UQÀM
MAT1013
Analyse 1

Session d'hiver 2013
Vivien Ripoll
(vivien.ripoll@lacim.ca)

Feuille d'exercices 8 : Convergence et convergence absolue des séries

---

Exercice 1. Dans chacun des cas suivants, déterminer si la série $\sum a_n$ est absolument convergente, puis si elle est convergente.

(a) $a_n = \dfrac{2(-1)^n}{n\sqrt{n}}$

(b) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{10}}}$

(c) $a_n = \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$, pour $x \in \mathbb{R}$ fixé

(d) $a_n = \dfrac{\cos(nx)}{n\sqrt{n}}$, pour $x \in \mathbb{R}$ fixé

(e) $a_n = (-1)^n \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$

(f) $a_n = \dfrac{\sin(n\pi/2)}{1+\sqrt{n}}$

Exercice 2. Déterminer pour quelles valeurs de x la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ est absolument convergente, pour quelles valeurs elle est convergente, pour quelles valeurs elle est divergente.

Exercice 3. Montrer que le série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\pi/2)}{2^n}$ est convergente, et calculer sa somme.

Exercice 4. Soit $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ une série à signe alterné, i.e., $u_n = (-1)^n a_n$ avec (a_n) suite positive, décroissante, tendant vers 0. D'après le cours, $(\sum_{n=0}^{\infty} u_n)$ converge. On note S_n sa suite de sommes partielles, S sa somme totale, et $R_n = S - S_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ sa suite des restes.

(a) Rappeler pourquoi pour tout $p \in \mathbb{N}$, $S_{2p+1} \leq S \leq S_{2p}$.

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|R_n| \leq a_{n+1}$.

(c) On considère le cas $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$. On peut montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$. [voir exercice 8]
En utilisant (b), déterminer un $n \in \mathbb{N}$ tel que S_n soit une valeur approchée de $\ln(2)$ à 10^{-1} près ; calculer cette valeur approchée.

Exercice 5. On pose $\lambda = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (on peut en fait montrer que $\lambda = \frac{\pi^2}{6}$). Le but de cet exercice est de calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ en fonction de λ.

(a) Rappeler pourquoi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ converge.

(b) Montrer que $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(2p)^2} = \frac{\lambda}{4}$ et $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{3}{4}\lambda$.

(c) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ en fonction de λ.

(d) Montrer de manière similaire que pour tout entier $d \geq 2$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^d} = \left(1 - \frac{1}{2^{d-1}}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^d}$.

Exercice 6. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}$ est convergente. Est-elle absolument convergente ? En utilisant le fait que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$ (cf. exercice 8), montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)} = 2\ln(2) - 1.$$

Exercice 7. Soit $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ une série à termes quelconques. On définit (p_n) la suite extraite de (a_n) constituée des termes > 0, et (q_n) la suite extraite de (a_n) constituée des termes < 0. On note (s_n) la suite des sommes partielles de la série $(\sum p_n)$, et (t_n) la suite des sommes partielles de la série $(\sum q_n)$.

(a) Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $N', N'' \in \mathbb{N}$ tels que $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} |a_n| = s_{N'} - t_{N''}$. En déduire que si $(\sum p_n)$ et $(\sum q_n)$ sont convergentes, alors $(\sum a_n)$ est absolument convergente.

(b) Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel $s_N = \displaystyle\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N'}(|a_n| + a_n)$. En déduire que si $(\sum a_n)$ est absolument convergente, alors $(\sum p_n)$ est convergente, et $(\sum q_n)$ aussi.

(c) Déduire de (a) et (b) que : $(\sum a_n)$ est absolument convergente si et seulement si $(\sum p_n)$ et $(\sum q_n)$ sont convergentes, si et seulement si (s_n) est majorée et (t_n) est minorée.

(d) On suppose que $(\sum a_n)$ est convergente mais pas absolument convergente. Montrer que $(\sum p_n)$ et $(\sum q_n)$ sont alors toutes deux divergentes.

Exercice 8. (*) On admettra que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \alpha_n,$$

où γ est une constante (constante d'Euler) et (α_n) est une suite tendant vers 0 (ceci se montre en utilisant des comparaisons avec des intégrales). Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$.

Exercice 9. On considère la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, avec $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

(a) Rappeler pourquoi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est convergente mais pas absolument convergente.

Le but de l'exercice est de construire un réarrangement (b_n) de (a_n), tel que la suite des sommes partielles de $(\sum b_n)$ tende vers $+\infty$.

(b) Déterminer les suites extraites (p_n) et (q_n) de (a_n) définies dans l'exercice 7. Vérifier que $\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} p_k \right) = +\infty$

(c) Démontrer qu'il existe des entiers $N_0 < N_1 < \cdots < N_k < \ldots$ tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$(p_0 + \cdots + p_{N_0}) + q_0 + (p_{N_0+1} + \cdots + p_{N_1}) + q_1 + \cdots + q_{k-1} + (p_{N_{k-1}+1} + \cdots + p_{N_k}) \geq k.$$

(d) On définit la suite $(b_n) = (p_0, p_1, \ldots, p_{N_0}, q_0, p_{N_0+1}, \ldots, p_{N_1}, q_1, \ldots, q_{k-1}, p_{N_{k-1}+1}, \ldots, p_{N_k}, \ldots)$. Vérifier que (b_n) est bien un réarrangement de (a_n). Montrer que la suite des sommes partielles de $(\sum b_n)$ tend vers $+\infty$.

(e) (*) Montrer que l'on peut démontrer le même résultat pour tout série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ qui est convergente mais pas absolument convergente. Démontrer le résultat similaire en remplaçant $+\infty$ par $-\infty$.

Exercice 10. [Théorème de réarrangement de Riemann]

Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ une série convergente mais pas absolument convergente. Le but de l'exercice est de montrer la propriété suivante : pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un réarrangement $b_n = a_{\varphi(n)}$ tel que la série $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ soit convergente de somme x.

(a) On définit les suites (p_n) et (q_n) comme dans l'exercice 7. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} p_k \right) = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} q_k \right) = -\infty$. [On pourra utiliser l'exercice 7(d).]

(b) On suppose pour le moment que $x \geq 0$. Montrer qu'il existe $N_1 \in \mathbb{N}$, tel que $\sum_{n=0}^{N_1-1} p_n \leq x < \sum_{n=0}^{N_1} p_n$.

Si on pose $S_1 = \sum_{n=0}^{N_1} p_n$, montrer que $0 < S_1 - x \leq p_{N_1}$.

(c) Montrer qu'il existe $M_1 \in \mathbb{N}$, tel que $S_1 + \sum_{n=0}^{M_1} q_n < x \leq S_1 + \sum_{n=0}^{M_1-1} q_n$. Si on pose $T_1 = S_1 + \sum_{n=0}^{M_1} q_n$, montrer que $q_{M_1} \leq T_1 - x < 0$.

(d) (*) Montrer qu'on peut itérer le processus, et construire pour tout $k \in \mathbb{N}$ des entiers N_k, M_k et des sommes

$$S_k = T_{k-1} + \sum_{n=N_{k-1}+1}^{N_k} p_n \quad \text{et} \quad T_k = S_k + \sum_{n=M_{k-1}+1}^{M_k} p_n,$$

tels que $0 < S_k - x \leq p_{N_k}$ et $q_{M_k} \leq T_k - x < 0$. [On pourra s'aider en faisant un schéma sur la droite réelle avec x, S_1, T_1, S_2...]

(e) (*) On considère la suite $(b_n) = (p_0, \ldots, p_{N_1}, q_0, \ldots, q_{M_1}, p_{N_1+1}, \ldots, p_{N_2}, q_{M_1+1}, \ldots, q_{M_2}, \ldots)$, qui est un réarrangement de la suite (a_n). Notons (U_n) la suite des sommes partielles de la série $(\sum b_n)$. Comprendre pourquoi U_n croît jusqu'à S_1, puis décroît jusqu'à T_1, puis croît jusqu'à S_2, etc... Montrer que pour tout n, il existe un entier k_n tel que $T_{k_n} \leq U_n \leq S_{k_n}$ ou bien $T_{k_n} \leq U_n \leq S_{k_n+1}$, et que $\lim_{n\to+\infty} k_n = +\infty$. En déduire que $q_{M_{k_n}} \leq U_n - x \leq \max(p_{N_{k_n}}, p_{N_{k_n+1}})$.

(f) Rappeler pourquoi $\lim_{k\to+\infty} p_{N_k} = 0$ et $\lim_{k\to+\infty} q_{M_k} = 0$. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} U_n = x$, i.e., $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = x$.

(g) Expliquer pourquoi la méthode fonctionnerait aussi si $x \leq 0$.