MAT1112

Matthieu ANEL

septembre 2010

1 Rappels sur les fonctions réelles d'une variable réelle

1.1 Les différents types de fonctions

Vocabulaire Si on veut être précis, on présente une fonction f sous la forme suivante

$$\begin{aligned} f : D &\longrightarrow R \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

- D s'appelle le *domaine de définition* de la fonction,
- R est l'ensemble des valeurs de la fonction (dans ce cours, ça sera toujours $\mathbb{R}$),
- x s'appelle la *variable*, c'est un élément de D,
- $f(x)$ s'appelle la *valeur de f en x*, c'est un élément de R.

En pratique, on simplifie les notations et on définit une fonction f par une formule, par exemple :
- $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ ou
- $f(x) = \tan(e^x)$.

Quant aux informations manquantes :
- dans ce cours l'ensemble des valeurs sera toujours $\mathbb{R}$,
- et le domaine de définition, s'il n'est pas précisé, sera défini implicitement comme l'ensemble des variables pour lesquelles la formule de la fonction fait sens.

Par exemple, le domaine de définition de $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ est $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, l'ensemble des nombre réels différents de 1.

1.1.1 Différents types de fonctions selon le domaine et l'ensemble de valeurs

On parle de variables ou de valeurs *réelles* car il existe aussi les fonctions à variables et valeurs dans les nombres complexes $\mathbb{C}$, mais ces fonctions seront étudiées dans un autre cours.

Fonction réelle d'une variable réelle

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

L'étude de ces fonctions est supposée être connue et sera rappelée brièvement dans ce cours et le suivant.

Fonction réelle de plusieurs variables réelles

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & f(x) \end{array}$$

C'est le sujet du cours que de prolonger les opérations connues sur les fonctions d'une variable (dérivation, intégration) aux fonctions de plusieurs variables.

Exemples de telles fonctions :
- température dans une pièce
- pression dans un fluide
- altitude sur une carte

Plusieurs fonctions réelles de plusieurs variables réelles

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & (f_1(x), \ldots, f_m(x)) \end{array}$$

Ces fonctions ne seront pas étudiées explicitement dans ce cours, mais leur étude se ramène à celle des différentes fonctions f_i.

Exemples de telles fonctions :
- trajectoire dans l'espace en fonction du temps $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$
- champ des vitesse dans un fluide $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$
- force exercée par la pression dans un fluide $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

1.1.2 Différents types de fonctions selon le type de formule

Voici les différents type de fonctions de base, qu'on peut combiner pour obtenir des fonctions plus complexes.

Type de fonction	formule	domaine de définition
Fonctions linéaires	$f(x) = ax$	$\mathbb{R}$
Fonctions affines	$f(x) = ax + b$	$\mathbb{R}$
Fonctions quadratiques	$f(x) = ax^2 + bx + c$	$\mathbb{R}$
Polynômes	$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$	$\mathbb{R}$
Fonction inverse	$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$	$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Fraction rationnelle	$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ où P et Q sont des polynômes	$\mathbb{R}$ privé des points où Q s'annule
Fonction racine carré	$f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$	$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \| x \geq 0\}$
Fonctions racine n-ième	$f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$	$\mathbb{R}_+$ si n pair
		$\mathbb{R}$ si n est impair
Fonctions trigonométriques		
Cosinus	$f(x) = \cos(x)$	$\mathbb{R}$
Sinus	$f(x) = \sin(x)$	$\mathbb{R}$
Tangente	$f(x) = \tan(x)$	$\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
Fonction exponentielle	$f(x) = e^x$	$\mathbb{R}$
Fonction logarithme	$f(x) = \ln(x)$	$\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

Il existe d'autres types de fonctions dites *définies par morceaux*

- fonction *valeur absolue*
$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$
- fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$
$$1_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
- fonction définie par morceaux quelconque
$$f(x) = \begin{cases} \ln(x) & \text{si } x \geq 1 \\ \frac{1}{x-1} & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

1.1.3 Opérations pour combiner les fonctions

- somme : $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- produit : $(fg)(x) = f(x)g(x)$
- quotient : $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$
- composition : $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

Attention la composition de deux fonctions n'a de sens que si les valeurs de g sont dans le domaine de définition de f. Si ce n'est pas le cas, il faut réduire le domaine de définition de g.

1.2 Limites

1.2.1 Opérations sur les limites

1.3 Continuité

Définition intuitive Une fonction est continue si son graphe se dessine d'un seul trait *sur chaque morceau de son domaine de définition.*

Exemple : la fonction tangente est continue.

Définition plus précise

1. Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est *continue* si elle est continue en tout point de D (notion définie ci-dessous).
2. Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est *continue en un point a de D* si la limite de f au point a égale la valeur de f en a, ce qui s'écrit symboliquement
$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$
et qui signifie que si x se rapproche de a, $f(x)$ doit se rapprocher de $f(a)$.
En d'autres termes, $f(x)$ doit pouvoir s'approcher autant qu'on veut de $f(a)$ lorsque x s'approche de a. C'est-à-dire que, si on veut que $|f(x) - f(a)|$ soit plus petit qu'un nombre ϵ donné, il doit exister un nombre δ (qui dépend de ϵ) tel que la condition $|x - a| \leq \delta$ entraine $|f(x) - f(a)| \leq \epsilon$.
Cette condition se réécrit symboliquement
$$\forall \epsilon, \exists \delta, (|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon) \, .$$
Dans ce cours, nous n'utiliserons pas une définition aussi précise de la continuité (ce sera le sujet du cours d'analyse) et elle n'est présentée ici que pour indiquer à quoi ressemble un traitement rigoureux de la notion de continuité.

Exemples Toutes les fonctions du tableau de 1.1.2 sont continues, ainsi que la fonction valeur absolue. Le dernier exemple
$$f(x) = \begin{cases} \ln(x) & \text{si } x \geq 1 \\ \frac{1}{x-1} & \text{si } x < 1 \end{cases}$$
n'est pas continue en 1, en effet $f(1) = \ln(1) = 0$ et
$$\lim_{x \to 1, x < 1} \frac{1}{x - 1} = -\infty \neq 0.$$
Quant à la fonction $1_{\mathbb{Q}}$ caractéristique de $\mathbb{Q}$, elle n'est continue en aucun point.

Proposition Toutes les combinaisons de fonctions continues par les opérations de 1.1.3 sont continues. Il n'y a à se soucier de la continuité que pour les fonctions définies par morceaux.

1.3.1 Théorème des valeurs intermédiaires

Énoncé Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, telle que $f(a)$ et $f(b)$ soient non nuls et de signes différents, alors f s'annule dans $]a, b[$.

Variante Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a) < f(b)$ alors pour tout c tel que $f(a) < c < f(b)$, il existe un $x \in]a,b[$ tel que $f(x) = c$.

En pratique, ce théorème est utilisé sous la première forme pour montrer l'existence de solutions à des équations du type $f(x) = 0$ quand on ne sait pas les calculer explicitement.

1.4 Dérivabilité

Rappel sur les droites du plan L'équation de droite (non verticale) dans le plan de coordonnées (x, y) est de la forme $y = \alpha x + \beta$. Le coefficient β est la hauteur à laquelle la droite coupe l'axe des y et le coefficient a est appelé la *pente de la droite*, c'est le nombre qui mesure de combien y a varié lorsque x a augmenté de 1. Si la pente est nulle ($\alpha = 0$), la droite est horizontale.

Si la droite est verticale, son équation est du type $x = \gamma$ où γ est la valeur de x où la droite coupe l'axe des x. On peut penser les droites verticales comme des droites dont la pente est infinie. On n'utilisera pas ces droites dans ce cours.

Définition intuitive de la dérivabilité

1. Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est *dérivable en un point* $a \in D$ si son graphe admet une tangente au point $(a, f(a))$ qui n'est pas une droite verticale. La pente de cette droite est appelé le *nombre dérivé de* f *en* a et noté $f'(a)$. [1]
2. Une fonction f est *dérivable*, si elle est dérivable en tout point de D.

Définition plus précise Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in D$ si le taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est tel qu'il admet une limite lorsque x se rapproche de a, cette limite est appelée le *nombre dérivé de* f *en* a et notée $f'(a)$. Symboliquement :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

En posant $h = x - a$, et en remarquant qu'il revient au même que x se rapproche de a ou que h se rapproche de 0, on peut aussi écrire la limite précédente sous la forme suivante :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = f'(a).$$

Lien entre les deux définitions Comme expliqué dans les notes de R. Bédard (p. 4), le taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est la pente de la droite qui coupe le graphe de f aux points de coordonnées $(a, f(a))$ et $(x, f(x))$. Lorsque x se rapproche de a, cette droite se rapproche de la tangente et à la limite, elle devient la tangente. on peut donc caculer la pente de la tangente comme la limite de la pente de cette droite.

Fonction dérivée Si $f : D \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable, la fonction dérivée de f, notée f', est la fonction

$$\begin{array}{rcl} f' : D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$$

Cette fonction est parfois notée $\frac{df}{dx}$ (notation de Leibniz).

1. C'est pour que ce nombre soit bien défini qu'il faut se restreindre aux droites non verticales.

Une fonction dérivable est toujours continue Supposons que $f(x)$ soit dérivable en a et montrons que $f(x)$ est continue en a. On veut montrer que

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

ou de manière équivalente que

$$\lim_{x\to a} f(x) - f(a) = 0.$$

On sait que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

d'où

$$\lim_{x\to a} f(x) - f(a) = \lim_{x\to a} f'(a)(x - a).$$

On conclut en utilisant que

$$\lim_{x\to a} f'(a)(x - a) = 0.$$

En revanche, toute fonction continue n'est pas forcément dérivable.

Exemple de fonctions continues non dérivable

- La fonction valeur absolue $|x|$ n'est pas dérivable en 0. Le taux d'accroissement en 0 est $\frac{|h|-|0|}{h} = \frac{|h|}{h}$ qui est une fonction qui vaut -1 si $h < 0$ et 1 si $h > 0$, la limite en 0 n'existe donc pas.
- La fonction $\sqrt[3]{x}$ n'est pas dérivable en 0 car la tangente en 0 existe mais est une droite verticale (cela est en fait vrai pour toutes les racines n-ième). Le taux d'accroissement en 0 est $\frac{\sqrt[3]{h} - \sqrt[3]{0}}{h} = \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}}$ et $\lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = +\infty$.

Équation de la tangente Soit (a, b) un point du plan, l'équation de la droite de pente α passant par (a, b) est

$$y = \alpha(x - a) + b.$$

On en déduit que *l'équation de la tangente au graphe de f au point* $(a, f(a))$ est

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Approximation d'une fonction par une autre fonction Ces notions ne sont pas au programme de ce cours et seront développées dans un cours d'Analyse, mais elles sont utiles pour comprendre pourquoi et comment les mathématiciens ont inventé la dérivée d'une fonction et comment on peut définir la dérivabilité d'une fonction à plusieurs variables.

Une des idées fondamentales de l'Analyse est que les fonctions polynomiales sont plus simples que les autres, et qu'il faut essayer d'approcher les fonctions non polynomiales par des polynômes (cela s'appelle les *développements limités*). Parmi les polynômes, ce sont les fonctions affines qui sont les plus simples et *il faut comprendre la théorie de la dérivation comme la théorie de l'approximation des fonctions par des fonctions affines.*

Afin d'être un plus précis, il faut introduire la notion suivante : soient f et g deux fonctions définies autour d'un point $a \in \mathbb{R}$ et k un nombre entier, on dit que g *approxime f au point a* (ce qu'on note $f(x) \sim_a g(x)$) si

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - g(x)}{x - a} = 0.$$

ce qui veut dire en français que $f(x) - g(x)$ devient petit plus vite que $x - a$.

Si g approxime f en a alors $f(a) = g(a)$. En effet :

$$\lim_{x\to a} f(x) - g(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - g(x)}{x - a}.\lim_{x\to a}(x - a) = 0$$

Si on suppose que $g(x) = \alpha(x - a) + \beta$ et qu'on suppose que g est une approximation d'une fonction f, on déduit du calcul précédent que $\beta = g(a) = f(a)$. Et on déduit de ce résultat que $\alpha = f'(a)$:

$$0 = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - (\alpha(x - a) + f(a))}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \alpha. = f'(a) - \alpha.$$

On a donc

$$f(x) \sim_a f'(a)(x - a) + f(a)$$

On vient de prouver que l'approximation affine de f au voisinage de a est unique et est entièrement déterminée par $f(a)$ et $f'(a)$. Il faut aussi remarquer que le graphe de $g(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$ est celui de la tangente en $(a, f(a))$ au graphe de f.

Il existe des généralisations où le polynôme de degré 1 $f'(a)(x - a) + f(a)$ est remplacé par un poynôme de plus grand degré. Ces approximation utilisent les dérivées supérieures et forment la théorie des développements de Taylor :

$$f(x) \sim f(a) + f'(a)(x - a) + f''(a)\frac{(x - a)^2}{2} + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{(x - a)^n}{n!}$$

1.4.1 Dérivées des fonctions usuelles

Type de fonction	Fonction	Fonction dérivée
Fonctions linéaires	$f(x) = ax$	$f'(x) = a$
Fonctions affines	$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$
Fonctions quadratiques	$f(x) = ax^2 + bx + c$	$f'(x) = 2ax + b$
Polynômes	$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$	$f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} \cdots + 2a_2 x + a_1$
Fonction inverse	$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
Fonction racine carré	$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{2x}$
Fonctions racine n-ième	$f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$	$f'(x) = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{\sqrt[n]{x}}{nx}$
monôme de degré n	$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
fonctions trigonométriques :		
cosinus	$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$
sinus	$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$
tangente	$f(x) = \tan(x)$	$f'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
fonction exponentielle	$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
fonction logarithme	$f(x) = \ln(x)$	$f(x) = \frac{1}{x}$

1.4.2 Compatibilité de la dérivation aux opérations sur les fonctions

	Fonction	Fonction dérivée
Somme	$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ $(f+g+h)(x) = f(x) + g(x) + h(x)$	$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ $(f+g+h)'(x) = f'(x) + g'(x) + h'(x)$
Produit (Règle de Leibniz)	$(fg)(x) = f(x)g(x)$ $(fgh)(x) = f(x)g(x)h(x)$	$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ $(fgh)'(x) = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$
Composition (Règle de la chaine)	$(f \circ g)(x) = f(g(x))$ $(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x)))$	$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$ $(f \circ g \circ h)'(x) = f'(g(h(x)))g'(h(x))h'(x)$

En combinant les règles précédentes on en déduit les suivantes :

	Fonction	combinaison utilisée pour le calcul	Fonction dérivée
Inverse	$\frac{1}{g(x)}$	$\frac{1}{g(x)} = (f \circ g)(x)$ où $f(x) = \frac{1}{x}$	$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \frac{-g'(x)}{g(x)^2}$
Quotient	$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)\frac{1}{g(x)}$	$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)}{g(x)^2}$

1.4.3 Dérivées supérieures

La fonction f' dérivée de f peut elle-même être dérivable, si c'est le cas, on note f'' la dérivée de f' et on l'appelle la *dérivée seconde* de f (et on parle alors de f' comme de la *dérivée première* de f). Si f'' est dérivable, on note f''' sa dérivée et on l'appelle la *dérivée troisième* de f, etc.

Les $'$ et $''$ dans f' et f'' sont en fait des chiffres romains et la notation doit continuer comme telle, par exemple, on note f^{iv} la dérivée de f'''. On comprend que cette notation, si elle est commode pour les premières dérivées, devient vite complexe pour les dérivées supérieures ; il existe d'autres notations qui sont plus aisées :

- on peut noter $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f
- ou utiliser la notation de Leibniz $\frac{d^n f}{dx^n}$.

1.4.4 Tableau de variation d'une fonction

L'étude de la dérivée d'une fonction donne des informations sur le comportement de la fonction. L'idée est simple et se comprend bien géométriquement : si la tangente monte quand x augmente (c'est-à-dire si sa pente est un nombre positif), la fonction monte aussi et si si la tangente descend quand x augmente (c'est-à-dire si sa pente est un nombre négatif), la fonction descend aussi.

On va donc pouvoir décrire le mouvement de la fonction (on appelle ça les *variations de la fonction*) en étudiant le signe de la dérivée.

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction, et $D' \subset D$ un sous-ensemble de D

- on dit que f *croit sur* D' ou est *croissante sur* D' si, pour tous $x \leq y$ dans D, on a $f(x) \leq f(y)$
- on dit que f *décroit sur* D' ou est *décroissante sur* D' si, pour tous $x \leq y$ dans D, on a $f(x) \geq f(y)$

Utilisation de la dérivée pour savoir les variations de la fonction.

$f'(x) \geq 0$ sur D'	la fonction croit sur D'
$f'(x) = 0$	x est un point stationnaire (on dit aussi un point critique) de f
$f'(x) \leq 0$ sur D'	la fonction décroit sur D'

Suivant cette analyse, une fonction f va changer de variation (c'est-à-dire augmenter après avoir diminuée ou le contraire) si et seulement si sa dérivée f' change de signe, or (d'après le théorème des valeurs intermédiaires) un changement de signe de f' demande à ce qu'elle s'annule quelque part. D'où l'idée de regarder les points vérifiant $f'(x) = 0$, pour trouver les points où f change de variation. Toutefois, tous les points où $f'(x) = 0$ ne sont pas forcément des point où la variation de f change ; afin de le rendre clair, on introduit le vocabulaire suivant.

Soit x un point de D, on dit que x est un *point critique de* f si $f'(x) = 0$. Un point critique x est dit
- un *maximum local*, s'il existe deux nombres a et b tels que $a \leq x \leq b$ tels que f soit croissante sur $[a, x]$ et décroissante sur $[x, b]$,
- un *minimum local*, s'il existe deux nombres a et b tels que $a \leq x \leq b$ tels que f soit décroissante sur $[a, x]$ et croissante sur $[x, b]$,
- un *point d'inflexion*, s'il existe deux nombres a et b tels que $a \leq x \leq b$ tels que f soit croissante ou décroissante sur $[a, b]$.

Les deux notions de maximum et minimum correspondent aux changements de variations mais la troisième correspond à un point où la variation de f ne change pas.

interprétation en terme de sur/sous/à travers la tangente

Utilisation de la dérivée seconde pour savoir si un extremum est un maximum, un minimum ou un point d'inflexion : soit f une fonction deux fois dérivable et soit x tel que $f'(x) = 0$ alors

x est un maximum local si	$f''(x) < 0$,
x est un point d'inflexion si	$f''(x) = 0$,
x est un minimum local si	$f''(x) > 0$.

Plus tard dans le cours, nous allons voir comment ce critère se généralise pour les fonctions à plusieurs variables.

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, le protocole d'étude des variations de f est le suivant

1. on résoud l'inéquation $f'(x) \geq 0$ et on trouve un certain sous-ensemble D' de D
2. on en déduit aussi les solutions $f'(x) \leq 0$
3. on en déduit les solutions de l'équation $f'(x) = 0$ (extrema)
4. on calcule les valeurs de f aux extrema
5. on calcule les limites de f au bord de D
6. on trace un tableau à trois lignes :
   - la première indique les bords de D et de D'
   - la deuxième indique le signe de la dérivée
   - la troisième indique si la fonction monte au descend ainsi que les valeurs aux extrema et les valeurs limites au bord de D

Exemple $f(x) = x^3 - x + \frac{1}{3}$, le domaine et tout $\mathbb{R}$. $f'(x) = 3x^2 - 1$, on calcule son signe :

$$\begin{aligned}
f'(x) \geq 0 \quad &\iff \quad 3x^2 - 1 \geq 0 \\
&\iff \quad 3x^2 \geq \frac{1}{3} \\
&\iff \quad x \geq \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{ou} \quad x \leq -\frac{1}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}+2}{3\sqrt{3}} \simeq 0.72$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}-2}{3\sqrt{3}} \simeq -0.05$	$\nearrow$	$+\infty$

L'intérêt de ce tableau est de pouvoir dire des choses sur l'équation $f(x) = 0$ (qu'on ne peut pas toujours résoudre explicitement). Ainsi, en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, on peut déduire que $x^3 - x + \frac{1}{3} = 0$ a trois solutions : l'une dans $]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}[$, une autre dans $]-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}[$ et la dernière dans $]\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty[$.