Chapitre 1 Le raisonnement par récurrence (induction)

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ nombres naturels

Attention : $0 \in \mathbb{N}$

On considère une propriété des nombres entiers, notée $P(n)$. On veut démontrer cette propriété pour tous les entiers naturels $n \in \mathbb{N}$.
On peut pour cela utiliser le raisonnement par récurrence.
On fait comme suit :

- On prouve que $P(0)$ est vrai.
- On prouve que si $P(n)$ est vrai, alors $P(n+1)$ est vrai.

Ceci implique $P(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

__Variante__ On commence par $P(1)$, au lieu de $P(0)$.

__Exemples__

- $1 + 2 + \dots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$
- Tout ensemble à n éléments a 2^n sous-ensembles.
- Pour tout nombre $x \geqslant -1$, on a $(1+x) \geqslant 1 + nx$ pour tout $n \geqslant 1$.
- Tout entier naturel $n \geqslant 2$ est divisible par un nombre premier.

Chapitre 2 Ensembles et fonctions

voir les notes d'Olivier Collin p. 5 - 8

Chapitre 3 Les nombres entiers relatifs et les nombres rationnels

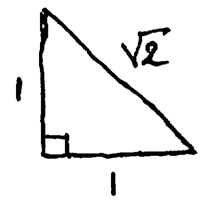
voir les notes d'Olivier Collin p. 12 - 14

 Les nombres rationnels sont insuffisants

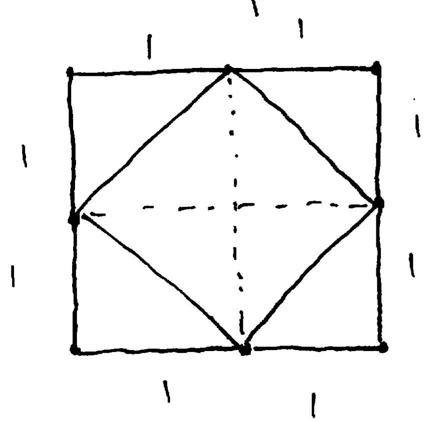
Quand on mesure les longueurs, les surfaces, les volumes, de manière théorique, on se rend compte que les rationnels ne suffisent pas. (Cela a désespéré les Anciens, paraît-il)

Rappelons d'abord que l'aire d'un carré de côté x est x^2. C'est quelque chose qui est intuitivement et théoriquement clair.

En utilisant un cas particulier du théorème de Pythagore (que nous démontrerons), on voit que la longueur de l'hypothénuse d'un triangle rectangle isocèle de côtés 1 doit être de carré 2 :



Démonstration de ce cas particulier du th. de Pythagore:



le carré central est d'aire 2.

Mais il n'y a pas de nombre rationnel dont le carré est 2 (voir par ex. J. Labelle et A. Mercier page 4).

D'où le désespoir des Anciens : on voit bien que les triangles rectangles isocèles de côtés 1 existent, mais on ne peut pas mesurer leur hypothénuse avec un nombre rationnel.

Conclusion : il y a des nombres qui ne sont pas rationnels, comme compléments de cours

$\sqrt{2}, \sqrt{2}+1, \sqrt{2}+2$ etc...
Une infinité de nombres qui ne sont pas rationnels.
Le raisonnement ci-dessus pour $\sqrt{2}$ peut être adapté pour $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ etc...
Mais il y a encore d'autres nombres irrationnels.
Comme π = le rapport $\dfrac{\text{circonférence d'un cercle } C}{\text{diamètre de } C}$

(on voit que ça ne dépend pas de C).
Il faut un cours solide d'analyse pour montrer que π n'est pas un nombre rationnel.
(ce que prouvera rigoureusement l'impossibilité de la "quadrature du cercle").
En fait, π est même "transcendant" : ceci veut dire que π n'est pas solution d'une équation $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$, $a_i \in \mathbb{Q}$.
Remarquons que $\sqrt{2}$ n'est pas transcendant, puisque $\sqrt{2}$ est solution de $x^2 - 2 = 0$.
On dit qu'un nombre qui est solution d'une équation qu'il est "algébrique" (donc transcendant c'est le contraire d'algébrique).
On peut montrer que le développement décimal d'un nombre rationnel est toujours périodique, et vice-versa (Labelle-Mercier p. 7).
Et on peut en déduire qu'il y a strictement plus de nombres irrationnels que de nombres rationnels (notes Collin p. 23-24 par ex.).
Les rationnels sont donc très insuffisants !

Chapitre 5 Construction des nombres réels

Nous ne la ferons pas dans ce cours d'Analyse 1. L'étudiant intéressé peut consulter les notes de cours d'Olivier Collin page

où il trouvera la construction des nombres réels par les coupures (du mathématicien allemand du 19ème s. Dedekind).

Il y a une autre construction des nombres réels : celle par les suites de Cauchy (math. français du 19ème s.). Le lecteur intéressé peut la trouver sur internet en tapant "construction des réels par les suites de Cauchy".

Ces deux constructions sont équivalentes. Elles permettent de construire $\mathbb{R}$, qui satisfait au théorème suivant.

Chapitre 6 Le théorème du supremum

Théorème du supremum

Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ a un supremum

voir les notes de cours de Fernand Beaudet NC 01.pdf

$\mathbb{R}$ a toutes les propriétés de $\mathbb{Q}$ vues au chapitre 4. En plus

Chapitre 7 Suites de nombres réels

voir les notes de Fernand Beaudet
NC2 pages 16 à 21
NC3 pages 22 à 33

Chapitre 8 Suites qui tendent vers l'infini

voir le livre de Jacques Labelle ~~page~~ 58 à 62

Chapitre 9 Topologie de $\mathbb{R}$

voir les notes de Fernand Beaudet
NC4 pages 1-13

9.1 Ouverts et fermés
p. 1-6

9.2 Points d'accumulation
p. 6-13

9.3 Sous-suites
NC5 p. 14-16

9.4 Suites de Cauchy
NC5 p. 16-19

Analyse 1   Séries   Chapitre 10   C. Reutenauer

voir les notes de cours d'Olivier Collin, chapitre 2

Définitions Séries. Sommes partielles. Terme. Convergence, divergence d'une série. Somme d'une série.

Exemples • $\sum_{n\geq 0} (-1)^n$, $\sum_{n\geq 0} 1$, $\sum_{n\geq 0} n$, $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n$, $\sum \frac{1}{n}$ (démontrer la divergence)

• $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \mathrm{Log}\, 2$, $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} = e$

Proposition 1 La série $\sum a_n$ converge ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ tel que $\forall n \geq N, \forall p \geq 0, \; |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon$.

Proposition 2 Si $a_n \geq 0$, pour tout n, alors: $\sum a_n$ converge $\iff$ les sommes partielles sont bornées.

Proposition 3 Soit $r > 0$. Alors $\sum r^n$ converge si et seulement si $r < 1$. Dans ce cas sa limite est $\frac{1}{1-r}$: $\sum_{n\geq 0} r^n = \frac{1}{1-r}$

Proposition 4 (Opérations sur les limites de séries)

$$\sum (\alpha a_n) = \alpha \sum a_n$$

$$\sum_{n\geq 0} a_n = a_0 + \sum_{n\geq 1} a_n$$

$$\sum a_n + \sum b_n = \sum (a_n + b_n)$$

Théorème 5 (test de comparaison) Soient $\sum a_n$, $\sum b_n$ des séries à termes ≥ 0 telles que $a_n \leq b_n$. Si $\sum b_n$ converge, $\sum a_n$ aussi. Si $\sum a_n$ diverge, $\sum b_n$ aussi.

Théorème 6 (critère de Cauchy) $a_n \geq 0$

Si $\lim a_n^{1/n} < 1$, $\sum a_n$ converge.

Si $\lim a_n^{1/n} > 1$, $\sum a_n$ diverge

Remarques • si $\lim a_n^{1/n} = 1$, on ne peut rien conclure.

• le critère marche aussi avec lim remplacé par limsup ("limite supérieure")

Théorème 7 (critère de d'Alembert) $a_n \geq 0$

Si $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, $\sum a_n$ converge.

Si $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, $\sum a_n$ converge.

Théorème 8 (critère de condensation de Cauchy)

$a_n \geq 0$ a_n décroissante.

$\sum a_n$ converge $\iff$ $\sum 2^n a_{2^n}$ converge

Application $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}$ converge $\iff s > 1$

On note $\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$ (fonction zêta de Riemann)

Définition Une série $\sum a_n$ converge absolument si $\sum |a_n|$ converge.

Théorème 9 Si $\sum |a_n|$ converge, alors $\sum a_n$ converge.

Théorème 10 (Leibnitz) $a_n \geq 0$, $a_n \to 0$, a_n décroissante.

Alors $\sum (-1)^n a_n$ converge.

<u>Définition</u> On dit que $\sum a_n$ <u>converge conditionnelle-ment</u> si $\sum a_n$ converge et si $\sum |a_n|$ ne converge pas.

<u>Théorème 11</u> <u>Si</u> $\sum a_n$ <u>converge absolument</u>, <u>alors pour toute bijection</u> $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\sum a_{\sigma(n)}$ <u>converge et a même somme.</u>

<u>Théorème 12</u> (Riemann) <u>Si</u> $\sum a_n$ <u>converge conditionnel-lement</u>, <u>alors pour tout</u> $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, <u>il existe une bijection</u> $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ <u>telle que</u> $\sum a_{\sigma(n)}$ tende <u>vers</u> l.

Analyse 1 — Chapitre 11 — Fonctions continues — C. Reutenauer

11.1 Fonctions continues définies par les suites convergentes

Notes de Fernand Beaudet 5-1 à 5-3

11.2 Opérations sur les fonctions continues

idem 5-3 à 5-9

11.3 Compacité du domaine de définition

5-10 à 5-11

11.4 Théorème des valeurs intermédiaires

5-12 à 5-14

11.5 Fonctions continues définies par ε, δ

5-~~14~~ à 5-18

11.6 Fonctions uniformément continues

5-18 à 5-21

11.7 Limite d'une fonction en un point et continuité

6-1 à 6-6

11.8 Fonctions réciproques

Notes d'Olivier Collin p. 83 à 84

11.9 Définition d'une fonction continue par les ouverts

idem p. 75-76

Analyse 1 <u>Chapitre 12</u> Christophe Reutenauer 1

<u>Fonctions dérivables</u>

12.1. <u>Définition et interprétations</u> Notes de Fernand Beaudet 7.1 à 7.~~3~~4

12.2 <u>Théorème de Rolle</u>
et th. des accroissements finis (ou th. de la moyenne)
7-4 à 7.5 et 7-~~7~~ à 7-10

12.2 <u>Opérations sur les dérivées</u>
7-5 à 7-~~7~~ 7-11

12.3 <u>Extréma, points d'inflexion et convexité</u>

<u>Chapitre 13</u> <u>Introduction à l'intégration</u>

notes de cours d'Olivier Collin p. 111 - 122

13.1. <u>Fonctions en escalier</u>

longueur $\ell(I)$ d'un intervalle borné I

<u>Déf.1</u> $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fct. en escalier s'il existe $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ tq f est constante sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$.

<u>Déf.2</u> Fonction caractéristique χ_I d'un intervalle

<u>Prop.3</u> $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une <u>fct. en escalier</u> $\Leftrightarrow$ f <u>est une combinaison linéaire de fonctions caractéristiques</u> <u>d'intervalles contenus dans $[a,b]$</u>.

Corollaire 4 f en escalier

$\rightarrow$ f prend un nombre fini de valeurs et n'a qu'un nombre fini de points de discontinuité.

Déf. 5
- subdivision de $[a,b]$: $a = a_0 < a_1 < \dots < b_n = b$
- raffinement d'une subdivision
- $L^0([a,b])$ = ens. des fcts en escalier sur $[a,b]$

Proposition 6 Si $\varphi, \psi \in L^0([a,b])$, alors $\varphi + \psi$ et $\alpha\varphi \in L^0([a,b])$ $(\alpha \in \mathbb{R})$
De plus $\varphi\psi$, $\max(\varphi,\psi)$, $\min(\varphi,\psi) \in L^0([a,b])$. Enfin, $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$, avec $\varphi^+ = \max(\varphi, 0)$, $\varphi^- = \max(0,-\varphi)$ en escalier.

13.2 Intégrale d'une fonction en escalier

Déf. 1 $f = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \chi_{I_i} \in L^0([a,b],\mathbb{R})$

$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \, l(I_i)$$

Attention : il faut montrer que cette définition ne dépend pas de la représention de f choisie.

Cas particulier d'une fonction constante : $\int_a^b C = C(b-a)$.

Proposition 2 $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$

$$\int_a^b (\alpha f) = \alpha \int_a^b f$$

Proposition 3 $\varphi \geq \psi$, $\varphi, \psi \in L^0([a,b], \mathbb{R})$

Alors $\int_a^b \varphi \geq \int_a^b \psi$.

Proposition 4 • $\int_a^b \varphi$ ne change pas si on modifie φ en un nombre fini de points

• Si $\varphi \geq 0$ et $\int_a^b \varphi = 0$, alors $\varphi(x) = 0$ sauf pour un nb. fini de $x \in [a,b]$

13.3 Intégration des fonctions continues

$f \in C([a,b])$ = ensemble des fonctions continues $[a,b] \to \mathbb{R}$

$$E_f = \{ \varphi \in L^0([a,b]) \mid \varphi \leq f \}$$

On sait que f est borné : $\exists M$ tel que $\forall x \in [a,b]$, $f(x) \leq M$.

Donc $\varphi \in E_f \Rightarrow \forall x \in [a,b]$, $\varphi(x) \leq M$

$$\Rightarrow \int_a^b \varphi \leq \int_a^b M = M(b-a).$$

On peut donc poser la définition suivante (grâce au th. du supremum)

Déf. 1 $\int_a^b f = \sup \left\{ \int_a^b \varphi \mid \varphi \in E_f \right\}$ $(a<b)$

On pose aussi $\int_b^a f = -\int_a^b f$.

Proposition 2 $f, g \in C([a,b])$. Alors

1) $f \geq g \Rightarrow \int_a^b f \geq \int_a^b g$

2) Si $m \leq f \leq M$, alors $m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$

3. Si $f \geq 0$ et $\int_a^b f = 0$, alors $f = 0$.

Proposition 4 $a < b < c$ $f \in C([a,c])$

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

13.4 Théorèmes fondamentaux

Th. 1 $f \in C([a,b]$ On pose $\forall x \in [a,b]$

$$F(x) = \int_a^x f.$$

Alors $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a,b]$

Th. 2 Soit $f \in C([a,b])$. On suppose que f a une primitive F, c'est-à-dire $F' = f$. Alors

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

13.5 Linéarité de l'intégrale

Proposition

$$\int_a^b f+g = \int_a^b f + \int_a^b g$$

$$\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f$$