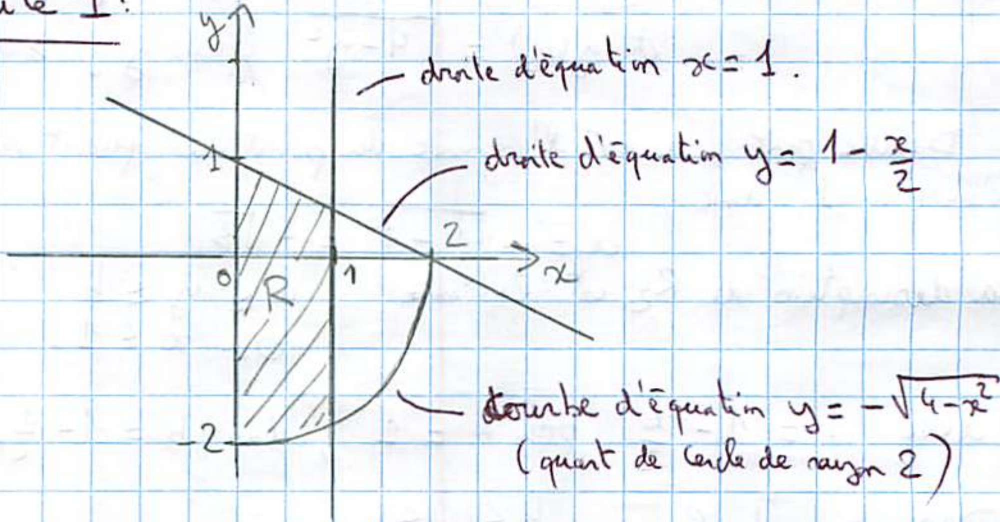
UQÀM
Automne 2011
MAT1112 – Calcul I
Groupe-cours 51.

Corrigé du Devoir 2 (2/12/11)

Exercice 1 :

a)

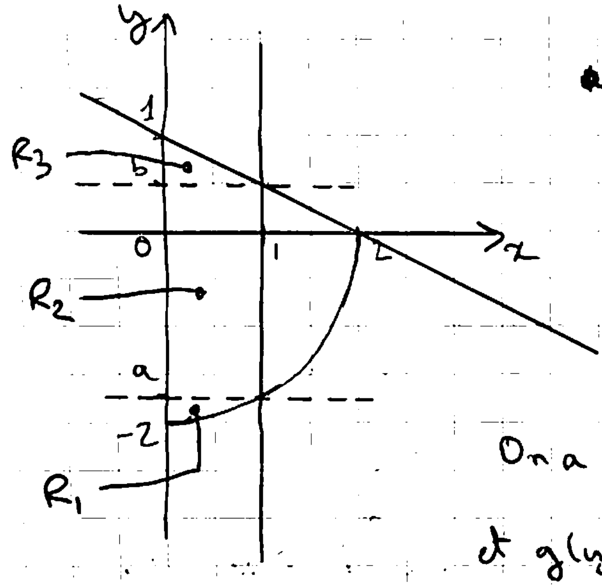


b) Soit $f(x,y)$ une fonction continue. Posons $I = \iint_R f(x,y)\,dA$.

∗ Considérons d'abord les x, puis les y. La région R est alors donnée par les inéquations :
$$0 \le x \le 1$$
$$-\sqrt{4-x^2} \le y \le 1 - \frac{x}{2}$$
(c'est même la façon dont R est définie dans l'énoncé)

On a donc, d'après le théorème sur les intégrales itérées :
$$I = \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{1-\frac{x}{2}} f(x,y)\,dy \right) dx .$$

∗ Essayons maintenant de décrire R d'abord avec les y, puis avec les x. On voit avec le dessin que R se décompose en 3 régions R_1, R_2 et R_3 faciles à décrire :



- La description de R_1 est :

$$-2 \leq y \leq a$$

$$0 \leq x \leq g(y)$$

où $g(y)$ est l'équation du quart de cercle en y.

On a donc : $g(y)^2 + y^2 = 4$

et $g(y) = \sqrt{4-y^2}$ (car $g(y) \geq 0$).

D'autre part, a est l'ordonnée du point du quart de cercle d'abscisse 1, donc :

$$a = -\sqrt{4-1^2} = -\sqrt{3}$$

- La description de R_2 est évidente : $a \leq y \leq b$, $0 \leq x \leq 1$.

avec $b = 1 - \frac{x}{2}$ pour $x = 1$, donc $b = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

- Description de R_3 : $b \leq y \leq 1$, $0 \leq x \leq h(y)$

où $h(y)$ est la fonction de y correspondant à la droite d'équation $y = 1 - \frac{x}{2}$, donc $\frac{x}{2} = 1 - y$, et $x = 2 - 2y$,

donc $h(y) = 2 - 2y$.

Finalement, en utilisant les propriétés des intégrales doubles, et le théorème sur les intégrales itérées, on obtient :

$$I = \iint_R f(x,y)\, dA = \iint_{R_1} f(x,y)\, dA + \iint_{R_2} f(x,y)\, dA + \iint_{R_3} f(x,y)\, dA$$

$$I = \int_{-2}^{-\sqrt{3}} \left(\int_0^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\, dx \right) dy$$

$$+ \int_{-\sqrt{3}}^{1/2} \left(\int_0^1 f(x,y)\, dx \right) dy + \int_{1/2}^{1} \left(\int_0^{2-2y} f(x,y)\, dx \right) dy.$$

Exercice 2 : (quart d'ellipse)

$$E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$$

a) L'aire de E est définie par : $A = \iint 1 \, dx dy$.

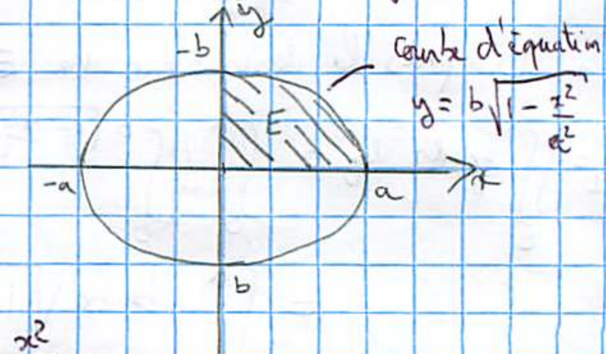
Décrivons E de manière à pouvoir utiliser des intégrales itérées.

Si on commence par x :

$x \geq 0$,

et $x \leq a$ car $\frac{x^2}{a^2} \leq 1 - \frac{y^2}{b^2} \leq 1$.

Donc $0 \leq x \leq a$.



Pour y : $y \geq 0$, et $\frac{y^2}{b^2} \leq 1 - \frac{x^2}{a^2}$

donc $y^2 \leq b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$ donc (comme $y \geq 0$).

$$y \leq \sqrt{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)} = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}.$$

Donc d'après le théorème sur les intégrales itérées, on a :

$$A = \int_0^a \left(\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} 1 . \, dy \right) dx$$

$$= \int_0^a b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \, dx$$

Le changement de variable $x = a\sin(t)$ est bien adapté :

- $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Pour $x = 0$, $t = 0$, et pour $x = a$, $t = \frac{\pi}{2}$
- $dx = a\cos t \, dt$, et $\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t}$

$$= \cos t, \text{ car } t \in [0, \tfrac{\pi}{2}]$$

Donc : $A = b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \times a\cos t \, dt$

$$A = ab\int_0^{\pi/2} \cos^2 t \, dt = ab\int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos(2t)}{2} \, dt = ab\left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{\pi/2}$$

On obtient $\boxed{A = \frac{\pi ab}{4}}$.

Remarque : on aurait pu aussi calculer l'aire de E directement avec une intégrale simple, car c'est l'aire située sous la courbe d'équation $y = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$. Le calcul au final est le même (mais ce n'était pas la méthode demandée par l'énoncé).

b) On a besoin de calculer $\iint_E x \, dx\, dy$ et $\iint_E y \, dx\, dy$.

- D'après la description de E faite en (a), on a :

$$I_1 = \iint_E x \, dx\, dy = \int_0^a \left(\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} x \, dy \right) dx$$

$$= \int_0^a b\, x \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \, dx$$

(On reconnaît quelque chose de la forme $u'\sqrt{u}$)

Changement de variable : $u = 1 - \frac{x^2}{a^2}$

$$du = -\frac{2x}{a^2} dx$$

$$I_1 = b \int_1^0 \sqrt{u} \left(\frac{-a^2}{2}\right) du$$

$$= \frac{a^2 b}{2} \int_0^1 \sqrt{u} \, du = \frac{a^2 b}{2} \left[\frac{u^{3/2}}{3/2} \right]_0^1 = \frac{a^2 b}{3}.$$

Remarque : on aurait pu utiliser l'autre description de E (d'abord y, puis x), le calcul est alors un peu plus simple.

On obtient donc que l'abscisse x_C du centre de gravité C de E est :

$$x_C = \frac{\iint_E x \, dx\, dy}{\iint_E dx\, dy} = \frac{I_1}{A} = \frac{\frac{a^2 b}{3}}{\pi \frac{ab}{4}}$$

$$\boxed{x_C = \frac{4a}{3\pi}}$$

- Calculons maintenant $I_2 = \iint_E y \, dx\, dy$.

$$I_2 = \int_0^a \left(\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} y \, dy \right) dx = \int_0^a \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dx$$

$$= \int_0^a \frac{1}{2} b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx$$

$$= \frac{b^2}{2} \left[x - \frac{x^3}{3a^2} \right]_0^a$$

$$= \frac{b^2}{2} \left(a - \frac{a^3}{3a^2} \right) = \frac{b^2 a}{3}.$$

Remarque : on aurait pu utiliser l'autre description de E, le calcul aurait alors été analogue ~~à~~ à celui que nous avons fait pour I_1.

Donc l'ordonnée du centre de gravité est :

$$y_c = \frac{\iint_E y \, dx \, dy}{\iint_E dx \, dy} = \frac{I_2}{A} = \frac{\frac{b^2 a}{3}}{\frac{\pi a b}{4}}$$

$$\boxed{y_c = \frac{4b}{3\pi}}$$

Exercice 3 :

$$I(a) = \int_0^a e^{-t^2} dt. \qquad f(x,y) = e^{-x^2-y^2}.$$

$C(a) = [0,a] \times [0,a]$ (carré de côté a)

$D(a) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ x^2+y^2 \leq a^2\}$ (quart de disque de rayon a)

a) $C(a)$ est un carré, donc d'après le théorème sur les intégrales itérées :

$$\iint_{C(a)} f(x,y) \, dx \, dy = \int_0^a \left(\int_0^a e^{-x^2-y^2} dy \right) dx \quad \text{(par exemple)}$$

$$= \int_0^a \left(\int_0^a e^{-x^2} e^{-y^2} dy \right) dx.$$

e^{-x^2} ne dépend pas de y, donc on peut le sortir de l'intégrale intérieure :

$$\iint_{C(a)} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^a e^{-x^2} \underbrace{\left(\int_0^a e^{-y^2}\,dy\right)}_{\text{ceci est égal à } \int_0^a e^{-t^2}\,dt \,=\, I(a)} dx$$

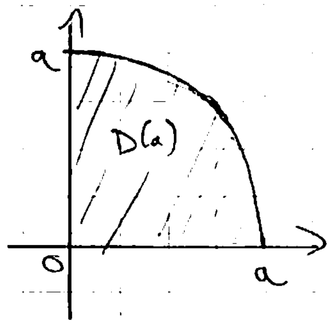
en particulier c'est une constante donc on peut la sortir de l'intégrale extérieure :

$$= I(a) \int_0^a e^{-x^2}\,dx$$

$$= I(a) \times I(a)$$

$$= I(a)^2.$$

b) $D(a)$ est un quart de disque : de rayon a.



Les coordonnées polaires sont donc particulièrement adaptées.

La description de $D(a)$ est : $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$0 \leq r \leq a$.

D'après le théorème de changement de variables en polaires, on a :

$$\iint_{D(a)} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^a f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr\right) d\theta$$

avec $f(r\cos\theta, r\sin\theta) = e^{-r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta} = e^{-r^2}$

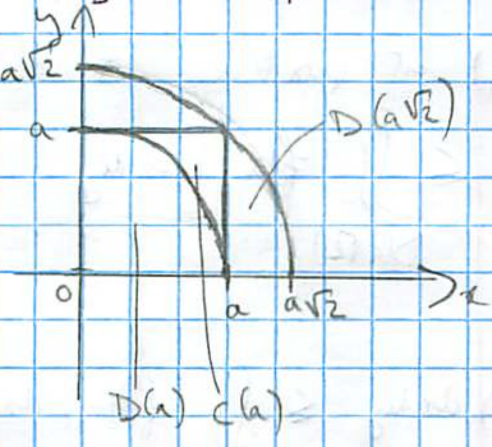
donc $$\iint_{D(a)} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^a r e^{-r^2}\,dr\right) d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2}\right]_0^a d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{1-e^{-a^2}}{2}\,d\theta$$

$$= \boxed{\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-a^2}\right)}$$

c) Traçons $D(a)$, $C(a)$ et $D(a\sqrt{2})$:



$a\sqrt{2}$ est la longueur de la diagonale du carré $C(a)$, donc le carré $C(a)$ est encadré par les quarts de disque $D(a)$ et $D(a\sqrt{2})$.

Appelons R la région des points de $C(a)$ privée des points de $D(a)$.

D'après les propriétés de l'intégrale double, on a :

$$\iint_{C(a)} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D(a)} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{R} f(x,y)\,dx\,dy,$$

donc $$\iint_{C(a)} f(x,y)\,dx\,dy - \iint_{D(a)} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{R} f(x,y)\,dx\,dy.$$

$f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$ donc $f(x,y)$ est toujours positive, donc son intégrale sur n'importe quelle région est positive.

On obtient donc $$\iint_{C(a)} f(x,y)\,dx\,dy - \iint_{D(a)} f(x,y)\,dx\,dy \geqslant 0$$

et $$\iint_{D(a)} f(x,y)\,dx\,dy \leq \iint_{C(a)} f(x,y)\,dx\,dy.$$

En fait, ceci est valable dès qu'une région R_1 est <u>incluse</u> dans une région R_2, on a alors

$$\iint_{R_1} f(x,y)\,dx\,dy \leq \iint_{R_2} f(x,y)\,dx\,dy$$

si f est positive.

De la même façon, comme $C(a)$ est inclus dans $D(a\sqrt{2})$, et comme $f(x,y)$ est positive, on obtient :

$$\iint_{C(a)} f(x,y)\,dx\,dy \leq \iint_{D(a\sqrt{2})} f(x,y)\,dx\,dy$$

En conclusion, on a bien :

$$\iint_{D(a)} f(x,y)\,dx\,dy \leq \iint_{C(a)} f(x,y)\,dx\,dy \leq \iint_{D(a\sqrt{2})} f(x,y)\,dx\,dy$$

d) • D'après la question (b), $\displaystyle\iint_{D(a)} f(x,y)\,dx\,dy = \frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-a^2}\right)$,

or $\displaystyle\lim_{a \to +\infty} \left(e^{-a^2}\right) = 0$, donc :

• $\displaystyle\lim_{a \to +\infty} \iint_{D(a)} f(x,y)\,dx\,dy = \boxed{\frac{\pi}{4}}$.

• D'après la question (c),

$$\iint_{D(a)} f(x,y)\,dx\,dy \leq \iint_{C(a)} f(x,y)\,dx\,dy \leq \iint_{D(a\sqrt{2})} f(x,y)\,dx\,dy$$

Le membre de gauche tend vers $\frac{\pi}{4}$ lorsque $a \to +\infty$.

Le membre de droite aussi, pour la même raison puisque $a\sqrt{2} \to +\infty$ lorsque $a \to +\infty$.

Donc $\displaystyle\iint_{C(a)} f(x,y)\,dx\,dy$ est encadré par deux expressions qui ont la même limite.

Par théorème d'encadrement des limites (ou "théorème des gendarmes"), on obtient :

$$\lim_{a \to +\infty} \iint_{C(a)} f(x,y)\,dx\,dy = \frac{\pi}{4} \quad \text{aussi.}$$

- Enfin, d'après la question (a), on a

$$I(a) = \sqrt{\iint_{C(a)} f(x,y)\,dx\,dy}\,, \text{ donc}$$

$$\lim_{a \to +\infty} I(a) = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \boxed{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}$$

Exercice 4 :

$$I = \int_1^2 \left(\int_1^{y^4} \left(\int_1^{\sqrt{z}} f(x,y,z)\,dx \right) dz \right) dy.$$

a) Le domaine d'intégration est donné par : $\begin{cases} 1 \leq y \leq 2 \\ 1 \leq z \leq y^4 \\ 1 \leq x \leq \sqrt{z} \end{cases}$

On peut ici décrire cette région dans les 5 autres ordres possibles pour x, y, z :

- y, x, z :

$$1 \leq y \leq 2$$
$$1 \leq x \leq y^2$$
$$x^2 \leq z \leq y^4$$

Donc $$I = \int_1^2 \left(\int_1^{y^2} \left(\int_{x^2}^{y^4} f(x,y,z)\,dz \right) dx \right) dy.$$

- x, y, z :

$$1 \leq x \leq 4$$
$$\sqrt{x} \leq y \leq 2$$
$$x^2 \leq z \leq y^4$$

Donc $$I = \int_1^4 \left(\int_{\sqrt{x}}^2 \left(\int_{x^2}^{y^4} f(x,y,z)\,dz \right) dy \right) dx.$$

- x, z, y :

$$1 \leq x \leq 4$$
$$x^2 \leq z \leq 16$$
$$\sqrt[4]{z} \leq y \leq 2$$

Donc $I = \int_1^4 \left(\int_{x^2}^{16} \left(\int_{\sqrt[4]{z}}^{2} f(x,y,z)\, dy \right) dz \right) dx$.

- z, x, y :

$$1 \leq z \leq 16$$
$$1 \leq x \leq \sqrt{z}$$
$$\sqrt[4]{z} \leq y \leq 2$$

donc $I = \int_1^{16} \left(\int_1^{\sqrt{z}} \left(\int_{\sqrt[4]{z}}^{2} f(x,y,z)\, dy \right) dx \right) dz$.

- z, y, x :

$$1 \leq z \leq 16$$
$$\sqrt[4]{z} \leq y \leq 2$$
$$1 \leq x \leq \sqrt{z}$$

donc $I = \int_1^{16} \left(\int_{\sqrt[4]{z}}^{2} \left(\int_1^{\sqrt{z}} f(x,y,z)\, dx \right) dy \right) dz$

Remarque : une façon simple de se convaincre de ces inégalités est de noter que la description donnée est simplement équivalente à la suite d'inégalités : $1 \leq x \leq \sqrt{z} \leq y^2 \leq 4$.

b) Avec la première expression de I par exemple :

$$I = \int_1^2 \int_1^{y^4} \int_1^{\sqrt{z}} x \, dx\, dz\, dy = \int_1^2 \int_1^{y^4} \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^{\sqrt{z}} dz\, dy$$

$$= \int_1^2 \int_1^{y^4} \frac{z-1}{2}\, dz\, dy = \int_1^2 \left[\frac{z^2}{4} - \frac{z}{2} \right]_1^{y^4} dy$$

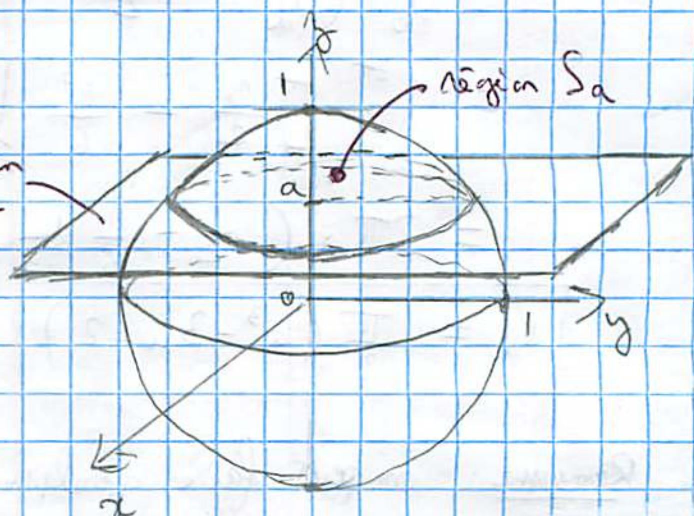
$$I = \int_1^2 \left(\frac{y^8}{4} - \frac{y^4}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) dy$$

$$= \frac{1}{4} \int_1^2 \left(y^8 - 2y^4 + 1 \right) dy$$

$$= \frac{1}{4} \left[\frac{y^9}{9} - \frac{2y^5}{5} + y \right]_1^2$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{511}{9} - \frac{62}{5} + 1 \right)$$

$$\boxed{I = \frac{1021}{90}}$$



Exercice 5.

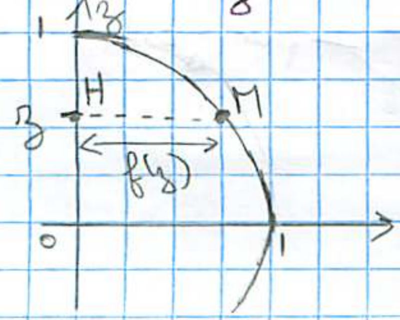
a) Par définition le volume de S_a est :

$$V_a = \iiint_{S_a} 1 \, dx \, dy \, dz.$$

Décrivons la région S_a en coordonnées cylindriques :

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$
$$a \leq z \leq 1$$
$$0 \leq r \leq f(z)$$

où $f(z)$ est la distance d'un point de la sphère de hauteur z à l'axe des z.



Le triangle OHM est rectangle en H,

donc $OH^2 + HM^2 = OM^2$

et $z^2 + f(z)^2 = 1.$

donc $f(z) = \sqrt{1-z^2}$.

En utilisant le théorème de changement de variables en coordonnées cylindriques, on obtient donc :

$$V_a = \int_0^{2\pi}\left(\int_a^1\left(\int_0^{\sqrt{1-z^2}} r\,dr\right)dz\right)d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_a^1 \frac{1-z^2}{2}\,dz\right)d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[\frac{z}{2}-\frac{z^3}{6}\right]_a^1 d\theta$$

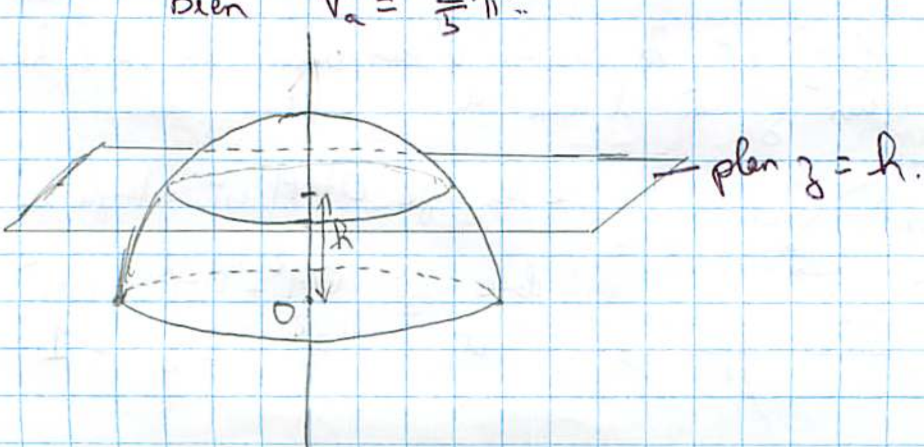
$$= 2\pi \times \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\frac{a}{2}+\frac{a^3}{6}\right)$$

$$\boxed{V_a = \frac{\pi}{3}\left(a^3-3a+2\right)}$$

Remarque : on peut faire quelques vérifications pour des valeurs particulières de a :

- pour $a=-1$, S_a est la boule en entier, et on obtient $V_a = \frac{4\pi}{3}$ comme connu.
- pour $a=1$, S_a est vide, et on a bien $V_a = 0$.
- pour $a=0$, S_a est la demi-boule, et on obtient bien $V_a = \frac{2}{3}\pi$.

b)



On veut que la partie haute et la partie basse de la demi-boule aient même volume. Ou encore, que la partie haute ait pour volume $\frac{1}{2}$ du volume de la demi-boule.

D'après la question (a), le volume de la partie haute (qui est S_a pour $a = h$) est égal à :

$$V_h = \frac{\pi}{3}\left(h^3 - 3h + 2\right).$$

Et le volume total de la demi-boule est :

$$V_a \text{ pour } a = 0 \quad \text{donc} \quad V_0 = \frac{2\pi}{3}.$$

On doit donc avoir une hauteur h qui vérifie :

$$V_h = \frac{V_0}{2}, \text{ donc } \quad \frac{\pi}{3}\left(h^3 - 3h + 2\right) = \frac{\pi}{3}$$

et on a bien : $\boxed{h^3 - 3h + 1 = 0}$

Remarque : numériquement, on obtient comme solution : $h \simeq 0{,}347$.