Université du Québec à Montréal **Session d'automne 2011**
Groupe-cours 51 **MAT1112 - Calcul I**

Corrigé du Devoir 1

14 octobre 2011

Exercice 1. k est un réel strictement positif, et

$$u(x,t) = e^{-4kt}\cos(2x) - 3\ e^{-\frac{k}{4}t}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\ .$$

(a) On calcule en utilisant les règles habituelles de dérivation :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= -4ke^{-4kt}\cos(2x) - 3\left(-\frac{k}{4}\right)e^{-\frac{k}{4}t}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\\ &= k\left(-4e^{-4kt}\cos(2x) + \frac{3}{4}e^{-\frac{k}{4}t}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)\ .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Et : }\quad \frac{\partial u}{\partial x} &= e^{-4kt}(-2\sin(2x)) - 3\ e^{-\frac{k}{4}t}\left(\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right) \qquad \text{, puis}\\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= e^{-4kt}(-2)\times 2\cos(2x) - 3\ e^{-\frac{k}{4}t}\left(\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)\\ &= -4e^{-4kt}\cos(2x) + \frac{3}{4}e^{-\frac{k}{4}t}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\ .\end{aligned}$$

Donc on a bien l'égalité :

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}\ .$$

(b) La température dans le fil à un point fixé x est donnée par

$$u(x,t) = e^{-4kt}\cos(2x) - 3\ e^{-\frac{k}{4}t}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\ .$$

Lorsque t tend vers $+\infty$, $-4kt$ tend vers $-\infty$, car $k > 0$. Donc $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-4kt} = 0$. De même, $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-\frac{k}{4}t} = 0$. D'autre part, x étant fixé, $\cos(2x)$ et $\sin(x/2)$ sont des constantes. D'après les opérations sur les limites, on obtient donc :

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty} u(x,t) &= 0\times\cos(2x) - 3\times 0\times\sin\left(\frac{x}{2}\right)\\ &= \boxed{0}\ .\end{aligned}$$

Conclusion : à mesure que le temps passe, la température dans le fil, en n'importe quel point, tend vers 0.

Exercice 2. Nous avons la fonction

$$h(x,y) = \sqrt[4]{x^3 + 2xy + y^2 - 3} = (x^3 + 2xy + y^2 - 3)^{\frac{1}{4}}.$$

On demande d'estimer sans calculatrice la valeur numérique de $h(4.027, 2.018)$ à partir de celle de $h(4,2)$. Nous allons utiliser le théorème d'approximation linéaire pour les fonctions à deux variables.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{1}{4}(x^3+2xy+y^2-3)^{-\frac{3}{4}} \times (3x^2+2y) \\
&= \frac{1}{4}\frac{3x^2+2y}{\left(\sqrt[4]{x^3+2xy+y^2-3}\right)^3} \ .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial y} &= \frac{1}{4}(x^3+2xy+y^2-3)^{-\frac{3}{4}} \times (2x+2y) \\
&= \frac{1}{2}\frac{x+y}{\left(\sqrt[4]{x^3+2xy+y^2-3}\right)^3} \ .
\end{aligned}
$$

La fonction $\frac{\partial h}{\partial x}$ est obtenue à partir d'opérations sur des fonctions usuelles, donc est continue sur son domaine de définition D. Posons $g(x,y) = x^3 + 2xy + y^2 - 3$. On a $g(4,2) = 81 > 0$, donc le point $(4,2)$ appartient à D. De plus, si un point (x,y) est assez proche de $(4,2)$, il est aussi dans D. Donc en particulier, on peut affirmer qu'il existe un rectangle R, dont l'intérieur contient le point $(4,2)$, tel que $\frac{\partial h}{\partial x}$ est continue sur R.

La fonction $\frac{\partial h}{\partial y}$ est également obtenue à partir d'opérations sur des fonctions usuelles, donc est continue sur son domaine de définition. De plus elle a le même domaine de définition D que $\frac{\partial h}{\partial x}$: l'ensemble des points où $g(x,y) > 0$. Donc, de même que ci-dessus, $\frac{\partial h}{\partial y}$ est continue sur R.

Nous sommes donc dans les hypothèses du théorème d'approximation linéaire (Thm. 4.2. du recueil de notes). Posons $(a,b) = (4,2)$, $u = 0.027$ et $v = 0.018$. On a :

$$
h(a+u, b+v) \simeq h(a,b) + \left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{(a,b)} u + \left.\frac{\partial h}{\partial y}\right|_{(a,b)} v \ .
$$

Ici : $\left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{(4,2)} = \frac{1}{4} \times \frac{52}{3^3} = \frac{13}{27}$ et $\left.\frac{\partial h}{\partial y}\right|_{(4,2)} = \frac{1}{2} \times \frac{6}{3^3} = \frac{1}{9}$.

Donc
$$
\begin{aligned}
& h(4.027, 2.018) \simeq h(4,2) + \left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{(4,2)} \times 0.027 + \left.\frac{\partial h}{\partial y}\right|_{(4,2)} \times 0.018 \\
& h(4.027, 2.018) \simeq 3 + \frac{13}{27} \times 0.027 + \frac{1}{9} \times 0.018 \\
& \boxed{h(4.027, 2.018) \simeq 3.015} \ .
\end{aligned}
$$

Exercice 3. Soit la fonction

$$
f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3 - 4xy^2 + y^3}{x^2 + 3y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \ ; \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \ . \end{cases}
$$

(a) *Expliquer pourquoi f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.*

Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, f est définie à partir d'une formule qui est obtenue par opérations sur des fonctions usuelles (ici polynômes). Lorsque $(x,y) \neq (0,0)$, $x^2 + 3y^2 \neq 0$, donc il n'y a pas de problème de définition. Donc f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(b) *Montrer que f est continue en $(0,0)$. On pourra utiliser une majoration de $|f(x,y)|$ par une fonction plus simple.*

Nous avons $f(0,0)=0$, donc par définition de la limite, il faut montrer que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$. Pour cela, nous allons majorer $|f(x,y)|$ par une fonction qui tend vers 0 en $(0,0)$.
En utilisant l'inégalité triangulaire, nous avons

$$|f(x,y)| = \left|\frac{2x^3-4xy^2+y^3}{x^2+3y^2}\right| \leq \frac{2|x^3|}{x^2+3y^2} + \frac{4|xy^2|}{x^2+3y^2} + \frac{|y^3|}{x^2+3y^2} \ .$$

Notons que $x^2+3y^2 \geq x^2$, donc $\dfrac{2|x^3|}{x^2+3y^2} \leq \dfrac{2|x^3|}{x^2} = 2|x|$.
De la même façon, $x^2+3y^2 \geq 3y^2$, donc $\dfrac{4|xy^2|}{x^2+3y^2} \leq \dfrac{4|xy^2|}{3y^2} = \dfrac{4}{3}|x|$.
Et $\dfrac{|y^3|}{x^2+3y^2} \leq \dfrac{|y^3|}{3y^2} = \dfrac{1}{3}|y|$. Donc finalement :

$$|f(x,y)| \leq \frac{10}{3}|x| + \frac{1}{3}|y| \ .$$

Posons $g(x,y) = \frac{10}{3}|x| + \frac{1}{3}|y|$. Par opérations sur les limites, on a :

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} (\tfrac{10}{3}|x|) + \lim_{(x,y)\to(0,0)} (\tfrac{1}{3}|y|) \\
&= \lim_{x\to 0} (\tfrac{10}{3}|x|) + \lim_{y\to 0} (\tfrac{1}{3}|y|) \\
&= 0+0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Comme on a $0 \leq |f(x,y)| \leq g(x,y)$, on peut conclure que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, et, puisque $f(0,0)=0$, cela signifie que $\boxed{f \text{ est continue en } (0,0)}$.

Remarque : Une autre méthode est possible en utilisant les coordonnées polaires. On pose $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ (avec $r = \sqrt{x^2+y^2} \geq 0$). On a alors

$$f(x,y) = \frac{2r^3\cos^3\theta - 4r\cos\theta \times r^2\sin^2\theta + r^3\sin^3\theta}{r^2\cos^2\theta + 3r^2\sin^2\theta} = r\ \frac{2\cos^3\theta - 4\cos\theta\sin^2\theta + \sin^3\theta}{\cos^2\theta + 3\sin^2\theta} \ .$$

Utilisons l'inégalité triangulaire pour majorer la valeur absolue du numérateur :
$|2\cos^3\theta - 4\cos\theta\sin^2\theta + \sin^3\theta| \leq 2|\cos^3\theta| + 4|\cos\theta||\sin^2\theta| + |\sin^3\theta| \leq 2+4+1 = 7$, car $|\cos\theta| \leq 1$ et $|\sin\theta| \leq 1$.
D'autre part, $\cos^2\theta + 3\sin^2\theta = 1 + 2\sin^2\theta \geq 1$. Donc on obtient la majoration suivante :

$$|f(x,y)| = r\ \frac{|2\cos^3\theta - 4\cos\theta\sin^2\theta + \sin^3\theta|}{\cos^2\theta + 3\sin^2\theta} \leq r \times \frac{7}{1} = 7\sqrt{x^2+y^2}.$$

Or, lorsque (x,y) tend vers $(0,0)$, $7\sqrt{x^2+y^2}$ tend vers 0. Donc on a majoré $|f(x,y)|$ par une fonction qui tend vers 0 en $(0,0)$ et on peut conclure de la même façon qu'avec la méthode ci-dessus.

(c) *Calculer les dérivées partielles* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$*, lorsque* $(x, y) \neq (0, 0)$*.*

Pour $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(x, y)$ est définie par opérations sur les fonctions usuelles, donc on peut calculer ses dérivées partielles en utilisant les règles d'opérations habituelles. On obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{(6x^2 - 4y^2)(x^2 + 3y^2) - (2x^3 - 4xy^2 + y^3)(2x)}{(x^2 + 3y^2)^2} \\
&= \frac{2x^4 + 22x^2y^2 - 12y^4 - 2xy^3}{(x^2 + 3y^2)^2} \qquad , \text{ et} \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{(-8xy + 3y^2)(x^2 + 3y^2) - (2x^3 - 4xy^2 + y^3)(6y)}{(x^2 + 3y^2)^2} \\
&= \frac{-20x^3y + 3x^2y^2 + 3y^4}{(x^2 + 3y^2)^2} \ .
\end{aligned}$$

(d) *En utilisant la définition, calculer les dérivées partielles* $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}$ *et* $\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}$*.*

Ici, la fonction f, au voisinage de $(0, 0)$, est définie par morceaux : on est obligé de revenir à la définition première des dérivées pour faire le calcul. On a :

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2h^3}{h^2} - 0}{h} \\
&= \boxed{2} \qquad , \text{ et} \\
\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)} &= \lim_{k\to 0} \frac{f(0, 0 + k) - f(0, 0)}{k} \\
&= \lim_{k\to 0} \frac{\frac{k^3}{3k^2} - 0}{k} \\
&= \boxed{\frac{1}{3}} \ .
\end{aligned}$$

(e) *La fonction* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *est-elle continue sur* $\mathbb{R}^2$ *? Même question pour la fonction* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$*.*

D'après la question (c), sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est définie à partir d'une formule qui est obtenue par opérations sur des fonctions usuelles, donc elle est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Le seul problème qui peut se poser est en $(0, 0)$, puisque là $\frac{\partial f}{\partial x}$ est définie par morceaux, avec $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = 2$, d'après la question (d).

Nous allons montrer que $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0, 0)$. Pour cela, il suffit de trouver un chemin, passant par $(0, 0)$, tel que la limite, le long de ce chemin, de $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $(0, 0)$ n'est pas égale à $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = 2$. Prenons le chemin $x = 0$ par exemple. En utilisant la formule trouvée en (c), nous avons, pour $y \neq 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = \frac{-12y^4}{(3y^2)^2} = -\frac{4}{3}$$

qui tend vers $-\frac{4}{3}$ lorsque y tend vers 0. Comme $-\frac{4}{3} \neq 2$, on a montré que la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0,0)$.

Pour $\frac{\partial f}{\partial y}$, la méthode est la même. Pour les mêmes raisons que ci-dessus, elle est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et le problème peut se poser en $(0,0)$. Montrons qu'elle n'est pas continue en $(0,0)$.
Considérons le chemin $y = 0$. En utilisant la formule trouvée en (c), nous avons, pour $x \neq 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \frac{0}{x^4} = 0$$

qui tend vers 0 lorsque x tend vers 0. Or d'après la question (d), $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)} = \frac{1}{3} \neq 0$, donc on a montré que la fonction $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'est pas continue en $(0,0)$.

(f) *Déterminer la dérivée directionnelle* $f'((u,v),(0,0))$ *de* f *au point* $(0,0)$ *dans la direction* (u,v)*, en utilisant la définition théorique de la dérivée directionnelle. Aurait-on pu l'obtenir à partir des valeurs trouvées en (d) en utilisant une formule du cours ?*

Soit (u,v) une direction du plan. La définition de la dérivée directionnelle en $(0,0)$ dans la direction (u,v) donne :

$$\begin{aligned} f'((u,v),(0,0)) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+hu,0+hv) - f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2h^3u^3-4h^3uv^2+h^3v^3}{h^2u^2+3h^2v^2} - 0}{h} \\ &= \boxed{\frac{2u^3-4uv^2+v^3}{u^2+3v^2}} . \end{aligned}$$

Note : On pourrait simplifier un peu l'expression en utilisant le fait que $\sqrt{u^2+v^2} = 1$ (le vecteur de direction est unitaire), mais ce n'est pas nécessaire.

On se souvient qu'une formule du cours permet d'exprimer la dérivée directionnelle dans une direction donnée en fonction des dérivées partielles (Prop. 4.1. du recueil de notes). Si on l'appliquait ici, cela donnerait :

$$\begin{aligned} f'((u,v),(0,0) &=? \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} u + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)} v \\ &=? \ 2u + \frac{1}{3}v . \end{aligned}$$

On remarque que ce n'est pas du tout la même chose que le résultat trouvé plus haut avec la définition : $2u + \frac{1}{3}v \neq \frac{2u^3-4uv^2+v^3}{u^2+3v^2}$. La raison est que la formule ci-dessus n'est applicable que dans les cas où les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues dans un rectangle dont l'intérieur contient le point $(0,0)$. Or, on a prouvé en question (e) que $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ ne sont pas continues en $(0,0)$, donc il n'y a aucune chance de trouver un tel rectangle. *Les hypothèses de la Proposition 4.1. du cours ne sont pas vérifiées, on ne peut donc pas appliquer la formule.* Et on voit, avec cette fonction, que ces hypothèses sont vraiment importantes, puisque si on les néglige et qu'on applique quand même la formule on peut arriver à des résultats faux. (L'exercice 4.2. du recueil de notes donne d'autres exemples de ce problème.)

Exercice 4. Soit la fonction

$$g(x,y,z) = xyz - x^2y + 4y^3 - z^2 - 3x^2 - 6y^2.$$

(a) *Calculer le gradient* $\vec{\nabla} g|_{(-1,1,3)}$ *de* g *au point* $(-1,1,3)$.

Nous avons $\frac{\partial g}{\partial x} = yz - 2xy - 6x$; $\frac{\partial g}{\partial y} = xz - x^2 + 12y^2 - 12y$; et $\frac{\partial g}{\partial z} = xy - 2z$. Donc : $\frac{\partial g}{\partial x}\Big|_{(-1,1,3)} = 3+2+6 = 11$; $\frac{\partial g}{\partial y}\Big|_{(-1,1,3)} = -3-1+12-12 = -4$; $\frac{\partial g}{\partial z}\Big|_{(-1,1,3)} = -1-6 = -7$.

$$\text{D'où : } \boxed{\vec{\nabla} g|_{(-1,1,3)} = (11,-4,-7)} \,.$$

(b) *Déterminer la dérivée directionnelle* $g'((\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{2}{3}),(-1,1,3))$ *de* g *au point* $(-1,1,3)$ *dans la direction* $(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{2}{3})$.

Les trois dérivées partielles de g sont continues sur $\mathbb{R}^3$ entier, donc en particulier sur un rectangle autour du point $(-1,1,3)$. Donc d'après la formule du cours (Prop. 4.1" du recueil de notes) :

$$\begin{aligned} g'((\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{2}{3}),(-1,1,3)) &= \vec{\nabla} g|_{(-1,1,3)} \cdot (\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{2}{3}) \\ &= (11,-4,-7)\cdot(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{2}{3}) \\ &= 11\times\frac{2}{3} - 4\times\left(-\frac{1}{3}\right) - 7\left(-\frac{2}{3}\right) \\ &= \boxed{\frac{40}{3}} \,. \end{aligned}$$

(c) *Déterminer le ou les points critiques de* $g(x,y,z)$*, c'est-à-dire les points* $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ *tels que*

$$\frac{\partial g}{\partial x}\Big|_{(a,b,c)} = 0 \quad \underline{et} \quad \frac{\partial g}{\partial y}\Big|_{(a,b,c)} = 0 \quad \underline{et} \quad \frac{\partial g}{\partial z}\Big|_{(a,b,c)} = 0 \,.$$

Nous avons calculé les trois dérivées partielles à la question (a). Ici on doit donc résoudre le système d'équations suivant

$$\begin{cases} yz - 2xy - 6x = 0 & \text{(L1)} \\ xz - x^2 + 12y^2 - 12y = 0 & \text{(L2)} \\ xy - 2z = 0 & \text{(L3)} \end{cases}$$

D'après (L3), on a $z = \frac{xy}{2}$. Remplaçons z dans la ligne (L1) : (L1) devient

$$\begin{aligned} \frac{xy^2}{2} - 2xy - 6x &= 0 \quad \text{que l'on peut factoriser :} \\ x(\frac{y^2}{2} - 2y - 6) &= 0 \end{aligned}$$

Donc, soit $x=0$, soit $\frac{y^2}{2} - 2y - 6 = 0$.
Résolvons d'abord cette équation en y. Discriminant : $\Delta = (-2)^2 - 4(\frac{1}{2})(-6) = 16$. Donc les solutions sont

$$y_1 = \frac{2+\sqrt{16}}{2\times\frac{1}{2}} = 6 \quad \text{et} \quad y_2 = \frac{2-\sqrt{16}}{2\times\frac{1}{2}} = -2 \,.$$

Nous avons donc 3 cas à considérer : $x=0$ ou $y=6$ ou $y=-2$.

1er cas : $x = 0$. Alors $z = \frac{xy}{2} = 0$. Reportons dans la ligne (L2), on obtient $12y^2 - 12y = 0$, donc $y(y-1) = 0$, donc $y = 0$ ou 1. On a donc déjà deux solutions pour (x, y, z) : $(0, 0, 0)$ et $(0, 1, 0)$.

2e cas : $y = 6$. Alors $z = \frac{xy}{2} = 3x$. Reportons dans la ligne (L2), on obtient $3x^2 - x^2 + 12 \times 6^2 - 12 \times 6 = 0$, ce qui donne après simplifications $x^2 = -180$. Ceci n'a pas de solution réelle.

3e cas : $y = -2$. Alors $z = \frac{xy}{2} = -x$. Reportons dans la ligne (L2), on obtient $-x^2 - x^2 + 12(-2)^2 - 12(-2) = 0$ ce qui donne $x^2 = 36$, donc $x = \pm 6$. Si $x = 6$, $z = -6$, et si $x = -6$, $z = 6$. On trouve ainsi deux nouvelles solutions de notre système : $(6, -2, -6)$ et $(-6, -2, 6)$.

Conclusion : Les solutions du système d'équations (c'est-à-dire les points critiques de g) sont :

$$\boxed{(0,0,0) \quad ; \quad (0,1,0) \quad ; \quad (6,-2,-6) \quad ; \quad (-6,-2,6)}\,.$$