que : $\forall x \geq 0, f(x) - f(0) \geq mx$ et que : $\forall x \leq 0, f(x) - f(0) \leq mx$. En déduire les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

(c) En déduire que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

(d) (*) On suppose de plus qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) \leq M$. On fixe $r \in \mathbb{R}$, et on définit une suite (x_n) par :

$$x_0 = r, \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{M}.$$

Soit α l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$. Montrer que (x_n) tend vers α. [On montrera que si $r \geq \alpha$, alors (x_n) est minorée par α (récurrence), et décroissante ; et un analogue pour $r \leq \alpha$.]

Exercice 9. Soit I un intervalle, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction 2 fois dérivable sur I, telle que f'' soit bornée sur I (on notera $M_2 = \sup |f''|$). Soient $a < b \in I$. On suppose que $f(a) = f(b) = 0$. Le but de l'exercice est de montrer qu'alors :

$$\forall z \in I, |f(z)| \leq \frac{M_2}{2} \left|(z-a)(z-b)\right|.$$

(a) On fixe $z \in I$, et on définit une nouvelle fonction $g(x) = f(x) - K(x-a)(x-b)$, où K est une constante choisie de telle sorte que $g(z) = 0$.

(b) En utilisant le fait que g est dérivable 2 fois sur I, et que $g(a) = g(b) = g(z) = 0$, montrer qu'il existe $c \in I$, tel que $g''(c) = 0$. [Utiliser le théorème de Rolle, deux fois]

(c) Montrer que $f''(c) = 2K$ et en déduire que $f(z) = \frac{f''(c)}{2}(z-a)(z-b)$.

(d) Conclure pour la formule recherchée.

(e) (*) Généralisation : on suppose que f est n fois dérivable sur I (avec $n \geq 1$), avec $f^{(n)}$ bornée sur I (on notera $M_n = \sup |f^{(n)}|$). On suppose que f est nulle en n points distincts $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Montrer qu'alors :

$$\forall z \in I, |f(z)| \leq \frac{M_n}{n!} \left|\prod_{i=1}^{n}(z-a_i)\right|.$$

[Utiliser une méthode analogue, et la propriété montrée à l'exercice 4(b).]