UQÀM **Session d'hiver 2013**
MAT1013 Vivien Ripoll
Analyse 1 (vivien.ripoll@lacim.ca)

Feuille d'exercices 6 : Séries numériques

Exercice 1.

(a) Pour quels réels x la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge-t-elle ? Dans ce cas, calculer sa somme en fonction de x.

(b) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Est-ce que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (an+b)$ converge ?

Exercice 2. Soient $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ deux séries.

(a) Montrer que si $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge, alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$ converge.

(b) Montrer que si $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge, alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$ diverge.

(c) A-t-on : $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge $\implies \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$ diverge ? (et si les deux séries sont à termes positifs ?)

Exercice 3. Donner la nature (convergence ou divergence) de la série $\sum a_n$ dans les cas suivants :

(a) $a_n = \dfrac{n}{\sqrt{n}+3}$

(b) $a_n = \dfrac{\frac{n^2}{100} + n + 2}{1 + 3n + n^2}$

(c) $a_n = \dfrac{3^n + 4^n}{5^n}$

(d) $a_n = \dfrac{3^n - 7^n}{5^n}$

(e) $a_n = \dfrac{n}{n+1} - \dfrac{n+1}{n+2}$

(f) $a_n = \frac{1}{n+3}$

(g) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

Exercice 4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Pour $n \geq 1$, on pose $a_n = u_n - u_{n-1}$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si et seulement si (u_n) a une limite finie. Si (u_n) tend vers $\ell \in \mathbb{R}$, que vaut $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$?

Exercice 5.

(a) Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ converge et calculer sa somme. [On pourra s'aider en calculant d'abord $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.]

(b) En utilisant une majoration, en déduire que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

(c) (*) Soit $p \in \mathbb{N}^*$ fixé. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+p)}$ converge et que sa somme vaut $\frac{1}{p}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{p}\right)$.

Exercice 6. Faire l'exercice 1.12 (p.57) des Notes de cours.

Séries à termes positifs

Exercice 7. Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ une série *à termes positifs* qui converge.

(a) Montrer que si (b_n) est une suite positive majorée, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ converge.

(b) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^p$ converge.

Exercice 8. Soient $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ deux séries *à termes positifs.* On suppose que toutes deux sont convergentes.

(a) Montrer que $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{a_n b_n}$ est convergente. [On pourra se rappeler de la formule $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$.]

(b) (*) Trouver un contre-exemple à cette propriété dans le cas où les deux séries ne sont pas à termes positifs.

Sur le nombre e

Exercice 9. [Une nouvelle construction du nombre e]

Soit $a_n = \frac{1}{n!}$. On a montré dans le devoir, que la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, et on a noté e sa somme. Soit u_n la suite des sommes partielles, i.e., $u_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$.

Pour $n \geq 0$, on pose $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$. On sait que (u_n) tend vers e ; le but de cet exercice est de montrer que (x_n) tend aussi vers e.

(a) En utilisant le binôme de Newton, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \leq x_{n+1}$. [On pourra comparer les deux sommes obtenues terme à terme, et utiliser l'inégalité $\frac{k}{n} \leq \frac{k+1}{n+1}$ pour $k \leq n$.]

(b) Toujours avec le binôme de Newton, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \leq u_n$. En déduire que x_n est majorée, puis convergente. On notera ℓ sa limite.

(c) Fixons $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $n \geq k$:

$$x_n \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!}\frac{n-1}{n} + \frac{1}{3!}\frac{(n-1)(n-2)}{n^2} + \cdots + \frac{1}{k!}\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{n^{k-1}}.$$

(d) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\ell \geq u_k$.

(e) Déduire des questions précédentes que $\ell = e$.

Exercice 10. On considère la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$.

(a) Trouver des réels a et b tels que pour tout $n \geq 2$, $\frac{n^2}{n!} = \frac{a}{(n-2)!} + \frac{b}{(n-1)!}$.

(b) En utilisant le fait que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$ (voir exercice précédent), montrer que notre série converge et calculer sa somme.

Écriture décimale

Exercice 11. [Validité de l'écriture décimale]
Soit une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de nombres entiers entre 0 et 9. Lorsqu'on écrit

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \ldots$$

cela signifie que $x = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$. Vérifier la validité de cette écriture, en montrant que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ converge. [On utilisera le fait que pour chaque n, $0 \leq a_n \leq 9$.]

Exercice 12. [Existence de l'écriture décimale pour les réels]
Le but de cet exercice est de montrer que pour tout nombre réel x, il existe un entier $p \in \mathbb{Z}$ et une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de nombres entiers entre 0 et 9 tels que $x = p, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \ldots$ (faire d'abord l'exercice précédent).

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un unique p dans $\mathbb{Z}$ tel que

$$p \leq x < p + 1.$$

Cet entier est appelé la *partie entière* de x, et généralement noté $E(x)$ ou $\lfloor x \rfloor$.

On fixe maintenant $x \in \mathbb{R}^+$. On pose $p = E(x)$, et $y = x - p$ (*partie décimale* de x). On construit deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de la façon suivante :

$$\begin{array}{ll}
a_1 = E(10y), & z_1 = \dfrac{a_1}{10} \\
a_2 = E(100(y - z_1)), & z_2 = z_1 + \dfrac{a_2}{100} \\
\vdots & \vdots \\
a_n = E(10^n(y - z_{n-1})), & z_n = z_{n-1} + \dfrac{a_n}{10^n} \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

(b) Calculer p, y et les premiers termes des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en prenant par exemple $x = \pi = 3,141592\ldots$. Comprendre que a_n doit être la n-ième décimale de y et z_n la troncature de y à n chiffres après la virgule.

(c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a (dans la construction ci-dessus) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a_n \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}\ , \quad z_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k}\ , \quad \text{et} \quad 0 \leq y - z_n < \frac{1}{10^n}.$$

[On pourra procéder par récurrence et montrer tout en même temps.]

(d) En déduire que z_n tend vers y et que x admet une écriture décimale qui est :

$$x = p, a_1a_2a_3\ldots a_n\ldots \quad ,\text{i.e.,} \quad x = p + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}.$$

(e) Montrer qu'une telle écriture n'est pas toujours unique. [On pourra vérifier par exemple que $0,99999999\ldots = 1,0000000\ldots$.]

Un peu de culture

Exercice 13. Regarder la (le) vidéo *Doodling in Math Class : Infinity Elephants* :
https ://www.khanacademy.org/math/vi-hart/v/doodling-in-math-class–infinity-elephants
(on peut activer des sous-titres anglais). Donner une façon géométrique de construire une série convergente.

Exercice 14. [Paradoxe de Zénon]
Un bandit armé d'un revolver menace un mathématicien, qui lui dit sereinement :
"Tire, je m'en moque : ta balle ne m'arrêtera jamais. Regarde bien : pour me toucher il faut bien qu'elle traverse la moitié de la distance qui nous sépare, puis encore la moitié de la moitié qui reste, puis la moitié du quart qui reste, etc... à l'infini : il lui restera toujours un trajet à parcourir et elle ne me touchera jamais."
Le bandit se met à réfléchir, et, contrit, laisse partir le mathématicien en regardant son arme d'un air malheureux.
Que pensez-vous du raisonnement du mathématicien ?

À propos de cette question, on pourra lire l'article Wikipedia *Paradoxe d'Achille et de la tortue*.