Université du Québec à Montréal
F. Beaudet, S. Labbé, V. Ripoll

MAT1112 - Calcul I (automne 2011)
Groupes-cours : 10, 50, 51

Corrigé de l'examen de mi-session

Exercice 1.

(a) [*8 points*] *Soit la fonction de deux variables :* $f(x,y) = e^{2x+3}\sin(xy^2) - x^3y + \cos(y^3 - x^2)$.
Calculer les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *et* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

On calcule avec les règles habituelles de dérivation :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= 2e^{2x+3} \times \sin(xy^2) + e^{2x+3} \times \cos(xy^2) \times y^2 - 3x^2y + (-\sin(y^3 - x^2)) \times (-2x) \\
&= e^{2x+3}\ (2\sin(xy^2) + y^2\cos(xy^2)) - 3x^2y + 2x\sin(y^3 - x^2) \qquad ; \text{et :} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\Big(e^{2x+3}\ (2\sin(xy^2) + y^2\cos(xy^2)) - 3x^2y + 2x\sin(y^3 - x^2)\Big) \\
&= e^{2x+3}\ [2\cos(xy^2) \times (2yx) + 2y\cos(xy^2) + y^2 \times (-\sin(xy^2)) \times (2yx)] \\
&\quad - 3x^2 + 2x\cos(y^3 - x^2) \times (3y^2) \\
&= e^{2x+3}\ [2y(2x+1)\cos(xy^2) - 2xy^3\sin(xy^2)] - 3x^2 + 6xy^2\cos(y^3 - x^2)\ .
\end{aligned}$$

(b) [*10 points*] *Soit la fonction*

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3y^4 - x^2(y - x^2) - 2x^3}{x^2 - y^2} & \text{si } x^2 - y^2 \neq 0\ ; \\ 0 & \text{si } x^2 - y^2 = 0. \end{cases}$$

Calculer, si elles existent, les deux dérivées partielles d'ordre 1 de g au point $(0,0)$:

$$\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{(0,0)} \quad \text{et} \quad \left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{(0,0)} .$$

La fonction g est définie par une formule différente selon si l'on est en $(0,0)$ ou au voisinage de ce point. Donc on est obligé d'utiliser la définition théorique de la dérivée partielle en un point. On a :

$$\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \lim_{h\to 0} \frac{g(0+h,0) - g(0,0)}{h} .$$

Il faut calculer $g(h,0)$. Pour $h \neq 0$, on a $h^2 - 0^2 \neq 0$, donc il faut utiliser la première ligne de la définition de g :

$$g(h,0) = \frac{3(0)^4 - h^2(0 - h^2) - 2h^3}{h^2 - 0^2} = \frac{h^4 - 2h^3}{h^2} = h^2 - 2h\ .$$

D'où :

$$\frac{g(h,0) - g(0,0)}{h} = \frac{h^2 - 2h - 0}{h} = h - 2\ ,$$

et

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{(0,0)} &= \lim_{h\to 0}(h - 2) \\
&= \boxed{-2}\ .
\end{aligned}$$

De même, on calcule :

$$\left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{(0,0)} = \lim_{k\to 0}\frac{g(0,0+k)-g(0,0)}{k} \ .$$

Pour $k \neq 0$, on a $0^2 - k^2 \neq 0$, donc

$$g(0,k) = \frac{3k^4 - 0^2(k-0^2) - 2(0)^3}{0^2 - k^2} = -3k^2 \ .$$

Donc

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{(0,0)} &= \lim_{k\to 0}\frac{-3k^2 - 0}{k} \\ &= \lim_{k\to 0}(-3k) \\ &= \boxed{0} \ .\end{aligned}$$

Exercice 2.

(a) *[10 points] Soit la fonction* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5y^3 + 5xy^7}{(2x^2+y^2)^4} \ , & \textit{si } (x,y) \neq (0,0) \ ; \\ 0 \ , & \textit{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Est-ce que f *est continue à l'origine* $(0,0)$ *? au point* $(2,3)$ *? (Justifier votre réponse.)*

Solution

Calculons la limite de $f(x,y)$ lorsque (x,y) tend vers $(0,0)$ le long du chemin $y = x$. On peut supposer que $y = x \neq 0$ et on obtient

$$f(x,y) = f(x,x) = \frac{x^5x^3 + 5xx^7}{(2x^2+x^2)^4} = \frac{6x^8}{(3x^2)^4} = \frac{6x^8}{81x^8} = \frac{2}{27}.$$

Si la limite de $f(x,y)$ lorsque (x,y) tend vers $(0,0)$ existe, elle doit donc être égale à $2/27$. Or, $f(0,0) = 0 \neq 2/27$, donc la fonction f n'est pas continue au point $(0,0)$.

Le numérateur et le dénominateur de $f(x,y)$ sont des fonctions polynomiales continues sur $\mathbb{R}^2$ et en particulier au point $(2,3)$. Ainsi, la fonction f, étant le quotient de deux fonctions continues, est continue au point $(2,3)$, car le dénominateur ne s'annule pas en ce point.

Solution alternative

On aurait aussi pu évaluer la limite $f(x,y)$ lorsque (x,y) tend vers $(0,0)$ le long du chemin $y = mx$. On peut supposer que $(x,mx) \neq (0,0)$ et on obtient

$$f(x,y) = f(x,mx) = \frac{x^5(mx)^3 + 5x(mx)^7}{(2x^2+(mx)^2)^4} = \frac{x^8m^3 + 5m^7x^8}{(x^2(2+m^2))^4} = \frac{x^8(m^3+5m^7)}{x^8(2+m^2)^4} = \frac{(m^3+5m^7)}{(2+m^2)^4}.$$

Si $m = 1$, on trouve $f(x,y) = f(x,x) = 6/81 = 2/27$.

Si $m = 2$, on trouve $f(x,y) = f(x,2x) = 648/1296 = 1/2$.

Ainsi, on trouve deux valeurs différentes pour la limite de $f(x,y)$ lorsque (x,y) tend vers $(0,0)$ le long de deux chemins différents. Ainsi, la limite de f lorsque (x,y) tend vers $(0,0)$ n'existe pas. Par conséquent, la fonction f n'est pas continue au point $(0,0)$.

(b) [*12 points*] *Soit la fonction* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5y^3 + 5xy^7}{(2x^2+y^2)^2}, & si\ (x,y) \neq (0,0)\ ; \\ 0\ , & si\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Montrer que g *est continue à l'origine* $(0,0)$.

Solution

On procède avec les coordonnées polaires. On pose $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. En remplaçant et en simplifiant, on obtient un expression alternative pour la fonction g :

$$\begin{aligned} g(x,y) &= g(r\cos\theta, r\sin\theta) \\ &= \frac{(r\cos\theta)^5(r\sin\theta)^3 + 5(r\cos\theta)(r\sin\theta)^7}{(2(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2)^2} \\ &= \frac{r^8(\cos^5\theta\sin^3\theta + 5\cos\theta\sin^7\theta)}{r^4(2\cos^2\theta + \sin^2\theta)^2} \\ &= \frac{r^4(\cos^5\theta\sin^3\theta + 5\cos\theta\sin^7\theta)}{(1+\cos^2\theta)^2}. \end{aligned}$$

Pour montrer que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = L = 0$, on cherche à borner supérieurement la valeur de $|g(x,y) - L| = |g(x,y) - 0| = |g(x,y)|$. On obtient

$$\begin{aligned} |g(x,y)| &= |g(r\cos\theta, r\sin\theta)| \\ &= \left|\frac{r^4(\cos^5\theta\sin^3\theta + 5\cos\theta\sin^7\theta)}{(1+\cos^2\theta)^2}\right| \\ &\leq \left|\frac{r^4(\cos^5\theta\sin^3\theta + 5\cos\theta\sin^7\theta)}{(1+0^2)^2}\right| \\ &= \left|r^4(\cos^5\theta\sin^3\theta + 5\cos\theta\sin^7\theta)\right| \\ &= r^4\left|\cos^5\theta\sin^3\theta + 5\cos\theta\sin^7\theta\right| \\ &\leq r^4\left[\left|\cos^5\theta\sin^3\theta\right| + 5\left|\cos\theta\sin^7\theta\right|\right] \\ &\leq r^4\left[(1) + 5(1)\right] \\ &= 6r^4. \end{aligned}$$

Ainsi

$$0 \leq \left|\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)\right| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} |g(x,y)| = \lim_{r\to 0} |g(r\cos\theta, r\sin\theta)| \leq \lim_{r\to 0} 6r^4 = 0,$$

d'où on conclut que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0$$

Or,

$$g(0,0) = 0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y),$$

donc g est continue au point $(0,0)$.

Solution alternative 1

Nous voulons montrer que g est continue en $(0,0)$, c'est-à-dire, par définition, que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = g(0,0)$. On a $g(0,0) = 0$, donc nous pouvons utiliser une majoration de

$|g(x,y)|$ pour montrer que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0$. Avec l'inégalité triangulaire, nous avons pour $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\begin{aligned}
|g(x,y)| &= \left|\frac{x^5y^3 + 5xy^7}{(2x^2+y^2)^2}\right| \\
&\leq \left|\frac{x^5y^3}{(2x^2+y^2)^2}\right| + \left|\frac{5xy^7}{(2x^2+y^2)^2}\right|
\end{aligned}$$

On a $2x^2 + y^2 \geq 2x^2$ donc $(2x^2+y^2)^2 \geq (2x^2)^2 = 4x^4$ et :

$$\frac{|x^5y^3|}{(2x^2+y^2)^2} \leq \frac{|x^5y^3|}{4x^4} = \frac{|xy^3|}{4} \ .$$

De même, comme $2x^2 + y^2 \geq y^2$, on a $(2x^2+y^2)^2 \geq (y^2)^2 = y^4$ et :

$$\frac{|5xy^7|}{(2x^2+y^2)^2} \leq \frac{|5xy^7|}{y^4} = 5|xy^3| \ .$$

Finalement, on obtient :

$$|g(x,y)| \leq \frac{|xy^3|}{4} + 5|xy^3| = \frac{21}{4}|xy^3| \ .$$

Posons $h(x,y) = \frac{21}{4}|xy^3|$. On a montré que pour tout $(x,y) \neq (0,0)$, $|g(x,y)| \leq h(x,y)$. D'autre part, on a clairement $\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = 0$. Par comparaison, on obtient donc :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0$$

c'est-à-dire $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = g(0,0)$, donc g *est bien continue au point* $(0,0)$.

Solution alternative 2

Si $(x,y) \neq (0,0)$, alors on peut borner la valeur absolue de l'évaluation de la fonction g au point (x,y). En effet,

$$\begin{aligned}
|g(x,y)| &= \left|\frac{x^5y^3 + 5xy^7}{(2x^2+y^2)^2}\right| \\
&= \left|\frac{x^5y^3 + 5xy^7}{4x^4+4x^2y^2+y^4}\right| \\
&= \left|\frac{x^5y^3}{4x^4+4x^2y^2+y^4} + \frac{5xy^7}{4x^4+4x^2y^2+y^4}\right| \\
&\leq \left|\frac{x^5y^3}{4x^4+4x^2y^2+y^4}\right| + \left|\frac{5xy^7}{4x^4+4x^2y^2+y^4}\right| \\
&= |xy^3|\left|\frac{x^4}{4x^4+4x^2y^2+y^4}\right| + 5|xy^3|\left|\frac{y^4}{4x^4+4x^2y^2+y^4}\right| \\
&\leq |xy^3|\cdot(1) + 5|xy^3|\cdot(1) \\
&= 6|xy^3|.
\end{aligned}$$

Soit $\epsilon > 0$. Posons $\delta = \min\{1, \epsilon\}$. Montrons que si $|x| < \delta$ et $|y| < \delta$ et que $(x,y) \neq (0,0)$, alors $|g(x,y) - L| < \epsilon$ avec $L = 0$. En effet, on a

$$|g(x,y)| \leq 6|xy^3| = 6 \cdot |x| \cdot |y|^3 \leq 6 \cdot \epsilon \cdot 1^3 = \epsilon.$$

Cela achève de démontrer que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = L = 0.$$

Comme cette valeur est égale à l'évaluation de la fonction g au point $(0,0)$, alors la fonction g est continue au point $(0,0)$.

EXERCICE 3.

(a) [*10 points*] *Soit la fonction de deux variables :*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4y^2x^3 - y^5 - 2x^7}{2y^4+3x^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \ ; \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Soit (v_1, v_2) un vecteur unitaire du plan. En utilisant la définition théorique de la dérivée directionnelle, déterminer (en fonction de v_1 et v_2) la dérivée directionnelle $f'((v_1,v_2),(0,0))$ (si elle existe) dans la direction $\vec{v} = (v_1, v_2)$ au point $(0,0)$.

D'après la définition de la dérivée directionnelle, on a :

$$f'((v_1,v_2),(0,0)) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+hv_1, 0+hv_2) - f(0,0)}{h} \ .$$

Ici, on a $(v_1, v_2) \neq (0,0)$ car c'est un vecteur unitaire, donc pour $h \neq 0$, $(hv_1, hv_2) \neq (0,0)$ et on peut utiliser la première ligne de la définition de f :

$$\begin{aligned} f(hv_1, hv_2) &= \frac{4h^2v_2^2h^3v_1^3 - h^5v_2^5 - 2h^7v_1^7}{2h^4v_2^4 + 3h^4v_1^4} \\ &= \frac{h(4v_2^2v_1^3 - v_2^5 - 2h^2v_1^7)}{2v_2^4+3v_1^4} \ . \end{aligned}$$

D'autre part $f(0,0) = 0$, donc :

$$\begin{aligned} f'((v_1,v_2),(0,0)) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(hv_1,hv_2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{4v_2^2v_1^3 - v_2^5 - 2h^2v_1^7}{2v_2^4+3v_1^4} \\ &= \boxed{\frac{4v_2^2v_1^3 - v_2^5}{2v_2^4+3v_1^4}} \ . \end{aligned}$$

(b) [*10 points*] *Soit $g(x,y,z) = 5xy^2z - 2x^3yz^2 + x^2y$.*
Calculer la dérivée directionnelle $g'((-1/\sqrt{14}\ ,\ 2/\sqrt{14}\ ,\ 3/\sqrt{14})\ ,\ (1,-1,2))$ de g dans la direction $(-1/\sqrt{14}\ ,\ 2/\sqrt{14}\ ,\ 3/\sqrt{14})$ au point $(1,-1,2)$.

La fonction g est polynomiale, donc g, ainsi que ses dérivées partielles, sont continues sur $\mathbb{R}^3$. On peut donc utiliser la formule du cours pour calculer une dérivée directionnelle :

$$g'(\vec{u},(a,b,c)) = \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{(a,b,c)} u_x + \left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{(a,b,c)} u_y + \left.\frac{\partial g}{\partial z}\right|_{(a,b,c)} u_z \ .$$

On calcule :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x} &= 5y^2z - 6x^2yz^2 + 2xy \\
\frac{\partial g}{\partial y} &= 10xyz - 2x^3z^2 + x^2 \\
\frac{\partial g}{\partial z} &= 5xy^2 - 4x^3yz \ .
\end{aligned}$$

On obtient les valeurs suivantes :

$$\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{(1,-1,2)} = 32 \quad ; \quad \left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{(1,-1,2)} = -27 \quad ; \quad \left.\frac{\partial g}{\partial z}\right|_{(1,-1,2)} = 13 \ .$$

Donc finalement :

$$\begin{aligned}
g'\left(\left(\frac{-1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right), (1,-1,2)\right) &= \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{(1,-1,2)} \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{14}}\right) + \left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{((1,-1,2))} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{14}}\right) + \left.\frac{\partial g}{\partial z}\right|_{(1,-1,2)} \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{14}}\right) \\
&= \frac{-32}{\sqrt{14}} + \frac{-54}{\sqrt{14}} + \frac{39}{\sqrt{14}} \\
&= \boxed{\frac{-47}{\sqrt{14}}} .
\end{aligned}$$

Exercice 4. (Application de la règle de chaînes)

[*16 points*] *La longueur, la largeur et la hauteur d'une boîte (en forme de parallélépipède rectangle) varient dans le temps. La longueur et la largeur croissent à raison de 5 mètres par seconde tandis que la hauteur diminue de 2 mètres par seconde. À un moment donné, la hauteur et la largeur mesurent 4 mètres et la longueur mesure 7 mètres. Déterminer (en utilisant la règle de chaînes) le taux de variation, à cet instant, du volume de la boîte, en mètres cubes par seconde (m^3/s).*

Soient les variables suivantes :

ℓ : largeur de la boîte (en mètres),
L : longueur de la boîte (en mètres),
H : hauteur de la boîte (en mètres),
V : volume de la boîte (en mètres cubes),
t : temps (en secondes).

On a que

$$\frac{dL}{dt} = 5 \text{ m/s}, \qquad \frac{d\ell}{dt} = 5 \text{ m/s}, \qquad \frac{dH}{dt} = -2 \text{ m/s}.$$

Bien sûr le volume de la boîte est donné par

$$V = L \cdot \ell \cdot H,$$

de sorte que

$$\frac{\partial V}{\partial L} = \ell H, \qquad \frac{\partial V}{\partial \ell} = LH, \qquad \frac{\partial V}{\partial H} = L\ell.$$

Par la règle de chaînes, le taux de variation du volume est

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial L}\frac{dL}{dt} + \frac{\partial V}{\partial \ell}\frac{d\ell}{dt} + \frac{\partial V}{\partial H}\frac{dH}{dt} \\
&= \ell H \frac{dL}{dt} + LH\frac{d\ell}{dt} + L\ell\frac{dH}{dt}.
\end{aligned}$$

Ainsi, lorsque $H = \ell = 4$ m et $L = 7$ m, on a que

$$\begin{aligned}
\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(L,\ell,H)=(7\text{ m},4\text{ m},4\text{ m})} &= (4\text{ m})(4\text{ m})(5\text{ m/s}) + (7\text{ m})(4\text{ m})(5\text{ m/s}) + (7\text{ m})(4\text{ m})(-2\text{ m/s}) \\
&= 80\text{ m}^3/\text{s} + 140\text{ m}^3/\text{s} - 56\text{ m}^3/\text{s} \\
&= 164\text{ m}^3/\text{s}
\end{aligned}$$

Exercice 5. (Optimisation sans contrainte)

(a) [*6 points*] *Soit* $f(x,y) = -4x^2 + x^2y^2 + \frac{y^4}{4} - y^3 - 2y^2$, *où* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. *Déterminer les points critiques de* $f(x,y)$. On doit résoudre le système d'équations

1) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$,

2) $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$.

C'est-à-dire :
1) $-8x + 2xy^2 = 2x(-4 + y^2) = 0$.
2) $2yx^2 + y^3 - 3y^2 - 4y = y(2x^2 + y^2 - 3y - 4) = 0$.

x et y sont des facteurs dans 1) et 2) respectivement. Le point $(0,0)$ est donc un point critique.

Supposons $x = 0$ et $y \neq 0$, l'équation 2) donne $(y^2 - 3y - 4) = (y-4)(y+1) = 0$. C'est-à-dire $y = 4$ ou $y = -1$. Nous obtenons donc les points critiques $(0,-1)$ et $(0,4)$.

Supposons maintenant $x \neq 0$ et $y = 0$, l'équation 1) donne $2x(-4) = 0$, une contradiction.

Il reste le cas $x \neq 0$ et $y \neq 0$. L'équation 1) donne alors $y^2 = 4$, c'est-à-dire $y = \pm 2$.
Substituons $y = 2$ dans l'équation 2). Nous obtenons $2(2x^2 + 2^2 - 3(2) - 4) = 0$, ou encore $2x^2 = 6$, c'est-à-dire $x = \pm\sqrt{3}$. Nous obtenons donc les points critiques $(\sqrt{3}, 2)$ et $(-\sqrt{3}, 2)$.
Substituons maintenant $y = -2$ dans l'équation 2). Nous obtenons
$-2(2x^2 + (-2)^2 - 3(-2) - 4) = 0$,
c'est-à-dire $2x^2 = -6$, une impossibilité.

Nous avons donc les cinq points critiques :
$(0,0)$, $(0,-1)$, $(0,4)$, $(\sqrt{3},2)$ et $(-\sqrt{3},2)$.

(b) [*6 points*] *Les points* $(0,\ -1)$ *et* $(\sqrt{3},\ 2)$ *sont des points critiques de* $f(x,y)$. *Déterminer la nature (maximum local, minimum local, ou point-selle) de ces points critiques.*

Les dérivées partielles d'ordre 2 sont :

$A = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -8 + 2y^2$.

$C = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^2 + 3y^2 - 6y - 4$.

$B = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4xy$.

Lorsqu'on évalue A, B et C au point $(0,-1)$, nous obtenons : $\Delta = B^2 - AC = 0^2 - (-8 + 2(-1)^2)(0+3+6-4)) = -(-6)(5) = 30 > 0$. Donc (0, -1) est un point-selle.

Lorsqu'on évalue A, B et C au point $(\sqrt{3}, 2)$, nous obtenons : $\Delta = B^2 - AC = (4(\sqrt{3})2)^2 - (-8+2(2)^2)(2(\sqrt{3})^2 + 3(2^2) - 6(2) - 4)) = 192 - (0)(2) = 192 > 0$ et nous concluons que $(\sqrt{3}, 2)$ est un point-selle.

Exercice 6. (Multiplicateur de Lagrange)

[12 points] Utiliser la technique du multiplicateur de Lagrange afin d'identifier les points critiques sous contrainte (c'est-à-dire, les candidats pouvant réaliser un extremum local) de la fonction $f(x,y,z) = x - y + z$ sous la contrainte $x^2 - y^2 + z^2 - 4 = 0$.

La fonction de Lagrange est $\varphi(x,y,z,\lambda) = x - y + z + \lambda(x^2 - y^2 + z^2 - 4)$. Les points recherchés sont des solutions du système d'équations suivant :

$\varphi_x = 0,$
$\varphi_y = 0,$
$\varphi_z = 0,$
$\varphi_\lambda = 0.$

C'est-à-dire :

$1 + 2\lambda x = 0,$
$-1 - 2\lambda y = 0,$
$1 + 2\lambda z = 0,$
$x^2 - y^2 + z^2 = 4.$

De ces trois premières équations, on peut conclure que $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$ et $\lambda \neq 0$. On peut réécrire les trois premières équations comme suit :

$1 = -2\lambda x,$
$1 = -2\lambda y,$
$1 = -2\lambda z.$

Puisque $\lambda \neq 0$, nous pouvons conclure que $x = y = z = -1/(2\lambda)$.
Substituons x à y et x à z dans l'équation de contrainte $x^2 - y^2 + z^2 = 4$. Nous obtenons :

$x^2 - x^2 + x^2 = 4$, ou encore $x^2 = 4$. Nous obtenons les solutions $x = 2 = y = z$ et $x = -2 = y = z$.

Les points recherchés sont donc $(2,2,2)$ et $(-2,-2,-2)$.