UQÀM **Session d'hiver 2013**
MAT1013 Vivien Ripoll
Analyse 1 (vivien.ripoll@lacim.ca)

Feuille d'exercices 9 : Fonctions continues

Continuité, limites et prolongement par continuité

Exercice 1. Pour chacune des fonctions suivantes, donner l'ensemble des points en lesquels elle est continue (on pourra s'aider en traçant une esquisse du graphe).

(a) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ si $x \in \mathbb{R}^*$, $f(0) = 0$.

(b) $f(x) = \dfrac{|x| - x}{x}$ si $x \in \mathbb{R}^*$, $f(0) = 0$.

(c) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = E(x) + (x - E(x))^2$ (rappel : $E(x)$ désigne la partie entière de x)

(d) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = E(x) + \sqrt{x - E(x)}$

(e) $f(x) = x^2$ si $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = x$ sinon.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On définit la fonction $|f| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $x \mapsto |f(x)|$. Pour f, g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, on définit les fonctions suivantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$\max(f,g) : x \mapsto \max(f(x), g(x)) \quad \text{et} \quad \min(f,g) : x \mapsto \min(f(x), g(x)).$$

(a) Tracer les graphes de $\max(f,g)$ et de $\min(f,g)$ pour $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$.

(b) Dire pourquoi si f est continue sur $\mathbb{R}$, alors $|f|$ est continue sur $\mathbb{R}$. Est-ce que la réciproque est vraie ?

(c) Montrer que $\max(f,g) = \frac{f+g+|f-g|}{2}$ et $\min(f,g) = \frac{f+g-|f-g|}{2}$.

(d) En déduire que si f et g sont continues sur $\mathbb{R}$, alors $\max(f,g)$ et $\min(f,g)$ sont continues sur $\mathbb{R}$. (Est-ce que la réciproque est vraie ?)

Exercice 3. On rappelle que $E(x)$ est l'unique entier tel que $E(x) \leq x < E(x) + 1$.

(a) Montrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} E(\frac{1}{x}) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} E(\frac{1}{x}) = -\infty$.

(b) Montrer que $\lim\limits_{x \to 0} x E(\frac{1}{x}) = 1$. [Utiliser un encadrement]

(c) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} x E(\frac{1}{x})$.

Exercice 4. On définit $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$ pour $x \neq 2$. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 2 ?

Exercice 5. Pour chacune des fonctions suivantes, tracer une esquisse du graphe au voisinage de 0, et dire si elle est prolongeable par continuité en 0.

(a) $\begin{array}{rccl} f: &]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sin(\frac{1}{x}) \end{array}$

[On montrera que $\lim_{x\to 0} f(x)$ n'existe pas en construisant deux suites x_n et x'_n tendant vers 0 mais telles que leurs deux suites images ont des limites différentes.]

(b) $\begin{array}{rccl} g: &]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x\sin(\frac{1}{x}) \end{array}$

Exercice 6. Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ continue, et soit $x_0 \in]a,b[$, tel que $f(x_0) > 0$. Montrer qu'il existe un intervalle ouvert I centré en x_0, tel que $\forall x \in I, f(x) > 0$.

Exercice 7. Soient $f, g : [a,b[\to \mathbb{R}$. On suppose que $\lim_{x\to b} f(x) = 0$, et que g est bornée au voisinage de b. Montrer que $\lim_{x\to b} f(x)g(x) = 0$.

Exercice 8. Soit $f : D \to \mathbb{R}$. On suppose que f vérifie la condition suivante (f est dite *lipschitzienne*) :

$$\exists k \in \mathbb{R}, \forall x, y \in D, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

(a) Montrer qu'alors f est continue sur D.

(b) Montrer que c'est encore vrai si on remplace la condition par celle-ci (f est dite höldérienne) : $\exists \alpha \in]0,1], \exists k \in \mathbb{R}, \forall x, y \in D, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|^{\alpha}$.

Exercice 9. (une fonction pathologique)

On définit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par : $f(\frac{p}{q}) = \frac{1}{q}$ si p/q est un rationnel écrit sous forme irréductible ; et $f(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est exactement $\mathbb{Q}$.

[On pourra admettre (ou démontrer en exercice (*)) la propriété suivante : si $(\frac{p_n}{q_n})$ est une suite de rationnels tendant vers un irrationnel, alors $|q_n|$ tend vers $+\infty$.]

Densité et continuité

Exercice 10. On suppose que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et satisfait :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \alpha x$.

(a) On pose $\alpha = f(1)$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = \alpha n$.

(b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{Z}, f(n) = \alpha n$.

(c) Montrer que : $\forall p \in \mathbb{Z}, \forall q \in \mathbb{N}^*, f(\frac{p}{q}) = \alpha \frac{p}{q}$.

(d) Conclure en utilisant la densité de $\mathbb{Q}$.

Théorème des valeurs intermédiaires et théorème de la fonction réciproque

Exercice 11. (constructions)

(a) Soit I un intervalle quelconque. Construire une fonction continue $f :]0,1[\to I$ surjective (faire des esquisses, avec plusieurs cas selon la nature de I).

(b) Soit $I =]a,b[$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. Construire une fonction continue $f :]0,1[\to I$ bijective.

(c) Même question, mais avec $a = -\infty$ et/ou $b = +\infty$.

Exercice 12. (théorème du point fixe)
Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue. Montrer qu'il existe $x \in [0,1]$, tel que $f(x) = x$. [Faire un dessin ; trouver une bonne fonction à qui appliquer le T.V.I.]

Exercice 13. Montrer qu'il existe un nombre $x \in]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}[$ tel que $\cos(x) = \tan(x)$.

Exercice 14. Montrer que pour tout réel $r > 0$, il existe $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tel que $rx = \cos(x)$. Est-il unique ?

Exercice 15.

(a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, telle que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f est surjective.

(b) Soit $P(x)$ un polynôme de degré impair (i.e., de la forme $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_dx^d$, avec $a_d \neq 0$ et d impair). Montrer que P a au moins une racine réelle (i.e., il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $P(x) = 0$).

Exercice 16. Il n'y a qu'un chemin pour aller du village jusqu'au sommet de la colline, où se trouve le château. Albéric part du village lundi à 8h, et arrive au château avant la nuit. Il repart du château le mardi à 8h, et rentre au village. Montrer qu'il y a une heure précise de la journée à laquelle il a été exactement au même endroit du chemin le lundi et le mardi.

Exercice 17. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et périodique de période T, i.e. : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x)$. Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$, tel que $f(x_0) = f(x_0 + \frac{T}{2})$. [Appliquer le TVI à une fonction bien choisie]

Exercice 18. La fonction $f(x) = ax + b$ a-t-elle une fonction réciproque ? Si oui, quelle est-elle ?

Exercice 19. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Si n pair, montrer que la fonction $\sqrt[n]{\ }$ est bien définie sur $\mathbb{R}^+$, et qu'elle est continue sur $\mathbb{R}^+$.

(b) Si n impair, montrer que la fonction $\sqrt[n]{\ }$ est bien définie sur $\mathbb{R}$, et qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 20. (*) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, telle que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. Montrer que f possède un maximum. [On pourra essayer de se ramener à l'étude de f sur un segment.]

Exercice 21. (*) Soit $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction polynomiale. Montrer que $|P|$ atteint sa borne inférieure, i.e., qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$, tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|P(x)| \geq |P(x_0)|$.