Analyse 1 — Exercices 1

1. Démontrer par récurrence sur n que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2. Soit x un nombre rationnel (ou même réel) tel que $x \geq -1$.
Démontrer par récurrence sur n que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a
$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

3. Montrer que $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

4. Montrer que $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$

5. Montrer que si $x \neq 1$, alors $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

6. Montrer que $n^3 + 5n$ est divisible par 6.

7. Trouver une formule pour la somme
$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)$$
puis la démontrer par récurrence.

Exercices 2 — Analyse 1

1. On définit, pour $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $E_n = \{kn \mid k \in \mathbb{N}, k \geq 2\}$. Soit $E = \bigcup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq 2}} E_n$. Soit $X = \mathbb{N} \setminus E$. Soit P l'ensemble des nombres premiers. Montrer que $X = \{0, 1\} \cup P$.

2. Donner un exemple de : (i) une fonction non injective mais surjective ; (ii) une fonction non surjective mais injective ; (iii) une fonction ni surjective, ni injective.

Problèmes 1, 2 dans TP I d'Olivier Collin

Exercices 2 et 1 dans TP Beaudet page 1.

Indications : on supposera $b_0, x \in \mathbb{Q}$;
il faut utiliser le caractère archimédien de $\mathbb{Q}$;
écrire $\frac{3n+4}{2n} = \frac{3}{2} + \frac{2}{n}$

3. Déterminer (avec des preuves) pour quels entiers naturels n, on a $2^n \leq n!$.

Analyse 1 Christophe Reutenauer Exercices 3

1. Soient E, F des parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$. ("borné" signifie majoré et minoré). On suppose $E \subseteq F$. Montrer que $\inf(F) \leq \inf(E) \leq \sup(E) \leq \sup(F)$.

2. Montrer que si $E \subseteq \mathbb{R}$ est borné non vide, alors l'intervalle $[\inf(E), \sup(E)]$ est le plus petit intervalle fermé $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ tel que $E \subseteq [a,b]$.

3. Soient E, F deux sous-ensembles non vides de $\mathbb{R}$, majorés. Montrer que
$$\sup(E \cup F) = \max(\sup(E), \sup(F))$$

4. Que se passe-t-il dans la question 3. si on remplace $E \cup F$ par $E \cap F$?

5. Montrer que si $b = \sup(E)$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $e \in E$ tel que $e \in [b - \frac{1}{n}, b]$.
(on verra plus tard que ceci signifie qu'il existe une suite dans E qui tend vers b).

6. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $\sup\{x \in \mathbb{Q} \mid x < a\} = a$.

7. Trouver les suprema et infima des parties suivantes de $\mathbb{R}$:
$\{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$, $\{1 + \frac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$, $\{\frac{2n}{2n-5}, n \in \mathbb{N}\}$

Analyse 1 Exercices 4

1. Dans cet exercice, on utilisera uniquement le résultat suivant : si $a < b$ sont des réels, alors il existe un rationnel r tel que $a < r < b$.

a) Montrer qu'il existe des rationnels r_1 et r_2 tels que $a < r_1 < r_2 < b$ (utiliser $\frac{a+b}{2}$)

b) Montrer que si $a, b \in \mathbb{Q}$, $a < b$, alors il existe une infinité de rationnels x tels que $a < x < b$.

c) Déduire de a) et b) que si $a < b$ et $a, b \in \mathbb{R}$, alors il existe une infinité de rationnels y tels $a < y < b$.

2. Soit a un nombre réel. Montrer que

$$\sup \{ x \in \mathbb{Q} \mid x < a \} = a$$

3. Même chose en remplaçant $\mathbb{Q}$ par $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

4. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\{x\} = x - [x]$.
On note $\theta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (appelé le nombre d'or).
Montrer que $\{x\} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ et que $\theta = 1 + \frac{1}{\theta}$.

5. Dessiner le graphe des deux fonctions :

$x \mapsto [x]$ $\qquad\qquad$ $x \mapsto |x|$

6. Si $x \geqslant 0$, on note $\sqrt{x}$ l'unique réel tel que $(\sqrt{x})^2 = x$. Montrer que pour tout réel y, on a $|y| = \sqrt{y^2}$.

7. Montrer que $\max\{a, b\} = \frac{a+b+|a-b|}{2}$ et

$\min\{a, b\} = \frac{a+b-|a-b|}{2}$.

8. Trouver les nombres réels qui satisfont aux relations ci-dessous : a) $|x-4| = 1$ b) $|x-4| < 1$

c) $|x-4| > 1$ d) $|2x-15| = 1$ e) $|2x-15| \leqslant 1$

Analyse 1 Exercices 5 Christophe Reutenauer

On utilisera dans l'exercice 1 le fait que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Diviser numérateur et dénominateur par l'expression appropriée.

1. Déterminer les limites des suites suivantes, si elles existent.

a) $\sqrt{n^2+1} - n$

b) $\sqrt{n^2+n} - n$

c) $\dfrac{n}{n+1}$

d) $\dfrac{(-1)^n}{n}$

e) $\dfrac{3n^2+5}{2n^2-4}$

f) $\dfrac{n+\sqrt{n}+1}{n-3}$

g) $\dfrac{n+(-1)^n\sqrt{n}+1}{n-3}$

h) $\dfrac{(-1)^n n^2+n-3}{2n^2+n-4}$

i) $\dfrac{2n^2+3}{n-1}$

Indication pour h) : montrer que si $\lim_{n\to\infty} u_n = l$ et $l \neq 0$, alors $(-1)^n u_n$ ne converge pas.

2. On pose $u_0 = 1$, $u_{n+1} = 2u_n^2$. Trouver une formule pour u_n. Indication : c'est une puissance de 2.

3. Montrer que $3^{\frac{1}{n}} \to 1$.

Indication : écrire $3^{\frac{1}{n}} = 1 + x_n$, $x_n > 0$. Montrer que

$$3 = 1 + nx_n + \cdots \geqslant 1 + nx_n \Rightarrow 2 \geqslant nx_n \Rightarrow x_n \leqslant \frac{2}{n}.$$

En déduire que $x_n \to 0$.

Montrer que ce raisonnement s'applique aussi à $a^{\frac{1}{n}} \to 1$ si $a > 1$.

4. Déduire de 3. que si $a \in]0,1[$, alors $a^{\frac{1}{n}} \to 1$.

5. Soit $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}$. Montrer que $a_n \geqslant 1$.

Montrer que $a_{n+1} \geqslant a_n$ (par récurrence).

Montrer que (a_n) est majorée (par 2, par exemple)

En déduire qu'elle converge.

Montrer que sa limite est le nombre d'or $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Analyse 1 C. Reutenauer Exercices 6

1. Soit $x_0 = 2$ et $x_{n+1} = 2 + \sqrt{x_n}$ pour $n \geq 0$. Montrer que (x_n) est ≥ 0, croissante et majorée par 4. Montrer que (x_n) converge et calculer sa limite.

2. Calculer la limite de $\dfrac{\sqrt{n+7} - \sqrt{n+5}}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}}$

3. Calculer $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n} + \sqrt{2}}$

4. Calculer $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$ avec $a, b > 0$

5. Calculer $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^2}{2^n}$

6. On suppose $a_0 > 0$ et $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1 + a_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Calculer la limite, après avoir justifié son existence.

7. Même chose avec $a_0 > 1$ et $a_{n+1} = \dfrac{a_n + 1}{2}$. (montrer que $a_n \geq 1$ etc...)

8. Même chose avec $a_0 = 0$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 + 1}{2}$.

Analyse 1 Exercices 7 (préparation à l'examen 1)

1. On considère la suite définie par $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = \frac{2x_n + 3}{6}$ pour $n \geqslant 0$.

a) Montrer que $x_n \geqslant \frac{3}{4}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que cette suite est décroissante.

c) Montrer qu'elle a une limite et la calculer.

2. On suppose qu'on a deux suites $(x_n), (y_n)$ telles que
- x_n est croissante
- y_n est décroissante
- $\forall n \in \mathbb{N}, \ x_n \leqslant y_n$.

Montrer que chacune de ces suites a une limite. On les note x et y. Montrer que $x \leqslant y$.

On pose $u_n = y_n - x_n$ et on suppose que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. Montrer qu'alors $x = y$.

3. a) La suite $(0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$ converge-t-elle?

b) La suite $(0, 1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, \ldots)$ ―――――――

4. On définit (x_n) par $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = 3 + \sqrt{x_n}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (x_n) converge et calculer sa limite.

5. On définit $F_0 = F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} F_n = +\infty$

6. Calculer la limite de la suite (x_n) définie par $x_0 = 2$ et $x_{n+1} = 2 + \sqrt{x_n}$.

Analyse 1 Exercices 8 Christophe Rentenauer

* 1. Soit $E \subseteq \mathbb{R}$ tel que : pour toute suite convergente d'éléments de E, sa limite est dans E.
Montrer que E est fermé.
(montrer que si E n'est pas fermé, il existe un point $a \in E^c$ tel que $\forall \varepsilon > 0$, $V(a, \varepsilon)$ rencontre E et en déduire l'existence d'une suite dans E qui converge vers a).

** 2. Soit (x_n) une suite d'éléments de $E \subseteq \mathbb{R}$. On suppose que sa limite x n'est pas un point d'accumulation de E.
Montrer que : $\exists N$ tel que $\forall n \geqslant N$, $x_n = x$.

3. A quoi est égal $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left] -\frac{1}{n}, 3 + \frac{1}{n} \right[$?
Même question pour $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left] \frac{1}{n}, 3 - \frac{1}{n} \right[$?

4. Montrer que si $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$, alors $\overline{A} \subseteq \overline{B}$ et $A' \subseteq B'$.

5. Montrer que $\overline{A}$ = l'ensemble des limites des suites convergentes d'éléments de A (utiliser l'exercice 2 et la prop. 5).

6. Montrer que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et que $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$ (*).
Montrer par un exemple que l'on n'a pas égalité dans (*) en général. (utiliser l'exercice 5).

7. Montrer que si E a un point intérieur, alors il en a une infinité.

* 8. Soit (x_n) une suite de limite x. Montrer que $E = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ est fermé.

* pas facile
** difficile

** 9. Montrer que E' est fermé.

Exercices 9 Analyse 1 Christophe Reutenauer

1. On pose $b_0 = a_0$ et $b_n = a_n - a_{n-1}$ si $n \geqslant 1$.
Calculer les sommes partielles de la série $\sum b_n$.

2. Calculer $S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$. Utiliser (i) $\sum \frac{1}{n!} = e$; (ii) $\frac{n^2}{n!} = \frac{a}{(n-1)!} + \frac{b}{(n-2)!}$ pour $n \geqslant 2$ (calculer a et b).
Montrer aussi que S converge (NB $0! = 1$).

3. On suppose que $\sum a_n$, $\sum b_n$ convergent et que $a_n, b_n \geqslant 0$. Montrer que $\sum \sqrt{a_n b_n}$ converge.

** 4. On suppose $a_n \geqslant 0$, a_n décroissante. On suppose que $a_n \geqslant \frac{1}{n}$ pour une infinité de n. Montrer que $\sum a_n = \infty$.

5. On suppose que $a_n \geqslant 0$ et $\sum a_n$ converge. Montrer que si $p \in \mathbb{N}^*$, alors $\sum a_n^p$ converge.

6. On suppose que $a_n \geqslant 0$ et $\sum a_n$ converge.
Montrer que $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$ converge.

7. Montrer que si $a_n \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, alors $\sum_{n \geqslant 0} a_n 10^{-n}$ converge (représentation décimale).

8. Convergence ou divergence des séries
$\sum \frac{3^n + 7^n}{5^n}$ et $\sum \frac{3^n + 4^n}{5^n}$?

9. En comparant $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ et en écrivant
$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, montrer que $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

Analyse 1 Exercices 10 Christophe Reutenauer

1. Montrer que $x \mapsto |x|$, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.
2. Montrer que si f est continue $D \to \mathbb{R}$, alors $|f|$ est continue.
3. Soient f, g des fonctions continues $D \to \mathbb{R}$. Montrer que $\max(f, g)$ est continue.
4. Soit f une fonction $D \to \mathbb{R}$. On suppose qu'elles est <u>lipschitzienne</u>, c'est à dire qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x, y \in D$, $|f(x) - f(y)| \leq A|x-y|$.
   Montrer que f est continue.
5. Soit $I =]a, b[$. Construire une fonction continue bijective $]0, 1[\to]a, b[$.
6. Soit I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$. Construire une fonction continue surjective $]0,1[\to I$.
7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$.
   Montrer que f n'est pas continue en 0.
8. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et $\lambda, \mu > 0$.
   Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $\lambda f(a) - (\lambda+\mu) f(c) + \mu f(b) = 0$ (utiliser le th. des valeurs intermédiaires).
9. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \sin(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$, est continue.
10. Soit $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1-x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$
    Montrer que f n'est continue qu'au point $\frac{1}{2}$.
11. Soit $f(x) = \dfrac{x^2+x-6}{x-2}$ si $x \neq 2$. Peut-on définir $f(2)$ de telle manière que f soit continue partout sur $\mathbb{R}$?
12. En quels points la fonctions $x \mapsto [x]$ est-elle continue ?

Analyse 1 Exercices 11 Christophe Reutenauer

1. On suppose que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfait : $\forall x, y \in \mathbb{Q}$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$ et que f est continue. Montrer que : $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$, et que : $\exists a \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax$.

2. Soit f une fonction continue $]a,b[\to \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in]a,b[$ tel que $f(x_0) > 0$. Montrer qu'il existe un voisinage V de x_0 tel que $\forall x \in V$, $f(x) > 0$.

3. Soit $f : D \to \mathbb{R}$. On suppose que $D = D_1 \cup D_2$. On suppose que f est uniformément continue sur D_1, et aussi sur D_2. Montrer que f est uniformément continue sur D.

4. Montrer que si $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$, et $f(0) = 0$, alors f n'est pas continue en 0. Peut-on modifier la valeur de $f(0)$ pour que f soit continue en 0 ?

5. Montrer que la fonction $\sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0, \infty[$.

6. Soit $f, g : D \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in D'$. On suppose que f est bornée au voisinage de x_0 et que $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$. Montrer que $\lim_{x \to x_0} (f(x)g(x)) = 0$

7. Montrer que la continuité uniforme est préservée par a) somme, b) composition. L'est-elle aussi par le produit ?

Exercices 12 Analyse 1 C. Reutenauer

1. Une fonction f ($\mathbb{R} \to \mathbb{R}$) est dit paire (resp. impaire) si $f(x) = f(-x)$ (resp. $f(x) = -f(-x)$), $\forall x \in \mathbb{R}$.
Donner des exemples. Montrer que si f est paire (resp. impaire), et f dérivable sur $\mathbb{R}$, alors f' est impaire (resp. paire).

2. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continue, dérivable sur $]a,b[$. On suppose que $\forall c \in]a,b[$, $|f'(c)| \leq M$. Montrer que f est lipschitzienne (cf. Exercice 10.4)

3. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, dérivable sur $]a,b[$. On suppose que $\forall x \in]a,b[$, $f'(x) \neq 0$. Montrer que f est injective.

4. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, dérivable sur $]a,b[$.* Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c)f(c) + \frac{1}{2} = 0$ (considérer $f^2(x) + x$). * On suppose $f^2(a) - f^2(b) = b - a$

5. Dériver de deux manières différentes la fonction $(1+x)^n$. En déduire une formule pour $\sum_{1 \leq k \leq n} k \binom{n}{k}$.

6. On suppose f, g continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.
On suppose $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in]a,b[$. Utiliser $f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x) - g(a))$

1. Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et $\varepsilon > 0$. Soit δ tel que

$$\forall x,y \in [a,b], \quad |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon.$$

Soit $a_0 = a < a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ une subdivision telle que $\forall i = 0,\dots,n-1$, $a_i - a_{i-1} \leqslant \delta$.

Soit
$$m_i = \inf \{ f(x) \mid x \in [a_{i-1}, a_i] \}$$
$$M_i = \sup \{ f(x) \mid x \in [a_{i-1}, a_i] \}.$$

Soit φ une fonction en escalier égale à m_i sur $]a_{i-1}, a_i[$ et ψ une fonction en escalier égale à M_i sur $]a_{i-1}, a_i[$.

Comment définir φ, ψ pour que $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$?

Montrer que $\int_a^b \varphi \leqslant \int_a^b \psi$.

Montrer que $\int_a^b \psi - \int_a^b \varphi \leqslant (b-a)\varepsilon$.

2. Trouver deux fonctions en escalier sur $[1,n+1]$ φ et ψ telle que :

- $\forall x \in [1, n+1]$, $\varphi(x) \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \psi(x)$
- $\int_1^{n+1} \psi = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$
- $\int_1^{n+1} \varphi = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1}$

Exercices 14 (préparation à l'examen) Analyse 1 C. Reutenauer

1. $\mathbb{Q}$ est-il fermé ? $\mathbb{Q}$ est-il ouvert ?

2. Construire un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ ayant exactement deux points d'accumulation.

3. L'ensemble $\{\sin(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ a-t-il un point d'accumulation ?
(on admettra que π n'est pas rationnel)

4. Si A, B sont compacts, $A \cup B$ est-il compact ?

5. Soit $E \subseteq \mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $F = \{x + a \mid x \in E\}$.
Montrer que : E compact $\iff$ F compact.
E ouvert $\iff$ E ouvert.

6. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n 2^n}$ converge.

7. Idem pour $\sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{n!}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{\mathrm{Log}(n)}{n^2}$ (on admettra que $\mathrm{Log}\, n < \sqrt{n}$ pour n assez grand).

8. Calculer le nombre dont le développement en système binaire est $0{,}1010101010\ldots$

9. On considère une fonction continue $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui n'est ni strictement croissante, ni strictement décroissante. Montrer qu'elle n'est pas injective.

10. Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Montrer que si $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in [a, b]$, alors f est injective.