UQÀM
MAT1013
Analyse 1

Session d'hiver 2013
Vivien Ripoll
(vivien.ripoll@lacim.ca)

Feuille d'exercices 1 : Ensembles, récurrence

Ensembles et applications

Exercice 1. Soient A et B deux ensembles. Montrer les deux équivalences suivantes :

(a) $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B$.

(b) $A \cap B = B \Leftrightarrow B \subseteq A$.

Exercice 2. Soient A, B, C trois ensembles. Montrer les deux égalités suivantes :

(a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

(b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Exercice 3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit l'ensemble $E_n = \{kn \mid k \in \mathbb{N}, k \geq 2\}$. On pose :

$$E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}, n \geq 2} E_n \text{ , et } X = \mathbb{N} \setminus E.$$

Soit P l'ensemble des nombres premiers. Montrer que $X = \{0, 1\} \cup P$.

Exercice 4. Pour chacune des applications suivantes, dire si elles sont injectives, surjectives, bijectives, et le démontrer.

(a) $\begin{array}{rcl} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & 3n+2. \end{array}$

(b) $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3+1. \end{array}$

(c) $\begin{array}{rcl}]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1/x. \end{array}$

(d) $\begin{array}{rcl} \{\text{étudiants de la classe}\} & \to & \{\text{lettres de l'alphabet}\} \\ x & \mapsto & \text{initiale du prénom de l'étudiant } x. \end{array}$

(e) $\begin{array}{rcl} \{\text{étudiants de l'UQÀM}\} & \to & \{\text{code de 4 lettres + 8 chiffres}\} \\ x & \mapsto & \text{code permanent UQÀM de l'étudiant } x. \end{array}$

Exercice 5. Donner des exemples (différents de ceux du cours et des autres exercices) d'une application

(a) surjective mais pas injective

(b) injective mais pas surjective

(c) ni injective ni surjective

Exercice 6. (Fonctions trigonométriques)

(a) La fonction $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est-elle surjective ? injective ?

(b) La fonction $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ est-elle surjective ? injective ?

(c) La fonction $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ est-elle surjective ? injective ?

(d) La fonction $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est-elle surjective ? injective ? Restreindre les intervalles de départ et d'arrivée pour qu'elle soit bijective.

Exercice 7. Soient $f : A \to B$ et $g : B \to C$ deux applications. On peut construire leur composée $g \circ f : A \to C$. Montrer :

(a) f et g injectives $\Rightarrow g \circ f$ injective.

(b) f et g surjectives $\Rightarrow g \circ f$ surjective.

(c) $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective.

(d) $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective.

(e) (*) Montrer que l'implication $g \circ f$ injective $\Rightarrow g$ injective est fausse (donner un contre-exemple).

(f) (*) Montrer que l'implication $g \circ f$ surjective $\Rightarrow f$ surjective est fausse (donner un contre-exemple).

Pour les trois exercices suivants, on rappelle que deux ensembles A et B sont dits en bijection s'il existe une application bijective entre A et B.

Exercice 8. Soient A et B deux ensembles. Montrer qu'il existe une application injective de A vers B si et seulement si A est en bijection avec un sous-ensemble de B.

Exercice 9. (*) (ensembles finis) Soient A, B, deux ensembles *finis*. On note $\operatorname{Card} A$ (resp. $\operatorname{Card} B$) le nombre d'éléments de A (resp. B).

(a) Montrer que A et B sont en bijection si et seulement si $\operatorname{Card} A = \operatorname{Card} B$.

(b) Montrer qu'il existe une application injective de A vers B si et seulement si $\operatorname{Card} A \leq \operatorname{Card} B$. En déduire qu'il existe au moins deux Montréalais avec le même nombre de cheveux.

(c) Montrer qu'il existe une application surjective de A vers B si et seulement si $\operatorname{Card} A \geq \operatorname{Card} B$.

(d) Montrer que si $f : A \to B$ est injective et que $\operatorname{Card} A \geq \operatorname{Card} B$, alors f est bijective.

(e) Montrer que si $g : A \to B$ est surjective et que $\operatorname{Card} A \leq \operatorname{Card} B$, alors g est bijective.

Exercice 10. (ensembles infinis)

(a) Montrer que $\mathbb{N}$ est en bijection avec $2\mathbb{N}$ (l'ensemble des entiers pairs).

(b) (*) Montrer que $\mathbb{N}$ est en bijection avec $\mathbb{Z}$.

Récurrence

Exercice 11. Démontrer par récurrence sur n les résultats suivants :

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n > n$.

(b) Pour tout $n \geq 1$, le produit de n entiers impairs est impair.

(c) Pour tout $n \geq 2$, $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + (n-1) \cdot n = \frac{1}{3}n(n-1)(n+1)$.

Exercice 12. Montrer par récurrence sur n les égalités suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Exercice 13. Soit $a > -1$ un nombre réel. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geq 1 + na$.

Exercice 14. (*) Montrer par récurrence sur n que tout ensemble à n éléments a exactement 2^n sous-ensembles.

Exercice 15. Déterminer (et prouver) pour quels entiers naturels on a : $2^n \leq n!$.

Exercice 16. En calculant les premiers termes, deviner une formule pour la somme $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)$, puis la démontrer par récurrence.

Exercice 17. Un étudiant de la classe affirme avoir montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 2$), étant donné n points du plan, ils sont toujours alignés. Ça semble un peu louche, voyons sa démonstration :

“ Le cas initial est évident : si $n = 2$, 2 points sont toujours alignés. Pour la transmission, supposons qu'on sache que n points sont toujours alignés. Soient alors $(n+1)$ points : $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$. Les points A_1 jusqu'à A_n sont un ensemble de n points donc d'après l'hypothèse de récurrence, ils sont alignés. Autrement dit, le point A_1 est sur la droite formée par les points A_2 à A_n. De même, les points A_2 jusqu'à A_{n+1} sont un ensemble de n points donc d'après l'hypothèse de récurrence, ils sont alignés. Donc le point A_{n+1} est sur la droite formée par les points A_2 à A_n. Alors les points A_1 à A_{n+1} sont tous sur la même droite, celle formée par les points A_2 à A_n. Les $(n+1)$ points sont alignés.”

Expliquer pourquoi ce raisonnement est faux.

Exercice 18. Montrer par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, 5^n est la somme de 1 et d'un multiple de 4. (Remarque : on peut aussi le montrer par d'autres méthodes)

Exercice 19. Montrer que si $x \neq 1$, alors $1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \dfrac{1 - x^n}{1 - x}$.

Exercice 20. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^3 + 5n$ est divisible par 6.

Exercice 21. Démontrer par récurrence la formule du binôme de Newton :

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

[On rappelle que $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. On pourra utiliser (en la démontrant) la formule du triangle de Pascal : $\displaystyle\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$.]

Exercice 22.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe des entiers naturels (dépendant de n) u_n et v_n tels que $(1+\sqrt{2})^n = u_n + v_n\sqrt{2}$. Donner u_{n+1} et v_{n+1} en fonction de u_n et v_n.

b) Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n^2 - 2v_n^2 = (-1)^n$.

Exercice 23.

On considère n droites dans le plan, telles qu'il n'y en ait pas deux parallèles ni trois concourantes (i.e. : chacune des droites coupe les $n-1$ autres en $n-1$ points distincts). On cherche une formule donnant le nombre R_n de régions du plan délimitées par ces n droites.

1) En faisant un dessin, calculer R_1, R_2, R_3, R_4.

2) Conjecturer une formule donnant R_n en fonction de R_{n-1}. La démontrer.

3) Conjecturer une formule donnant R_n en fonction de n. La démontrer.

UQÀM **Session d'hiver 2013**
MAT1013 Vivien Ripoll
Analyse 1 (vivien.ripoll@lacim.ca)

Feuille d'exercices 2 : Rationnels, majorants, bornes supérieures

---

Encore une récurrence !

Exercice 1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ (avec $k \leq n$), le *coefficient binomial*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

est un entier naturel. [On pourra utiliser (en la démontrant) la formule du triangle de Pascal : $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$.]

Remarque : cela peut se montrer par d'autres méthodes, par exemple on montre que $\binom{n}{k}$ compte le nombre de parties à k éléments dans un ensemble à n éléments.

Rationnels et irrationnels

Exercice 2. Dans cet exercice on utilisera simplement les axiomes de corps ordonné de $\mathbb{Q}$.

(a) Soient $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ tels que $a \geq b$, $c \geq d$. Montrer que $a + c \geq b + d$.

(b) Soient $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ tels que $a \geq b \geq 0$, $c \geq d \geq 0$. Montrer que $ac \geq bd$.

(c) Soient $a, b \in \mathbb{Q}$ tels que $a \geq b \geq 0$. Montrer que $a^2 \geq b^2$, puis que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a^n \geq b^n$.

Exercice 3.

(a) Est-ce que la somme de deux nombres irrationnels est toujours un nombre irrationnel ? Et pour le produit ?

(b) Montrer que : $x \notin \mathbb{Q}$, $y \in \mathbb{Q} \Rightarrow x + y \notin \mathbb{Q}$;

(c) Montrer que : $x \notin \mathbb{Q}$, $y \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \Rightarrow xy \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 4.

(a) Montrer que $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$.

(b) Montrer que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

(c) Montrer que $\sqrt{3} + \sqrt{7} \notin \mathbb{Q}$. [On pourra utiliser un raisonnement par l'absurde, calculer $(\sqrt{3} + \sqrt{7})(\sqrt{3} - \sqrt{7})$ et utiliser (b) et l'exercice précédent.]

(d) (*) Soit a un nombre premier. Montrer que $\sqrt{a} \notin \mathbb{Q}$.

(e) (**) Soit $a \in \mathbb{N}$ un nombre qui n'est pas le carré d'un entier. Montrer que $\sqrt{a} \notin \mathbb{Q}$.

(f) Soit $a, b \in \mathbb{N}$ des nombres qui ne sont pas carré d'un entier. Montrer que $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ et $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ sont irrationnels. [Utiliser (e).]

Exercice 5. En utilisant le fait que $\mathbb{Q}$ est archimédien, montrer que si $x, y, z \in \mathbb{Q}$ sont tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x \leq y \leq x + \frac{z}{n},$$

alors $x = y$.

Majorants, minorants, bornes supérieures et inférieures

Exercice 6. Soit $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\} \subseteq \mathbb{Q}$. La partie A est-elle majorée ? minorée ? Donner l'ensemble de ses majorants, l'ensemble de ses minorants. A a-t-elle un plus grand élément ? Un plus petit élément ?

Pour les exercices suivants, on rappelle les définitions du cours :

- La borne supérieure d'un ensemble X (notée $\sup(X)$) est le plus petit des majorants de X (s'il existe). Si elle appartient à X, on l'appelle le maximum de X (ou plus grand élément de X, noté $\max(X)$).
- La borne inférieure d'un ensemble X (notée $\inf(X)$) est le plus grand des minorants de X (s'il existe). Si elle appartient à X, on l'appelle le minimum de X (ou plus petit élément de X, noté $\min(X)$)

Exercice 7. On reprend l'ensemble A de l'exercice précédent. Donner la borne supérieure et la borne inférieure de A dans $\mathbb{Q}$ (si elles existent).

Exercice 8. Donner la borne supérieure et la borne inférieure dans $\mathbb{R}$ (si elles existent) des ensembles suivants, et préciser s'ils ont un maximum ou un minimum.

(a) $\{2 - \dfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$

(b) $\{2 + \dfrac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$

(c) $\{(-1)^n + \dfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$

(d) $\left\{\dfrac{3n}{3n+2} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$

(e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x + 1 \geq 0\}$

(f) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x - 1 \leq 0\}$

(g) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 > 9\}$

Exercice 9. Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble majoré et non vide. Montrer que $M = \sup A$ si et seulement si :

- M est un majorant de A ; **et**
- $\forall \epsilon > 0,\ \exists x \in A \mid x > M - \epsilon$.

Cette caractérisation est très pratique et pourra être utilisée dans les exercices suivants.

Exercice 10. Soient E et F des parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$, telles que $E \subseteq F$. Montrer que

$$\inf F \leq \inf E \leq \sup E \leq \sup F.$$

Exercice 11. Soit E une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. Montrer que l'intervalle $[\inf E, \sup E]$ est le plus petit intervalle fermé $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ tel que $E \subseteq [a, b]$.

Exercice 12. Soient A et B deux parties majorées de $\mathbb{R}$.

(a) Montrer que $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.

(b) Montrer avec un exemple qu'on n'a pas forcément $\sup(A \cap B) = \min(\sup A, \sup B)$. A-t-on $\sup(A \cap B) \leq \min(\sup A, \sup B)$?

(c) En supposant A et B minorées, énoncer les propriétés analogues pour $\inf(A \cup B)$ et $\inf(A \cap B)$.

Exercice 13. Soit A un ensemble non vide et majoré dans $\mathbb{R}$. Montrer que pour $\alpha \in \mathbb{R}$:

(a) $\sup\{\alpha + x \mid x \in A\} = \alpha + \sup A$.

(b) $\sup\{\alpha x \mid x \in A\} = \alpha \sup A$ si $\alpha \geq 0$. Que peut-on dire si $\alpha < 0$?

Exercice 14. (*) Soient A, B des parties non vides de $\mathbb{R}$. On définit

$$A + B = \{x \in \mathbb{R} \mid x = a + b \text{ pour } a \in A \text{ et } b \in B\}.$$

Si A et B sont majorées, a-t-on $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$? (justifier) Que vaut $\inf(A + B)$ lorsque A et B sont minorées ?

Exercice 15. Soit $A \subseteq \mathbb{R}$. On rappelle que $A^c = \mathbb{R} \setminus A$.

(a) Donner un exemple de A tel que A^c soit majoré ; minoré ; borné.

(b) Montrer que $\sup A^c$, s'il existe, est le plus petit $M \in \mathbb{R}$ tel que $A \supseteq \,]M, +\infty[$.

(c) Montrer qu'on ne peut pas avoir à la fois A et A^c majorés.

Densité

Dans les exercices suivants, on utilisera le théorème de densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$:

$$\forall a < b \in \mathbb{R}, \ \exists q \in \mathbb{Q} \mid a < q < b.$$

Exercice 16. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer la borne supérieure dans $\mathbb{R}$ de l'ensemble

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < \alpha\}.$$

Est-ce un maximum ? Mêmes questions pour l'ensemble $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq \alpha\}$.

Exercice 17. Montrer qu'entre deux réels distincts, il existe toujours une infinité de rationnels. [On pourra procéder par l'absurde.]

Exercice 18. Montrer que l'ensemble des nombres irrationnels est dense dans $\mathbb{R}$:

$$\forall a < b \in \mathbb{R}, \ \exists x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \mid a < x < b.$$

Exercice 19. (**) Soit $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres réels ayant un développement décimal qui se termine, i.e. :

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{a}{10^k} \mid a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Montrer que $\mathbb{D} \subsetneq \mathbb{Q}$ et que $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 20.

(a) (*) Déterminer bornes supérieures et inférieures, dans $\mathbb{R}$, de l'ensemble

$$X = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 + x - 1 \leq 0\}.$$

X a-t-il un maximum, un minimum ?

(b) (**) Soit P un polynôme de degré 2, et notons $X_P = \{x \in \mathbb{Q} \mid P(x) \leq 0\}$. Montrer que X_P est majoré si et seulement si X_P est minoré.

(c) (***) On suppose de plus que tous les coefficients de P sont rationnels. Montrer que X_P a un maximum si et seulement si X_P a un minimum.

UQÀM
MAT1013
Analyse 1

Session d'hiver 2013
Vivien Ripoll
(vivien.ripoll@lacim.ca)

Feuille d'exercices 3 : Valeur absolue, Suites, Limites

Valeur absolue

Exercice 1. Pour chacune des équations suivantes, la résoudre et dessiner sur l'axe des réels l'ensemble des solutions.

(a) $|x+5| \leq 2$

(b) $|3x-2| = 1$

(c) $|3x-2| < 1$

(d) $|3x-2| > 1$

(e) $|x+5| = |x+4|$

(f) $||x|-2| = 3$

(g) $|x-4| \leq |x+4|$

(h) $|2x^2 - 9x + \frac{5}{2}| < \frac{15}{2}$

Exercice 2. Tracer le graphe de la fonction $x \mapsto |x|$, puis celui de la fonction $x \mapsto |2x-3|$.

Exercice 3. Pour $x \geq 0$, on note $\sqrt{x}$ l'unique réel positif dont le carré est x. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $(\sqrt{x})^2 = x$, et que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $|y| = \sqrt{y^2}$.

Exercice 4. Montrer que pour $x, y \in \mathbb{R}$, $x^2 = y^2$ si et seulement si $|x| = |y|$. Que peut-on dire si $x^3 = y^3$?

Exercice 5. Montrer que pour $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\max\{a,b\} = \frac{a+b+|a-b|}{2} \quad \text{et} \quad \min\{a,b\} = \frac{a+b-|a-b|}{2}.$$

Segments emboîtés, suites et limites

Exercice 6. Pour chaque suite dont les premiers termes sont donnés ci-dessous, donner la description la plus plausible de la suite, soit avec une fonction explicite, soit avec une formule de récurrence, soit avec une description en français.

(a) 6, 3, 1.5, 0.75, 0.375 ...

(b) 1, 2, 9, 28, 65, ...

(c) 7, 4, 1, -2, -5, ...

(d) 1, -2, 4, -8, 16, ...

(e) 1, 4, 1, 4, 2, 1, 3, 5, ...

(f) 1, 4, 27, 256, 3125, ...

Le résultat de l'exercice ci-dessous pourra être utilisé dans les exercices suivants.

Exercice 7. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \frac{1}{n}$. Montrer en utilisant la notation ϵ que u_n converge vers 0. [On utilisera la propriété archimédienne de $\mathbb{R}$]

Exercice 8. Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{3n^2-2}{2n^2-1}$.

(a) Trouver un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > N$, $|u_n - \frac{3}{2}| < 0.001$.

(b) Montrer, en utilisant la notation ϵ, que la suite (u_n) converge vers $\frac{3}{2}$.

Exercice 9. Montrer, en utilisant la notation ϵ, que les suites suivantes tendent vers 0.

(a) $u_n = \dfrac{2}{n^2+3n+1}$

(b) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

(c) $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n+5}$

(d) $u_n = \dfrac{\cos n}{n}$

Exercice 10. Soit a et b deux réels fixés. On définit une suite (u_n) par $u_0 = b$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{a+u_n}{2}.$$

(a) Montrer par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - a = \dfrac{b-a}{2^n}$.

(b) Montrer que (u_n) est convergente, et donner sa limite.

Exercice 11. Pour chacune des propriétés suivantes, pensez-vous qu'elle soit vraie ou fausse ? Si on la pense fausse, on fournira un contre-exemple.

(a) Si (u_n) est une suite convergente, alors elle est bornée.

(b) Si (u_n) est bornée, alors elle est convergente.

(c) Si (u_n) est convergente, alors elle est décroissante.

(d) si (u_n) est croissante, alors elle est convergente.

(e) si (u_n) est croissante, alors elle est divergente.

(f) si (u_n) est croissante et majorée, alors elle est convergente.

(g) si (u_n) est croissante, alors elle est minorée.

(h) si (u_n) tend vers 0, alors $(1/u_n)$ tend vers $+\infty$ ou bien vers $-\infty$.

(i) si (u_n) et (v_n) sont divergentes, alors $(u_n + v_n)$ est divergente.

(j) si (u_n) et (v_n) sont convergentes, alors $(u_n + v_n)$ et $(u_n v_n)$ sont convergentes.

(k) si $(u_n + v_n)$ et $(u_n v_n)$ sont convergentes, alors (u_n) et (v_n) sont convergentes.

Exercice 12. Somme de deux suites.

(a) Soit (a_n) et (b_n) deux suites telles que (a_n) converge vers ℓ et (b_n) vers ℓ'. Montrer, en utilisant la notation ϵ, que la suite $(a_n + b_n)$ est convergente et que sa limite est $\ell + \ell'$.

(b) En déduire que la somme d'une suite convergente et d'une suite divergente est divergente.

Exercice 13. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \left[\dfrac{2n-3}{n}, \dfrac{2n+1}{n}\right]$. Montrer que $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} I_n = \{2\}$.

Exercice 14. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \left[n, n + \dfrac{3}{n}\right]$. Que vaut $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} I_n$?

Exercice 15. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \left[\dfrac{4n-2}{n}, \dfrac{5n+2}{n}\right]$. Est-ce que $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} I_n$ est un singleton ? Est-il non vide ? (*) Le calculer.

Exercice 16. Soit $\{I_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ une suite de segments emboîtés. On pose $I_n = [a_n, b_n]$. D'après le principe des segments emboîtés, $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ est un singleton $\{u\}$. Montrer que $u = \inf\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
[On pourra s'inspirer de la démonstration du cours]

Exercice 17. (*) Soit $\{I_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ une suite de segments emboîtés de $\mathbb{R}$. On rappelle que $\ell(I_n)$ tend vers 0 par définition, et que le principe des segments emboîtés affirme que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ est un singleton $\{u\}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = [a_n, b_n]$. Montrer, en utilisant la notation ϵ, que a_n et b_n convergent toutes deux vers u.

UQÀM **Session d'hiver 2013**
MAT1013 Vivien Ripoll
Analyse 1 (vivien.ripoll@lacim.ca)

Feuille d'exercices 4 : Limites de suites, comparaisons et opérations

---

Exercice 1. Donner la limite des suites suivantes (si elle existe ; sinon on démontrera qu'elle n'existe pas).

(a) $a_n = \dfrac{3n+1+2n^2}{6n^3-2}$ (c) $c_n = \dfrac{3n+1+2n^2}{6n-2}$

(b) $b_n = \dfrac{3n+1+2n^2}{6n^2-2}$ (d) $d_n = \dfrac{2(-1)^n n^2+3n+1}{6n^2-2}$

Exercice 2. Soit $P(n)$ un polynôme en n de degré p, $Q(n)$ un polynôme en n de degré q, c'est-à-dire : $P(n) = an^p$+des termes de degrés $< p$, et $Q(n) = bn^q$+ des termes de degrés $< q$, où a et b sont des constantes, appelées coefficient dominant de P (resp., de Q).

Soit $u_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$. Déterminer $\lim(u_n)$ selon les valeurs de p, q, a et b.

Exercice 3. Déterminer la limite des suites suivantes (si elle existe ; sinon on démontrera qu'elle n'existe pas). [On pourra utiliser les opérations sur les limites, les comparaisons, et le fait que $(\frac{1}{n}) \to 0$].

(a) $\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$

(b) $\dfrac{3-5n+6n^2}{6-5n+3n^2}$

(c) $\dfrac{\sqrt{2n+7n^2+4}}{5n-3}$

(d) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

(e) $\sqrt{n^2+1}-n$

(f) $\sqrt{n^2+n}-n$

(g) $\dfrac{\cos(3n)+2\sin(5n)}{n}$

(h) $\dfrac{n+\sqrt{n}-7}{3n+2}$

(i) $\dfrac{n+(-1)^n\sqrt{n}-7}{3n+2}$

(j) $\dfrac{(-1)^n n+\sqrt{n}-7}{3n+2}$

Exercice 4. Soit (u_n) et (v_n) deux suites strictement positives, avec $(u_n) \to 0$ et $(v_n) \to +\infty$. On pose $w_n = u_n v_n$. On se demande quelle est la limite de w_n. À l'aide d'exemples, montrer que chacune des situations suivantes peut arriver :

(a) $(w_n) \to 0$.

(b) $(w_n) \to +\infty$.

(c) $(w_n) \to a$, pour $a > 0$ quelconque.

(d) (w_n) n'a pas de limite (même $+\infty$).

Exercice 5. Déterminer la limite des suites suivantes.

(a) $\dfrac{n^n}{n!}$

(b) $\dfrac{1+2+3+\dots n}{n^2}$

(c) $\dfrac{1^2+2^2+3^2+\dots+n^2}{n^3}$

(d) (**) $\dfrac{1^k+2^k+3^k+\dots+n^k}{n^{k+1}}$ (pour $k \in \mathbb{N}$)

Pour l'exercice suivant, on pourra utiliser le fait que pour $\alpha \geq 0$, $\lim(\alpha^n) = 0$, 1, ou $+\infty$ selon si $\alpha < 1$, $= 1$ ou > 1.

Exercice 6. Soient $a, b > 0$. Selon les valeurs de a et b, déterminer la limite de $\dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$.

Exercice 7. On rappelle l'inégalité de Bernouilli : pour tout $x > -1$, $(1+x)^n \geq 1 + nx$.
Pour $a > 0$, on appelle racine n-ième de a (notée $\sqrt[n]{a}$ ou $a^{\frac{1}{n}}$) l'unique réel b positif tel que $b^n = a$.
Soit a un réel ≥ 1 ; l'objet de l'exercice est de montrer que la suite $(a^{\frac{1}{n}})$ tend vers 1.

(a) Montrer que si $a > 1$, alors $a^{\frac{1}{n}} \geq 1$

(b) On pose $h_n = a^{\frac{1}{n}} - 1$, de sorte que $a^{\frac{1}{n}} = 1 + h_n$. Montrer en utilisant l'inégalité de Bernouilli que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq h_n \leq \dfrac{a-1}{n}$.

(c) En déduire que $(h_n) \to 0$, et conclure.

(d) Montrer que si $a \in]0, 1[$, on a aussi $(a^{\frac{1}{n}}) \to 1$.

Pour les deux exercices suivants, on utilisera la définition mathématique des limites. Certaines des propriétés ont été énoncées en cours sans démonstration et sont utiles en pratique pour calculer des limites.

Exercice 8. Démontrer les énoncés suivants :

(a) Si (u_n) est bornée et $(v_n) \to 0$, alors $(u_n v_n) \to 0$. (est-ce vrai si on remplace 0 par une autre limite réelle ?)

(b) Si $u_n \leq v_n$ et avec $(u_n) \to +\infty$, alors $(v_n) \to +\infty$.

(c) Si $(u_n) \to +\infty$ et $a > 0$, alors $(a u_n) \to +\infty$.

(d) Si $(u_n) \to \ell$, avec $\ell > 0$, et $(v_n) \to +\infty$, alors $(u_n v_n) \to +\infty$.

(e) Si (u_n) est bornée et $(v_n) \to +\infty$, alors $(u_n + v_n) \to +\infty$.

Exercice 9. Soit (u_n) une suite convergeant vers un réel ℓ.

(a) Montrer (sans utiliser le théorème de comparaison du cours) que si $u_n \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\ell \leq M$.

(b) Si $u_n < M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, a-t-on forcément $\ell < M$?

Pour l'exercice suivant, on rappelle un théorème du cours : si (u_n) est une suite croissante majorée, alors elle converge.

Exercice 10. On définit la suite (u_n) par :

$$u_0 = 1, \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}.$$

(a) À la calculatrice ou à l'ordinateur, calculer les 5 (ou plus) premiers termes de la suite, et observer le comportement.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$ (par exemple par récurrence).

(c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 2$.

(d) En déduire que (u_n) est convergente.

(e) Montrer que sa limite est $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

N.B. : Pour pratiquer, on pourra trouver d'autres exercices du même type que le 10 (suite récurrente) dans la feuille 6 de C. Reutenauer (voir page web), exercices 1, 6, 7, 8.

Exercice 11. Soit (u_n) une suite à termes positifs, qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. On cherche à démontrer que $\left(\sqrt{u_n}\right) \to \sqrt{\ell}$.

(a) Supposons $\ell = 0$. Montrer (avec la notation ϵ) que $\left(\sqrt{u_n}\right) \to 0$.

(b) Supposons $\ell \neq 0$. Montrer que $\left|\sqrt{u_n} - \sqrt{\ell}\right| \leq \dfrac{|u_n - l|}{\sqrt{\ell}}$. Conclure.

(c) Soit v_n une suite quelconque, telle que (v_n^2) tende vers un réel a. Peut-on en déduire que (v_n) tend vers $\sqrt{a}$? Ou vers $-\sqrt{a}$? Que peut-on dire si $a = 0$?

Exercice 12. Soit (u_n) une suite.

(a) On suppose que (u_n) n'est pas majorée. Est-elle alors forcément croissante ?

(b) (*) Montrer que si (u_n) n'est pas majorée, alors elle admet une suite extraite croissante.

(c) La réciproque de (b) est-elle vraie ?

Exercice 13. (*) Soit (u_n) une suite. Montrer que (u_n) n'est pas majorée si et seulement si (u_n) a une suite extraite tendant vers $+\infty$.

UQÀM **Session d'hiver 2013**
MAT1013 Vivien Ripoll
Analyse 1 (vivien.ripoll@lacim.ca)

Feuille d'exercices 5 : Suites monotones, suites de Cauchy, suites bornées

---

Complément : un critère utile

Exercice 1.
Soit (u_n) une suite jamais nulle, et telle que $\lim \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \ell \in \mathbb{R}$.

(a) On suppose que $\ell < 1$. Montrer qu'alors (u_n) tend vers 0. [On pourra montrer 1) qu'il existe $0 < r < 1$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leq r$, puis 2) que pour $n \geq N$, $|u_n| \leq r^{n-N}|u_N|$.]

(b) On suppose que $\ell > 1$. Montrer qu'alors $(|u_n|)$ tend vers $+\infty$. [On pourra montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $R > 1$ tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n| \geq R^{n-N}|u_N|$.]

(c) Si $\ell = 1$, montrer par des exemples que (u_n) peut soit converger vers une limite finie, soit tendre vers $+\infty$ ou $-\infty$, soit ne pas avoir de limite.

Exercice 2. Utiliser l'exercice précédent pour étudier la convergence des suites suivantes :

(a) (a^n/n^p), avec $a \in \mathbb{R}^+$ et $p \in \mathbb{N}$.

(b) $(a^n/n!)$, avec $a \in \mathbb{R}^+$.

(c) $\dbinom{2n}{n} = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$.

Suites monotones

Exercice 3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite croissante. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}.$$

Montrer que la suite (v_n) est croissante.

Exercice 4. On définit une suite (a_n) en posant $a_0 = 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$. Calculer les premiers termes, montrer qu'elle est majorée par 2, puis qu'elle est croissante, en déduire qu'elle converge, et calculer sa limite.

Exercice 5. On définit une suite (a_n) en posant $a_0 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 2a_n^2$.

(a) Montrer que si (a_n) converge, alors sa limite est 0 ou 1/2.

(b) La suite (a_n) converge-t-elle ?

(c) Peut-on changer la valeur de a_0 pour faire en sorte que la suite (a_n) tende vers 0 ? vers 1/2 ?

Exercice 6. On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < x_n < 1$. Déterminer si (x_n) est croissante ou décroissante. Montrer que (x_n) converge.

Suites de Cauchy

Exercice 7. Montrer que la suite $(-1)^n$ n'est pas de Cauchy.

Exercice 8. Soit a_0 et a_1 deux nombres réels. On définit une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = \dfrac{a_n + a_{n+1}}{2}$.

(a) Faire un schéma des premiers termes sur la droite réelle, en se fixant a_0 et a_1.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_{n+1} - a_n| = \dfrac{|a_1 - a_0|}{2^n}$.

(c) Montrer que pour tout $n, p \in \mathbb{N}$, si $p \geq n+2$, alors a_p est entre a_n et a_{n+1}.

(d) En déduire que (a_n) est une suite de Cauchy, et qu'elle converge.

(e) (*) Calculer la limite de (a_n) en fonction de a_0 et a_1. [On pourra calculer $(a_{k+1} - a_k)$ en fonction de $(a_1 - a_0)$ et sommer ces égalités pour k de 0 à n.]

Exercice 9. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$.

(a) Montrer que (u_n) est croissante.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$.

(c) En déduire que (u_n) n'est pas une suite de Cauchy.

(d) En déduire que (u_n) tend vers $+\infty$.

Exercice 10.

(a) Soit $0 < a < 1$ un réel et (u_n) une suite vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - u_n| \leq a^n$. Montrer que (u_n) est une suite de Cauchy.

(b) La suite (u_n) est-elle de Cauchy si elle vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_{n+1} - u_n| \leq \dfrac{1}{n}$?

Exercice 11. Soit (u_n) une suite positive, décroissante, et tendant vers 0. On pose :

$$v_n = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \cdots + (-1)^n u_n.$$

(a) Soient p et k deux entiers. Montrer que $0 \leq u_p - u_{p+1} + u_{p+2} - \cdots + (-1)^k u_{p+k} \leq u_p$.

(b) En déduire que (v_n) est une suite de Cauchy, et conclure sur la convergence de (v_n).

Suites extraites et théorème de Bolzano-Weierstrass

Exercice 12. Montrer que si les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) d'une suite (u_n) convergent vers la même limite ℓ, alors (u_n) converge elle-même vers ℓ. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 13. Montrer en construisant des exemples appropriés que toutes les hypothèses dans le théorème de Bolzano-Weierstrass sont essentielles.

Exercice 14.

(a) Soit (u_n) une suite non majorée. Montrer que (u_n) possède une suite extraite qui tend vers $+\infty$.

(b) En utilisant le théorème de Bolzano-Weierstrass, montrer que de toute suite réelle on peut extraire une suite qui tend soit vers une limite finie, soit vers $+\infty$ ou $-\infty$.

(c) Est-il possible qu'une suite possède à la fois une suite extraite convergeant vers une limite finie, une tendant vers $+\infty$, et une tendant vers $-\infty$?

Exercice 15. Soit (u_n) une suite réelle. Les limites finies possibles des suites extraites de (u_n) sont appelées les valeurs d'adhérence de (u_n). Notons A l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n).

(a) Expliquer pourquoi si (u_n) converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$, alors $A = \{\ell\}$.

(b) Montrer que si (u_n) est bornée alors A est non vide.

(c) En général, A peut-il être vide ?

(d) Construire une suite qui a exactement deux valeurs d'adhérence.

(e) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Construire une suite qui a exactement p valeurs d'adhérence.

(f) (*) Construire une suite (u_n) telle que A contienne au moins tous les entiers naturels. [On pourra commencer par $0, 0, 1, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 3 \ldots$]

(g) (*) Construire une suite (u_n) telle que A contienne au moins tous les entiers relatifs. [On pourra adapter la construction précédente.]

(h) (*) Construire une suite (u_n) telle que A contienne au moins tous les nombres rationnels. [On pourra commencer par construire les rationnels positifs, et construire une suite en lisant les nombres rationnels sur les diagonales d'un tableau $(p/q)_{p\in\mathbb{N},\ q\in\mathbb{N}^*}$ donnant les rationnels avec répétitions.]

(i) (**) Soit (a_n) une suite d'élements de A. On suppose que a_n tend vers une limite finie ℓ. Montrer que $\ell \in A$.

(j) (*) Déduire de (h) et (i) l'existence de suites dont l'ensemble des valeurs d'adhérence est $\mathbb{R}$ entier.

Exercice 16. (*) Le but de cet exercice est de montrer que toute suite possède une suite extraite monotone. Soit (u_n) une suite quelconque. On définit

$$E = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall p > n, u_p < u_n\}.$$

(a) On suppose que E est infini. En utilisant les éléments de E, construire une suite extraite de (u_n) qui est strictement décroissante.

(b) On suppose maintenant que E est fini. Soit $N = \max(E)$. Montrer que si $n > N$, alors il existe $p > n$ tel que $u_p \geq u_n$. Construire ainsi une suite extraite de (u_n) qui est croissante.

(c) En déduire que (u_n) possède toujours une suite extraite monotone.

(d) En déduire une nouvelle démonstration du théorème de Bolzano-Weierstrass.

UQÀM
MAT1013
Analyse 1

Session d'hiver 2013
Vivien Ripoll
(vivien.ripoll@lacim.ca)

Feuille d'exercices 6 : Séries numériques

Exercice 1.

(a) Pour quels réels x la série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge-t-elle ? Dans ce cas, calculer sa somme en fonction de x.

(b) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Est-ce que la série $\sum_{n=0}^{\infty} (an+b)$ converge ?

Exercice 2. Soient $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ deux séries.

(a) Montrer que si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge, alors $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$ converge.

(b) Montrer que si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge, alors $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$ diverge.

(c) A-t-on : $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge $\Longrightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$ diverge ? (et si les deux séries sont à termes positifs ?)

Exercice 3. Donner la nature (convergence ou divergence) de la série $\sum a_n$ dans les cas suivants :

(a) $a_n = \dfrac{n}{\sqrt{n}+3}$

(b) $a_n = \dfrac{\frac{n^2}{100} + n + 2}{1 + 3n + n^2}$

(c) $a_n = \dfrac{3^n + 4^n}{5^n}$

(d) $a_n = \dfrac{3^n - 7^n}{5^n}$

(e) $a_n = \dfrac{n}{n+1} - \dfrac{n+1}{n+2}$

(f) $a_n = \frac{1}{n+3}$

(g) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

Exercice 4. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Pour $n \geq 1$, on pose $a_n = u_n - u_{n-1}$. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si et seulement si (u_n) a une limite finie. Si (u_n) tend vers $\ell \in \mathbb{R}$, que vaut $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$?

Exercice 5.

(a) Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ converge et calculer sa somme. [On pourra s'aider en calculant d'abord $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.]

(b) En utilisant une majoration, en déduire que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

(c) (*) Soit $p \in \mathbb{N}^*$ fixé. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+p)}$ converge et que sa somme vaut $\frac{1}{p}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{p}\right)$.

Exercice 6. Faire l'exercice 1.12 (p.57) des Notes de cours.

Séries à termes positifs

Exercice 7. Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ une série *à termes positifs* qui converge.

(a) Montrer que si (b_n) est une suite positive majorée, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ converge.

(b) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^p$ converge.

Exercice 8. Soient $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ deux séries *à termes positifs*. On suppose que toutes deux sont convergentes.

(a) Montrer que $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{a_n b_n}$ est convergente. [On pourra se rappeler de la formule $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$.]

(b) (*) Trouver un contre-exemple à cette propriété dans le cas où les deux séries ne sont pas à termes positifs.

Sur le nombre e

Exercice 9. [Une nouvelle construction du nombre e]

Soit $a_n = \frac{1}{n!}$. On a montré dans le devoir, que la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, et on a noté e sa somme. Soit u_n la suite des sommes partielles, i.e., $u_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$.

Pour $n \geq 0$, on pose $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$. On sait que (u_n) tend vers e ; le but de cet exercice est de montrer que (x_n) tend aussi vers e.

(a) En utilisant le binôme de Newton, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \leq x_{n+1}$. [On pourra comparer les deux sommes obtenues terme à terme, et utiliser l'inégalité $\frac{k}{n} \leq \frac{k+1}{n+1}$ pour $k \leq n$.]

(b) Toujours avec le binôme de Newton, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \leq u_n$. En déduire que x_n est majorée, puis convergente. On notera ℓ sa limite.

(c) Fixons $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $n \geq k$:

$$x_n \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!}\frac{n-1}{n} + \frac{1}{3!}\frac{(n-1)(n-2)}{n^2} + \cdots + \frac{1}{k!}\frac{(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{n^{k-1}}.$$

(d) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\ell \geq u_k$.

(e) Déduire des questions précédentes que $\ell = e$.

Exercice 10. On considère la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$.

(a) Trouver des réels a et b tels que pour tout $n \geq 2$, $\frac{n^2}{n!} = \frac{a}{(n-2)!} + \frac{b}{(n-1)!}$.

(b) En utilisant le fait que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$ (voir exercice précédent), montrer que notre série converge et calculer sa somme.

Écriture décimale

Exercice 11. [Validité de l'écriture décimale]
Soit une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de nombres entiers entre 0 et 9. Lorsqu'on écrit

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots$$

cela signifie que $x = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$. Vérifier la validité de cette écriture, en montrant que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ converge. [On utilisera le fait que pour chaque n, $0 \leq a_n \leq 9$.]

Exercice 12. [Existence de l'écriture décimale pour les réels]
Le but de cet exercice est de montrer que pour tout nombre réel x, il existe un entier $p \in \mathbb{Z}$ et une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de nombres entiers entre 0 et 9 tels que $x = p, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots$ (faire d'abord l'exercice précédent).

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un unique p dans $\mathbb{Z}$ tel que

$$p \leq x < p + 1.$$

Cet entier est appelé la *partie entière* de x, et généralement noté $E(x)$ ou $\lfloor x \rfloor$.

On fixe maintenant $x \in \mathbb{R}^+$. On pose $p = E(x)$, et $y = x - p$ (*partie décimale* de x). On construit deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de la façon suivante :

$$\begin{array}{ll} a_1 = E(10y), & z_1 = \dfrac{a_1}{10} \\ a_2 = E(100(y - z_1)), & z_2 = z_1 + \dfrac{a_2}{100} \\ \vdots & \vdots \\ a_n = E(10^n(y - z_{n-1})), & z_n = z_{n-1} + \dfrac{a_n}{10^n} \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

(b) Calculer p, y et les premiers termes des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en prenant par exemple $x = \pi = 3,141592\ldots$. Comprendre que a_n doit être la n-ième décimale de y et z_n la troncature de y à n chiffres après la virgule.

(c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a (dans la construction ci-dessus) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a_n \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}\ , \quad z_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k}\ , \quad \text{et} \quad 0 \leq y - z_n < \frac{1}{10^n}.$$

[On pourra procéder par récurrence et montrer tout en même temps.]

(d) En déduire que z_n tend vers y et que x admet une écriture décimale qui est :

$$x = p, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \ldots \quad \text{,i.e.,} \quad x = p + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}.$$

(e) Montrer qu'une telle écriture n'est pas toujours unique. [On pourra vérifier par exemple que $0,99999999\ldots = 1,0000000\ldots$.]

Un peu de culture

Exercice 13. Regarder la (le) vidéo *Doodling in Math Class : Infinity Elephants* :
https ://www.khanacademy.org/math/vi-hart/v/doodling-in-math-class–infinity-elephants
(on peut activer des sous-titres anglais). Donner une façon géométrique de construire une série convergente.

Exercice 14. [Paradoxe de Zénon]
Un bandit armé d'un revolver menace un mathématicien, qui lui dit sereinement :
"Tire, je m'en moque : ta balle ne m'arrêtera jamais. Regarde bien : pour me toucher il faut bien qu'elle traverse la moitié de la distance qui nous sépare, puis encore la moitié de la moitié qui reste, puis la moitié du quart qui reste, etc... à l'infini : il lui restera toujours un trajet à parcourir et elle ne me touchera jamais."
Le bandit se met à réfléchir, et, contrit, laisse partir le mathématicien en regardant son arme d'un air malheureux.
Que pensez-vous du raisonnement du mathématicien ?

À propos de cette question, on pourra lire l'article Wikipedia *Paradoxe d'Achille et de la tortue*.

UQÀM **Session d'hiver 2013**
MAT1013 Vivien Ripoll
Analyse 1 (vivien.ripoll@lacim.ca)

Feuille d'exercices 7 : Séries, tests de convergence

Quelques compléments de cours

Exercice 1. [Compléments au test du quotient de D'Alembert]
Soit (a_n) une suite strictement positive.

(a) On suppose que $\lim \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \ell > 1$. Montrer qu'à partir d'un certain rang, la suite (a_n) est croissante. En déduire que la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.

(b) On suppose que $\lim \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = 1$, mais que le quotient $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ est toujours ≥ 1. Montrer que la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.

(c) On suppose que $\lim \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = 1$, mais que le quotient $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ est toujours ≤ 1. Montrer, avec des exemples, que dans ce cas on peut avoir convergence ou divergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.
[On pourra utiliser le résultat de l'exercice 4.]

Exercice 2. Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ une série à termes positifs, notons (S_n) la suite de ses sommes partielles. Montrer que si (S_n) a une suite extraite qui a une limite finie, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

Exercice 3. [Critère de condensation de Cauchy]
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite positive et décroissante. Le but de cet exercice est de montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge} \iff \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} \text{ converge.}$$

(a) On note S_n la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, et on pose, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$u_k = a_{2^k} + a_{2^k+1} + \cdots + a_{2^{k+1}-1}.$$

Montrer que $S_{2^{n+1}-1} = u_0 + u_1 + \ldots u_n$ et que pour $k \in \mathbb{N}$, $2^k a_{2^{k+1}} \leq u_k \leq 2^k a_{2^k}$.

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1} 2^k a_{2^k} \leq S_{2^{n+1}-1} \leq \sum_{k=0}^{n} 2^k a_{2^k}.$$

(c) Conclure sur l'équivalence demandée.

Exercice 4. [Séries de Riemann]
Soit α un réel quelconque. Cet exercice vise à démontrer le théorème du cours :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge} \Longleftrightarrow \alpha > 1.$$

(a) Montrer, en utilisant une comparaison, que si $\alpha \leq 1$, alors $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.

(b) On pose $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$, et $b_n = 2^n a_{2^n}$. Montrer que si $\alpha > 1$, alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge.

(c) Conclure en utilisant le critère de condensation de Cauchy vu dans l'exercice précédent.

Exercice 5. Soient $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ deux séries à termes strictement positifs. On suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geq N$, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$.

(a) Montrer que pour tout $p \geq 1$, $\dfrac{a_{N+p}}{a_N} \leq \dfrac{b_{N+p}}{b_N}$. En déduire que pour tout $n > N$, $a_n \leq \dfrac{a_N}{b_N} b_n$.

(b) Montrer que si $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge, alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, et que si $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge, alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge.

(c) Soit (u_n) une suite telle que, à partir d'un certain rang, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^\alpha$, avec $\alpha > 1$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge.

Exercice 6. (*) [Transformation d'Abel]
Soit $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ une série quelconque, on note S_n sa suite de sommes partielles, et on suppose que S_n est bornée. Soit h_n une suite décroissante et tendant vers 0. Le but de cet exercice est de montrer qu'alors, la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n h_n$ converge.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $p \geq 1$,

$$u_{n+1}h_{n+1} + \cdots + u_{n+p}h_{n+p} = h_{n+p}S_{n+p} - h_{n+1}S_n + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (h_k - h_{k+1})S_k.$$

[On pourra écrire, pour $k \in \{n+1, \ldots, n+p\}$, $u_k = S_k - S_{k-1}$.]

(b) On note M un réel tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|S_n| \leq M$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $p \geq 1$, $|u_{n+1}h_{n+1} + \cdots + u_{n+p}h_{n+p}| \leq 2Mh_{n+1}$.

(c) En déduire, en utilisant le critère de Cauchy, que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n h_n$ converge.

(d) Soit $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ une série convergente, et (b_n) une suite décroissante minorée. En utilisant le résultat précédent, montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ converge.

Exercices d'application

Exercice 7. Déterminer la nature (convergente, divergente) de la série $\sum a_n$ pour chacun des cas suivants, et calculer la somme pour ceux marqués $(\diamond)$.

(a) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

(b) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ $\quad(\diamond)$

(c) $a_n = \dfrac{2^{2n+1}}{5^n}$ $\quad(\diamond)$

(d) $a_n = \dfrac{(\cos(n))^2}{3^n}$

(e) $a_n = \dfrac{(n!)^3}{(3n)!}$

(f) $a_n = \dfrac{(2n^2-1)^n}{n^{2n}}$

(g) $a_n = \dfrac{n^{2n}}{(n^3+1)^n}$

(h) $a_n = \dfrac{\sin(nx)}{n^2}$, pour $x \in \mathbb{R}$ fixé.

(i) $a_n = \dfrac{\sqrt{n+\cos(n)}}{n}$

Exercice 8. Soit $x \in \mathbb{R}^+$.

(a) Déterminer pour quelles valeurs de x la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$ converge.

(b) Soient $p, q \in \mathbb{N}$. Déterminer, selon les valeurs de x, p et q, la nature de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^p}{(qn)!} x^n$.

Exercice 9. Déterminer, en fonction de la valeur de $x \in \mathbb{R}^+$, la nature de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \ldots (3n+1)}{n!} x^n.$$

[On pourra utiliser le test du quotient, ainsi que les résultats de l'exercice 1.]

Exercice 10. Dans cet exercice on pourra utiliser le résultat suivant (prouvé dans l'exercice 9 feuille 8, voir aussi p.36 des Notes de cours) :

$$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2,718.$$

(a) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ converge.

(b) Soit $a \in \mathbb{N}$. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$, selon la valeur de a ?

Exercice 11. Soit (a_n) une suite décroissante positive. Montrer que s'il existe une infinité de n tels que $a_n \geq \frac{1}{n}$, alors la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge. Est-ce encore vrai si on ne suppose pas la suite décroissante ? [On pourra considérer la suite $a_n = \frac{1}{n}$ si n est une puissance de 2, 0 sinon.]

Exercice 12. Soit $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ une série à termes positifs.

(a) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge si et seulement si les $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}$ convergent.

(b) En déduire, en utilisant le test du quotient, que si (a_{n+2}/a_n) tend vers une limite $\ell < 1$, alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, et que si (a_{n+2}/a_n) tend vers une limite $\ell > 1$, alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.

Exercice 13.

(a) On pose $u_n = \frac{1}{2^n}$ si n pair, $u_n = \frac{3}{2^n}$ si n impair. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge, et calculer la valeur de u_{n+1}/u_n.

(b) Etant donnée une série à termes positifs $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, est-il vrai que si $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ pour une infinité de n, alors $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge ?

UQÀM **Session d'hiver 2013**
MAT1013 Vivien Ripoll
Analyse 1 (vivien.ripoll@lacim.ca)

Feuille d'exercices 8 : Convergence et convergence absolue des séries

---

Exercice 1. Dans chacun des cas suivants, déterminer si la série $\sum a_n$ est absolument convergente, puis si elle est convergente.

(a) $a_n = \dfrac{2(-1)^n}{n\sqrt{n}}$

(b) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{10}}}$

(c) $a_n = \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$, pour $x \in \mathbb{R}$ fixé

(d) $a_n = \dfrac{\cos(nx)}{n\sqrt{n}}$, pour $x \in \mathbb{R}$ fixé

(e) $a_n = (-1)^n \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$

(f) $a_n = \dfrac{\sin(n\pi/2)}{1+\sqrt{n}}$

Exercice 2. Déterminer pour quelles valeurs de x la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ est absolument convergente, pour quelles valeurs elle est convergente, pour quelles valeurs elle est divergente.

Exercice 3. Montrer que le série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\pi/2)}{2^n}$ est convergente, et calculer sa somme.

Exercice 4. Soit $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ une série à signe alterné, i.e., $u_n = (-1)^n a_n$ avec (a_n) suite positive, décroissante, tendant vers 0. D'après le cours, $(\sum_{n=0}^{\infty} u_n)$ converge. On note S_n sa suite de sommes partielles, S sa somme totale, et $R_n = S - S_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ sa suite des restes.

(a) Rappeler pourquoi pour tout $p \in \mathbb{N}$, $S_{2p+1} \leq S \leq S_{2p}$.

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|R_n| \leq a_{n+1}$.

(c) On considère le cas $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$. On peut montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$. [voir exercice 8]
En utilisant (b), déterminer un $n \in \mathbb{N}$ tel que S_n soit une valeur approchée de $\ln(2)$ à 10^{-1} près ; calculer cette valeur approchée.

Exercice 5. On pose $\lambda = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (on peut en fait montrer que $\lambda = \frac{\pi^2}{6}$). Le but de cet exercice est de calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ en fonction de λ.

(a) Rappeler pourquoi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ converge.

(b) Montrer que $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(2p)^2} = \frac{\lambda}{4}$ et $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{3}{4}\lambda$.

(c) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ en fonction de λ.

(d) Montrer de manière similaire que pour tout entier $d \geq 2$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^d} = \left(1 - \frac{1}{2^{d-1}}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^d}$.

Exercice 6. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}$ est convergente. Est-elle absolument convergente ? En utilisant le fait que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$ (cf. exercice 8), montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)} = 2\ln(2) - 1.$$

Exercice 7. Soit $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ une série à termes quelconques. On définit (p_n) la suite extraite de (a_n) constituée des termes > 0, et (q_n) la suite extraite de (a_n) constituée des termes < 0. On note (s_n) la suite des sommes partielles de la série $(\sum p_n)$, et (t_n) la suite des sommes partielles de la série $(\sum q_n)$.

(a) Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $N', N'' \in \mathbb{N}$ tels que $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} |a_n| = s_{N'} - t_{N''}$. En déduire que si $(\sum p_n)$ et $(\sum q_n)$ sont convergentes, alors $(\sum a_n)$ est absolument convergente.

(b) Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel $s_N = \displaystyle\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N'}(|a_n| + a_n)$. En déduire que si $(\sum a_n)$ est absolument convergente, alors $(\sum p_n)$ est convergente, et $(\sum q_n)$ aussi.

(c) Déduire de (a) et (b) que : $(\sum a_n)$ est absolument convergente si et seulement si $(\sum p_n)$ et $(\sum q_n)$ sont convergentes, si et seulement si (s_n) est majorée et (t_n) est minorée.

(d) On suppose que $(\sum a_n)$ est convergente mais pas absolument convergente. Montrer que $(\sum p_n)$ et $(\sum q_n)$ sont alors toutes deux divergentes.

Exercice 8. (*) On admettra que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \alpha_n,$$

où γ est une constante (constante d'Euler) et (α_n) est une suite tendant vers 0 (ceci se montre en utilisant des comparaisons avec des intégrales). Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$.

EXERCICE 9. On considère la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, avec $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

(a) Rappeler pourquoi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est convergente mais pas absolument convergente.

Le but de l'exercice est de construire un réarrangement (b_n) de (a_n), tel que la suite des sommes partielles de $(\sum b_n)$ tende vers $+\infty$.

(b) Déterminer les suites extraites (p_n) et (q_n) de (a_n) définies dans l'exercice 7. Vérifier que $\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} p_k\right) = +\infty$

(c) Démontrer qu'il existe des entiers $N_0 < N_1 < \cdots < N_k < \ldots$ tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$(p_0 + \cdots + p_{N_0}) + q_0 + (p_{N_0+1} + \cdots + p_{N_1}) + q_1 + \cdots + q_{k-1} + (p_{N_{k-1}+1} + \cdots + p_{N_k}) \geq k.$$

(d) On définit la suite $(b_n) = (p_0, p_1, \ldots, p_{N_0}, q_0, p_{N_0+1}, \ldots, p_{N_1}, q_1, \ldots, q_{k-1}, p_{N_{k-1}+1}, \ldots, p_{N_k}, \ldots)$. Vérifier que (b_n) est bien un réarrangement de (a_n). Montrer que la suite des sommes partielles de $(\sum b_n)$ tend vers $+\infty$.

(e) (*) Montrer que l'on peut démontrer le même résultat pour tout série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ qui est convergente mais pas absolument convergente. Démontrer le résultat similaire en remplaçant $+\infty$ par $-\infty$.

EXERCICE 10. [Théorème de réarrangement de Riemann]

Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ une série convergente mais pas absolument convergente. Le but de l'exercice est de montrer la propriété suivante : pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un réarrangement $b_n = a_{\varphi(n)}$ tel que la série $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ soit convergente de somme x.

(a) On définit les suites (p_n) et (q_n) comme dans l'exercice 7. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} p_k\right) = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} q_k\right) = -\infty$. [On pourra utiliser l'exercice 7(d).]

(b) On suppose pour le moment que $x \geq 0$. Montrer qu'il existe $N_1 \in \mathbb{N}$, tel que $\sum_{n=0}^{N_1-1} p_n \leq x < \sum_{n=0}^{N_1} p_n$.

Si on pose $S_1 = \sum_{n=0}^{N_1} p_n$, montrer que $0 < S_1 - x \leq p_{N_1}$.

(c) Montrer qu'il existe $M_1 \in \mathbb{N}$, tel que $S_1 + \sum_{n=0}^{M_1} q_n < x \leq S_1 + \sum_{n=0}^{M_1-1} q_n$. Si on pose $T_1 = S_1 + \sum_{n=0}^{M_1} q_n$, montrer que $q_{M_1} \leq T_1 - x < 0$.

(d) (*) Montrer qu'on peut itérer le processus, et construire pour tout $k \in \mathbb{N}$ des entiers N_k, M_k et des sommes

$$S_k = T_{k-1} + \sum_{n=N_{k-1}+1}^{N_k} p_n \quad \text{et} \quad T_k = S_k + \sum_{n=M_{k-1}+1}^{M_k} p_n,$$

tels que $0 < S_k - x \leq p_{N_k}$ et $q_{M_k} \leq T_k - x < 0$. [On pourra s'aider en faisant un schéma sur la droite réelle avec x, S_1, T_1, S_2...]

(e) (*) On considère la suite $(b_n) = (p_0, \ldots, p_{N_1}, q_0, \ldots, q_{M_1}, p_{N_1+1}, \ldots, p_{N_2}, q_{M_1+1}, \ldots, q_{M_2}, \ldots)$, qui est un réarrangement de la suite (a_n). Notons (U_n) la suite des sommes partielles de la série $(\sum b_n)$. Comprendre pourquoi U_n croît jusqu'à S_1, puis décroît jusqu'à T_1, puis croît jusqu'à S_2, etc... Montrer que pour tout n, il existe un entier k_n tel que $T_{k_n} \leq U_n \leq S_{k_n}$ ou bien $T_{k_n} \leq U_n \leq S_{k_n+1}$, et que $\lim_{n\to+\infty} k_n = +\infty$. En déduire que $q_{M_{k_n}} \leq U_n - x \leq \max(p_{N_{k_n}}, p_{N_{k_n+1}})$.

(f) Rappeler pourquoi $\lim_{k\to+\infty} p_{N_k} = 0$ et $\lim_{k\to+\infty} q_{M_k} = 0$. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} U_n = x$, i.e., $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = x$.

(g) Expliquer pourquoi la méthode fonctionnerait aussi si $x \leq 0$.

UQÀM **Session d'hiver 2013**
MAT1013 Vivien Ripoll
Analyse 1 (vivien.ripoll@lacim.ca)

Feuille d'exercices 9 : Fonctions continues

Continuité, limites et prolongement par continuité

Exercice 1. Pour chacune des fonctions suivantes, donner l'ensemble des points en lesquels elle est continue (on pourra s'aider en traçant une esquisse du graphe).

(a) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ si $x \in \mathbb{R}^*$, $f(0) = 0$.

(b) $f(x) = \dfrac{|x| - x}{x}$ si $x \in \mathbb{R}^*$, $f(0) = 0$.

(c) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = E(x) + (x - E(x))^2$ (rappel : $E(x)$ désigne la partie entière de x)

(d) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = E(x) + \sqrt{x - E(x)}$

(e) $f(x) = x^2$ si $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = x$ sinon.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On définit la fonction $|f| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $x \mapsto |f(x)|$. Pour f, g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, on définit les fonctions suivantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$\max(f,g) : x \mapsto \max(f(x), g(x)) \quad \text{et} \quad \min(f,g) : x \mapsto \min(f(x), g(x)).$$

(a) Tracer les graphes de $\max(f,g)$ et de $\min(f,g)$ pour $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$.

(b) Dire pourquoi si f est continue sur $\mathbb{R}$, alors $|f|$ est continue sur $\mathbb{R}$. Est-ce que la réciproque est vraie ?

(c) Montrer que $\max(f,g) = \frac{f+g+|f-g|}{2}$ et $\min(f,g) = \frac{f+g-|f-g|}{2}$.

(d) En déduire que si f et g sont continues sur $\mathbb{R}$, alors $\max(f,g)$ et $\min(f,g)$ sont continues sur $\mathbb{R}$. (Est-ce que la réciproque est vraie ?)

Exercice 3. On rappelle que $E(x)$ est l'unique entier tel que $E(x) \leq x < E(x) + 1$.

(a) Montrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} E(\frac{1}{x}) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} E(\frac{1}{x}) = -\infty$.

(b) Montrer que $\lim\limits_{x \to 0} x E(\frac{1}{x}) = 1$. [Utiliser un encadrement]

(c) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} x E(\frac{1}{x})$.

Exercice 4. On définit $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$ pour $x \neq 2$. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 2 ?

Exercice 5. Pour chacune des fonctions suivantes, tracer une esquisse du graphe au voisinage de 0, et dire si elle est prolongeable par continuité en 0.

(a) $\begin{array}{rccc} f : &]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sin(\frac{1}{x}) \end{array}$

[On montrera que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ n'existe pas en construisant deux suites x_n et x'_n tendant vers 0 mais telles que leurs deux suites images ont des limites différentes.]

(b) $\begin{array}{rccc} g : &]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x\sin(\frac{1}{x}) \end{array}$

Exercice 6. Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ continue, et soit $x_0 \in]a,b[$, tel que $f(x_0) > 0$. Montrer qu'il existe un intervalle ouvert I centré en x_0, tel que $\forall x \in I, f(x) > 0$.

Exercice 7. Soient $f, g : [a,b[\to \mathbb{R}$. On suppose que $\lim\limits_{x\to b} f(x) = 0$, et que g est bornée au voisinage de b. Montrer que $\lim\limits_{x\to b} f(x)g(x) = 0$.

Exercice 8. Soit $f : D \to \mathbb{R}$. On suppose que f vérifie la condition suivante (f est dite *lipschitzienne*) :

$$\exists k \in \mathbb{R}, \forall x, y \in D, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

(a) Montrer qu'alors f est continue sur D.

(b) Montrer que c'est encore vrai si on remplace la condition par celle-ci (f est dite höldérienne) : $\exists \alpha \in]0,1], \exists k \in \mathbb{R}, \forall x, y \in D, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|^{\alpha}$.

Exercice 9. (une fonction pathologique)

On définit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par : $f(\frac{p}{q}) = \frac{1}{q}$ si p/q est un rationnel écrit sous forme irréductible ; et $f(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est exactement $\mathbb{Q}$.

[On pourra admettre (ou démontrer en exercice (*)) la propriété suivante : si $(\frac{p_n}{q_n})$ est une suite de rationnels tendant vers un irrationnel, alors $|q_n|$ tend vers $+\infty$.]

Densité et continuité

Exercice 10. On suppose que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et satisfait :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \alpha x$.

(a) On pose $\alpha = f(1)$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = \alpha n$.

(b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{Z}, f(n) = \alpha n$.

(c) Montrer que : $\forall p \in \mathbb{Z}, \forall q \in \mathbb{N}^*, f(\frac{p}{q}) = \alpha \frac{p}{q}$.

(d) Conclure en utilisant la densité de $\mathbb{Q}$.

Théorème des valeurs intermédiaires et théorème de la fonction réciproque

Exercice 11. (constructions)

(a) Soit I un intervalle quelconque. Construire une fonction continue $f :]0,1[\to I$ surjective (faire des esquisses, avec plusieurs cas selon la nature de I).

(b) Soit $I =]a,b[$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. Construire une fonction continue $f :]0,1[\to I$ bijective.

(c) Même question, mais avec $a = -\infty$ et/ou $b = +\infty$.

Exercice 12. (théorème du point fixe)
Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue. Montrer qu'il existe $x \in [0,1]$, tel que $f(x) = x$. [Faire un dessin ; trouver une bonne fonction à qui appliquer le T.V.I.]

Exercice 13. Montrer qu'il existe un nombre $x \in]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}[$ tel que $\cos(x) = \tan(x)$.

Exercice 14. Montrer que pour tout réel $r > 0$, il existe $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tel que $rx = \cos(x)$. Est-il unique ?

Exercice 15.

(a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, telle que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f est surjective.

(b) Soit $P(x)$ un polynôme de degré impair (i.e., de la forme $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_dx^d$, avec $a_d \neq 0$ et d impair). Montrer que P a au moins une racine réelle (i.e., il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $P(x) = 0$).

Exercice 16. Il n'y a qu'un chemin pour aller du village jusqu'au sommet de la colline, où se trouve le château. Albéric part du village lundi à 8h, et arrive au château avant la nuit. Il repart du château le mardi à 8h, et rentre au village. Montrer qu'il y a une heure précise de la journée à laquelle il a été exactement au même endroit du chemin le lundi et le mardi.

Exercice 17. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et périodique de période T, i.e. : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x)$. Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$, tel que $f(x_0) = f(x_0 + \frac{T}{2})$. [Appliquer le TVI à une fonction bien choisie]

Exercice 18. La fonction $f(x) = ax + b$ a-t-elle une fonction réciproque ? Si oui, quelle est-elle ?

Exercice 19. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Si n pair, montrer que la fonction $\sqrt[n]{\ }$ est bien définie sur $\mathbb{R}^+$, et qu'elle est continue sur $\mathbb{R}^+$.

(b) Si n impair, montrer que la fonction $\sqrt[n]{\ }$ est bien définie sur $\mathbb{R}$, et qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 20. (*) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, telle que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. Montrer que f possède un maximum. [On pourra essayer de se ramener à l'étude de f sur un segment.]

Exercice 21. (*) Soit $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction polynomiale. Montrer que $|P|$ atteint sa borne inférieure, i.e., qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$, tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|P(x)| \geq |P(x_0)|$.

UQÀM **Session d'hiver 2013**
MAT1013 Vivien Ripoll
Analyse 1 (vivien.ripoll@lacim.ca)

Feuille d'exercices 10 : Continuité, introduction à la dérivabilité

Continuité et fonctions réciproques

Exercice 1. Restreindre la fonction $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ à un intervalle I le plus grand possible tel que f soit strictement monotone sur I (on commencera par tracer une esquisse de la courbe de f). Expliquer pourquoi f induit une bijection de I vers $f(I)$, et calculer l'expression de sa fonction réciproque f^{-1}.

Exercice 2. Montrer que la fonction $f(x) = \exp(\frac{1}{x})$ est une bijection continue de $\mathbb{R}^*$ vers $]0, +\infty[\setminus\{1\}$, et calculer l'expression de sa fonction réciproque f^{-1}. (on commencera par tracer une esquisse de la courbe de f, et on pourra séparer $\mathbb{R}^*$ en deux et utiliser un théorème du cours).

Dérivabilité

Exercice 3.

(a) Tracer le graphe d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de votre choix mais vérifiant : f impaire, f dérivable sur $\mathbb{R}$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 1$, f strictement croissante sur $[0, 2]$ et sur $[3, +\infty[$, f strictement décroissante sur $[2, 3]$, $f'(0) = 0$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

(b) Sur le même dessin, esquisser le graphe de f'.

Exercice 4. Soit α un réel > 0. En utilisant la définition, déterminer pour quels α la fonction $f(x) = x^\alpha$ est dérivable en 0.

Exercice 5. Montrer directement avec la définition de la dérivée, que :

(a) Pour $n \in \mathbb{N}$, la dérivée de x^n est nx^{n-1}. [On pourra utiliser la formule du binôme de Newton]

(b) La dérivée de $\frac{1}{x}$ est $-\frac{1}{x^2}$.

(c) La dérivée de $\sqrt{x}$ est $\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Exercice 6. Le but de cet exercice est de montrer rigoureusement que la dérivée de sin est cos. On admettra que $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $|\sin(x)| \leq |x| \leq |\tan(x)|$, et que $\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$.

(a) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$.

(b) En déduire que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin x - \sin a}{x - a} = \cos a$.

EXERCICE 7. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note f_n la fonction définie par : $f_n(x) = x^n \sin(\frac{1}{x})$ pour $x \in \mathbb{R}^*$, et $f_n(0) = 0$.

(a) Expliquer pourquoi toutes les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}^*$, et même dérivables sur $\mathbb{R}^*$.

(b) Montrer que f_0 n'est pas continue en 0, mais que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue en 0.

(c) Montrer que f_1 n'est pas dérivable en 0.

(d) Montrer que f_n est dérivable en 0 si $n \geq 2$.

(e) Montrer que f_2' n'est pas continue en 0.

(f) Montrer que f_n' est continue en 0 si $n \geq 3$.

(g) (*) Déterminer, en fonction de n, combien de fois on peut dériver f_n en 0.

EXERCICE 8. Rappelons que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite *paire* si $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$, et *impaire* si $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)$. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que : f paire $\Longrightarrow$ f' impaire ; et que : f impaire $\Longrightarrow$ f' paire. (est-ce que les réciproques sont vraies ?)

EXERCICE 9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq x^2$. Montrer que f est dérivable en 0.

EXERCICE 10. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $a \in D$. Calculer $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{af(x) - xf(a)}{x - a}$.

EXERCICE 11. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.

(a) Montrer que si f est dérivable en 0, alors $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} n(f(\tfrac{1}{n}) - f(0)) = f'(0)$.

(b) La réciproque est-elle vraie ? (on pourra construire un contre-exemple).

EXERCICE 12. Étant donnés une suite de fonctions $f_n : D \to \mathbb{R}$ et une fonction $f : D \to \mathbb{R}$, on dit que f_n tend vers f si : $\forall x \in D, \displaystyle\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$.

(a) Calculer la fonction limite de la suite de fonction $f_n(x) = e^{\frac{-x^2}{n}}$.

(b) Montrer que la limite d'une suite de fonctions continues n'est pas forcément continue. On pourra étudier la suite $f_n(x) = x^n$ sur $[0, 1]$.

(c) (*) Montrer que si une fonction f est la dérivée d'une fonction g, alors f est limite d'une suite de fonctions continues. [On pourra utiliser une variante de l'exercice 11(a)]

EXERCICE 13. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $f(x) = (1 + x)^n$.

(a) En calculant $f(1)$ de deux manières différentes, trouver une formule pour $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

(b) En dérivant f de deux manières différentes, trouver une formule pour $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.

UQÀM
MAT1013
Analyse 1

Session d'hiver 2013
Vivien Ripoll
(vivien.ripoll@lacim.ca)

Feuille d'exercices 11 : Dérivabilité, théorèmes fondamentaux

---

Opérations sur les dérivées

Exercice 1. En utilisant le formule pour la dérivée d'une fonction réciproque, calculer les dérivées des fonctions arccos, arcsin, arctan.

Exercice 2. Soit $f(x) = x^5 + 2x + 1$.

(a) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Elle admet donc une fonction réciproque, que l'on notera g.

(b) Expliquer pourquoi g est dérivable.

(c) Sans essayer de calculer une expression explicite pour $g(x)$ (c'est impossible), déterminer $g(-2)$, $g(1)$, et $g(4)$, puis $g'(-2)$, $g'(1)$, et $g'(4)$.

Théorèmes de Rolle et théorème des accroissements finis

Exercice 3. Rappelons que $f : I \to \mathbb{R}$ est dite *lipschitzienne* sur I si

$$\exists k \in \mathbb{R}, \forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

(a) Montrer que si f est dérivable sur I et que f' est bornée sur I, alors f est lipschitzienne sur I.

(b) Expliquer pourquoi c'est le cas en particulier si I est un segment et que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I (i.e, f dérivable et f' continue).

Exercice 4. Soit I un intervalle, et $f : I \to \mathbb{R}$.

(a) On suppose que f est deux fois dérivable sur I, et que f est nulle en 3 points distincts $a_1 < a_2 < a_3 \in I$. Montrer qu'il existe $c \in I$ tel que $f''(c) = 0$. [Utiliser plusieurs fois le théorème de Rolle.]

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que f est n fois dérivable sur I, et qu'il existe au moins $n+1$ points de I où f est nulle. Montrer qu'alors il existe $c \in I$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Exercice 5. (une généralisation du théorème de Rolle)

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[0, +\infty[$, dérivable sur $]0, +\infty[$. On suppose que $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

(a) Montrer que f atteint un maximum ou un minimum sur $]0, +\infty[$.

(b) En déduire qu'il existe $c \in]0, +\infty[$, tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 6. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$. On suppose que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $f(c)f'(c) = \frac{1}{2}$. [On pourra utiliser la fonction $g(x) = (f(x))^2 - x$.]

Exercice 7. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. On suppose que $\forall x \in]a,b[, f'(x) \neq 0$.

(a) Montrer que f est injective sur $[a,b]$.

(b) Soit $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ une autre fonction continue sur $[a,b]$, et dérivable sur $]a,b[$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $\dfrac{g(b)-g(a)}{f(b)-f(a)} = \dfrac{g'(c)}{f'(c)}$.
[On pourra utiliser la fonction $h(x) = g(x) - g(a) - \frac{g(b)-g(a)}{f(b)-f(a)}(f(x) - f(a))$.]

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose qu'il existe $m > 0$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) \geq m$.

(a) Donner une interprétation graphique de cette hypothèse pour le graphe de f.

(b) Montrer que : $\forall x \geq 0, f(x) - f(0) \geq mx$ et que : $\forall x \leq 0, f(x) - f(0) \leq mx$. En déduire les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

(c) En déduire que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

(d) (*) On suppose de plus qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) \leq M$. On fixe $r \in \mathbb{R}$, et on définit une suite (x_n) par :

$$x_0 = r, \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{M}.$$

Soit α l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$. Montrer que (x_n) tend vers α. [On montrera que si $r \geq \alpha$, alors (x_n) est minorée par α (récurrence), et décroissante ; et un analogue pour $r \leq \alpha$.]

Exercice 9. Soit I un intervalle, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction 2 fois dérivable sur I, telle que f'' soit bornée sur I (on notera $M_2 = \sup |f''|$). Soient $a < b \in I$. On suppose que $f(a) = f(b) = 0$. Le but de l'exercice est de montrer qu'alors :

$$\forall z \in I, |f(z)| \leq \frac{M_2}{2} \left|(z-a)(z-b)\right|.$$

(a) On fixe $z \in I$, et on définit une nouvelle fonction $g(x) = f(x) - K(x-a)(x-b)$, où K est une constante choisie de telle sorte que $g(z) = 0$.

(b) En utilisant le fait que g est dérivable 2 fois sur I, et que $g(a) = g(b) = g(z) = 0$, montrer qu'il existe $c \in I$, tel que $g''(c) = 0$. [Utiliser le théorème de Rolle, deux fois]

(c) Montrer que $f''(c) = 2K$ et en déduire que $f(z) = \frac{f''(c)}{2}(z-a)(z-b)$.

(d) Conclure pour la formule recherchée.

(e) (*) Généralisation : on suppose que f est n fois dérivable sur I (avec $n \geq 1$), avec $f^{(n)}$ bornée sur I (on notera $M_n = \sup |f^{(n)}|$). On suppose que f est nulle en n points distincts $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Montrer qu'alors :

$$\forall z \in I, |f(z)| \leq \frac{M_n}{n!} \left| \prod_{i=1}^{n} (z - a_i) \right|.$$

[Utiliser une méthode analogue, et la propriété montrée à l'exercice 4(b).]