MAT1013 (Analyse 1)
Hiver 2013

UQÀM.

Notations de Landau, et développements limités.

* "Petit o" (négligeable)

Soit f, g deux fonctions définies au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$.
On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a,

et on écrit $\quad f(x) \underset{x\to a}{=} o\left(g(x)\right)$

si $\quad \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0.$

(on peut aussi le définir pour $a = +\infty$ ou $-\infty$).

ex: $\quad x^3 \underset{x\to 0}{=} o(x) \qquad \ln x \underset{x\to +\infty}{=} o(x) \qquad \sqrt{x} \underset{x\to +\infty}{=} o(x).$

$x^k \underset{x\to 0}{=} o(x^l)$ si $k > l$. $\qquad x^k \underset{x\to +\infty}{=} o(x^l)$ si $k < l$.

Rq: si f est dérivable en a, $\quad f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + f'(a)h + o(h).$

* "Grand O" (dominance)

On dit que f est "dominée" par g au voisinage de a,
et on écrit $\quad f(x) \underset{x\to a}{=} O\left(g(x)\right).$

si $\quad \dfrac{f(x)}{g(x)}$ est bornée au voisinage de a.

i.e $\quad \exists M \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leq M\,|g(x)|$ au voisinage de a.

ex $\quad 2x \underset{x\to +\infty}{=} O(x)$ mais aussi $\quad x \underset{x\to +\infty}{=} O(2x).$

$x^2 \underset{x\to 0}{=} O(x).$

Rq: $\quad f(x) \underset{x\to a}{=} o\left(g(x)\right) \implies f(x) \underset{x\to a}{=} O\left(g(x)\right)$, mais pas réciproquement.

* Equivalence.

On dit que f est équivalente à g au voisinage de a et on écrit $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$

si $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Rq: $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \iff f(x) \underset{x\to a}{=} g(x) + o(g(x))$ (le vérifier)

Ex: $x^5 + x^2 + 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x^5$

* Pour les suites:

On utilise les mêmes notations pour les suites:
$u_n = o(v_n)$ ou $u_n = O(v_n)$ ou $u_n \sim v_n$,
en sous-entendant que $n \to +\infty$. bien sûr.

* Développements limités.

On dit que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ si on peut écrire:

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} b_0 + b_1 h + b_2 h^2 + \dots + b_n h^n + o(h^n)$$

avec les $b_i \in \mathbb{R}$ constantes.
i.e., si f est approchable par un polynôme de degré n au voisinage de a.

Rq: Si f est dérivable $(n+1)$ fois, le théorème de Taylor permet d'obtenir un développement limité à l'ordre n de f.