UQÀM **Session d'hiver 2013**
MAT1013 Vivien Ripoll
Analyse 1 (vivien.ripoll@lacim.ca)

Feuille d'exercices 5 : Suites monotones, suites de Cauchy, suites bornées

---

Complément : un critère utile

Exercice 1.
Soit (u_n) une suite jamais nulle, et telle que $\lim \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \ell \in \mathbb{R}$.

(a) On suppose que $\ell < 1$. Montrer qu'alors (u_n) tend vers 0. [On pourra montrer 1) qu'il existe $0 < r < 1$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leq r$, puis 2) que pour $n \geq N$, $|u_n| \leq r^{n-N}|u_N|$.]

(b) On suppose que $\ell > 1$. Montrer qu'alors $(|u_n|)$ tend vers $+\infty$. [On pourra montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $R > 1$ tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n| \geq R^{n-N}|u_N|$.]

(c) Si $\ell = 1$, montrer par des exemples que (u_n) peut soit converger vers une limite finie, soit tendre vers $+\infty$ ou $-\infty$, soit ne pas avoir de limite.

Exercice 2. Utiliser l'exercice précédent pour étudier la convergence des suites suivantes :

(a) (a^n/n^p), avec $a \in \mathbb{R}^+$ et $p \in \mathbb{N}$.

(b) $(a^n/n!)$, avec $a \in \mathbb{R}^+$.

(c) $\dbinom{2n}{n} = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$.

Suites monotones

Exercice 3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite croissante. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}.$$

Montrer que la suite (v_n) est croissante.

Exercice 4. On définit une suite (a_n) en posant $a_0 = 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$. Calculer les premiers termes, montrer qu'elle est majorée par 2, puis qu'elle est croissante, en déduire qu'elle converge, et calculer sa limite.

Exercice 5. On définit une suite (a_n) en posant $a_0 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 2a_n^2$.

(a) Montrer que si (a_n) converge, alors sa limite est 0 ou 1/2.

(b) La suite (a_n) converge-t-elle ?

(c) Peut-on changer la valeur de a_0 pour faire en sorte que la suite (a_n) tende vers 0 ? vers 1/2 ?

Exercice 6. On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < x_n < 1$. Déterminer si (x_n) est croissante ou décroissante. Montrer que (x_n) converge.

Suites de Cauchy

Exercice 7. Montrer que la suite $(-1)^n$ n'est pas de Cauchy.

Exercice 8. Soit a_0 et a_1 deux nombres réels. On définit une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = \dfrac{a_n + a_{n+1}}{2}$.

(a) Faire un schéma des premiers termes sur la droite réelle, en se fixant a_0 et a_1.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_{n+1} - a_n| = \dfrac{|a_1 - a_0|}{2^n}$.

(c) Montrer que pour tout $n, p \in \mathbb{N}$, si $p \geq n+2$, alors a_p est entre a_n et a_{n+1}.

(d) En déduire que (a_n) est une suite de Cauchy, et qu'elle converge.

(e) (*) Calculer la limite de (a_n) en fonction de a_0 et a_1. [On pourra calculer $(a_{k+1} - a_k)$ en fonction de $(a_1 - a_0)$ et sommer ces égalités pour k de 0 à n.]

Exercice 9. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$.

(a) Montrer que (u_n) est croissante.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$.

(c) En déduire que (u_n) n'est pas une suite de Cauchy.

(d) En déduire que (u_n) tend vers $+\infty$.

Exercice 10.

(a) Soit $0 < a < 1$ un réel et (u_n) une suite vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - u_n| \leq a^n$. Montrer que (u_n) est une suite de Cauchy.

(b) La suite (u_n) est-elle de Cauchy si elle vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_{n+1} - u_n| \leq \dfrac{1}{n}$?

Exercice 11. Soit (u_n) une suite positive, décroissante, et tendant vers 0. On pose :

$$v_n = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \cdots + (-1)^n u_n.$$

(a) Soient p et k deux entiers. Montrer que $0 \leq u_p - u_{p+1} + u_{p+2} - \cdots + (-1)^k u_{p+k} \leq u_p$.

(b) En déduire que (v_n) est une suite de Cauchy, et conclure sur la convergence de (v_n).

Suites extraites et théorème de Bolzano-Weierstrass

Exercice 12. Montrer que si les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) d'une suite (u_n) convergent vers la même limite ℓ, alors (u_n) converge elle-même vers ℓ. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 13. Montrer en construisant des exemples appropriés que toutes les hypothèses dans le théorème de Bolzano-Weierstrass sont essentielles.

Exercice 14.

(a) Soit (u_n) une suite non majorée. Montrer que (u_n) possède une suite extraite qui tend vers $+\infty$.

(b) En utilisant le théorème de Bolzano-Weierstrass, montrer que de toute suite réelle on peut extraire une suite qui tend soit vers une limite finie, soit vers $+\infty$ ou $-\infty$.

(c) Est-il possible qu'une suite possède à la fois une suite extraite convergeant vers une limite finie, une tendant vers $+\infty$, et une tendant vers $-\infty$?

Exercice 15. Soit (u_n) une suite réelle. Les limites finies possibles des suites extraites de (u_n) sont appelées les valeurs d'adhérence de (u_n). Notons A l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n).

(a) Expliquer pourquoi si (u_n) converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$, alors $A = \{\ell\}$.

(b) Montrer que si (u_n) est bornée alors A est non vide.

(c) En général, A peut-il être vide ?

(d) Construire une suite qui a exactement deux valeurs d'adhérence.

(e) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Construire une suite qui a exactement p valeurs d'adhérence.

(f) (*) Construire une suite (u_n) telle que A contienne au moins tous les entiers naturels. [On pourra commencer par $0, 0, 1, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 3 \ldots$]

(g) (*) Construire une suite (u_n) telle que A contienne au moins tous les entiers relatifs. [On pourra adapter la construction précédente.]

(h) (*) Construire une suite (u_n) telle que A contienne au moins tous les nombres rationnels. [On pourra commencer par construire les rationnels positifs, et construire une suite en lisant les nombres rationnels sur les diagonales d'un tableau $(p/q)_{p\in\mathbb{N},\ q\in\mathbb{N}^*}$ donnant les rationnels avec répétitions.]

(i) (**) Soit (a_n) une suite d'élements de A. On suppose que a_n tend vers une limite finie ℓ. Montrer que $\ell \in A$.

(j) (*) Déduire de (h) et (i) l'existence de suites dont l'ensemble des valeurs d'adhérence est $\mathbb{R}$ entier.

Exercice 16. (*) Le but de cet exercice est de montrer que toute suite possède une suite extraite monotone. Soit (u_n) une suite quelconque. On définit

$$E = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall p > n, u_p < u_n\}.$$

(a) On suppose que E est infini. En utilisant les éléments de E, construire une suite extraite de (u_n) qui est strictement décroissante.

(b) On suppose maintenant que E est fini. Soit $N = \max(E)$. Montrer que si $n > N$, alors il existe $p > n$ tel que $u_p \geq u_n$. Construire ainsi une suite extraite de (u_n) qui est croissante.

(c) En déduire que (u_n) possède toujours une suite extraite monotone.

(d) En déduire une nouvelle démonstration du théorème de Bolzano-Weierstrass.