Université du Québec à Montréal
F. Beaudet, S. Labbé, V. Ripoll

MAT1112 - Calcul I (automne 2011)
Groupes-cours : 10, 50, 51

# Examen de fin de session

*16 décembre 2011, 9h30-12h30*

---

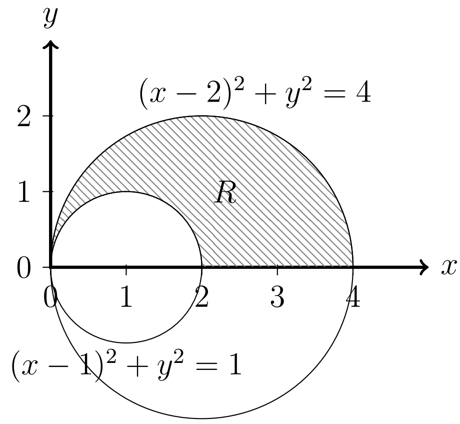
**Instructions :**

1. Cet examen a sept (7) exercices indépendants. Il faut répondre à tous les exercices dans votre cahier d'examen (dans l'ordre que vous voulez).
2. Aucune note, aucun livre n'est permis.
3. Les calculatrices (simples, non graphiques) sont permises (mais pas utiles).
4. Un barême est indiqué devant chaque question ; celui-ci est indicatif et pourra être légèrement modifié.
5. Un aide-mémoire est distribué en même temps que l'examen.
6. Une attention particulière sera portée à la qualité et à la précision de la rédaction. Les étapes des calculs doivent figurer sur la copie.

**Exercice 1.** [15 points]
(a) Évaluer l'intégrale double $\iint_R y\,dxdy$, où $R$ est la région de $\mathbb{R}^2$ définie par

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0, (x-1)^2+y^2 \geq 1, (x-2)^2+y^2 \leq 2^2\}.$$

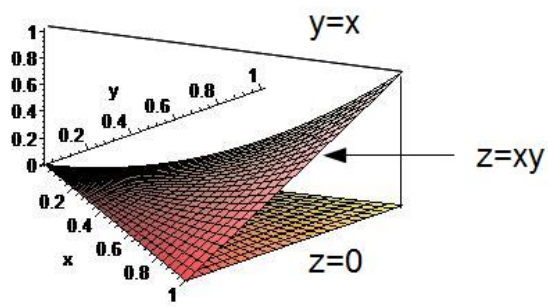
(b) Sachant que l'aire de la région $R$ est $3\pi/2$, en déduire la hauteur $y_c = \dfrac{\iint_R y\,dxdy}{\iint_R dxdy}$ du centre de gravité $(x_c, y_c)$ de la région R.




**Exercice 2.** [15 points]
Calculer l'intégrale triple

$$\iiint_R xy^2z^3\,dV$$

où $R$ est la région (figure ci-contre) délimitée par les surfaces $z = xy$, $z = 0$, $y = x$, et $x = 1$.




**Exercice 3.** [20 points]
On modélise un crayon par la région $R$ constituée d'un cône plein collé à un cylindre plein :

$$R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq a, x^2+y^2 \leq 1, z^2 \geq 4(x^2+y^2)\}\ ,\ \text{où } a \text{ est une constante } \geq 2.$$

(voir Figure 1). Calculer (en fonction de $a$) la hauteur $z_C$ du centre de gravité du crayon, en supposant qu'il est de densité homogène.

On rappelle que la hauteur du centre de gravité d'un objet tridimensionnel homogène remplissant une région $R$ est donnée par la formule : $z_C = \frac{\iiint_R z\,dV}{\iiint_R dV}$.

**Exercice 4.** [15 points]
En utilisant les coordonnées sphériques, calculer le volume du solide qui se trouve à l'intérieur de la sphère $x^2+y^2+z^2=4$, au-dessus du plan $Oxy$ et sous le cône $z = \sqrt{x^2+y^2}$. (voir Figure 2)

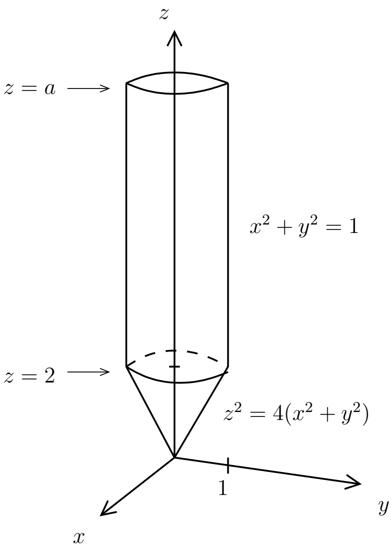



FIGURE 1 – Région de l'exercice 3

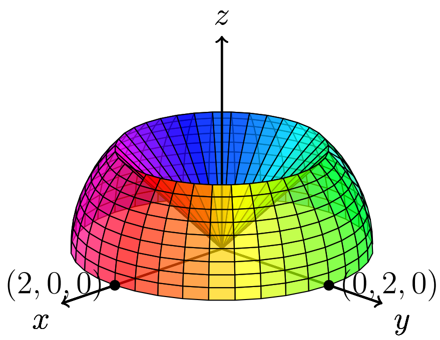



FIGURE 2 – Région de l'exercice 4

**EXERCICE 5.** [20 points]
Calculer l'intégrale $\iint_R \frac{y}{x}\ dxdy$, où $R$ est la région du premier quadrant délimitée par les courbes $x^2 - y^2 = 1$, $x^2 - y^2 = 4$, $y = 0$ et $y = x/2$. Utilisez le changement de variables $u = x^2 - y^2$, $v = y/x$. La région correspondante $R'$ en coordonnées $u, v$ est donnée par $u = 1$, $u = 4$, $v = 0$ et $v = 1/2$ (Fig. 3).

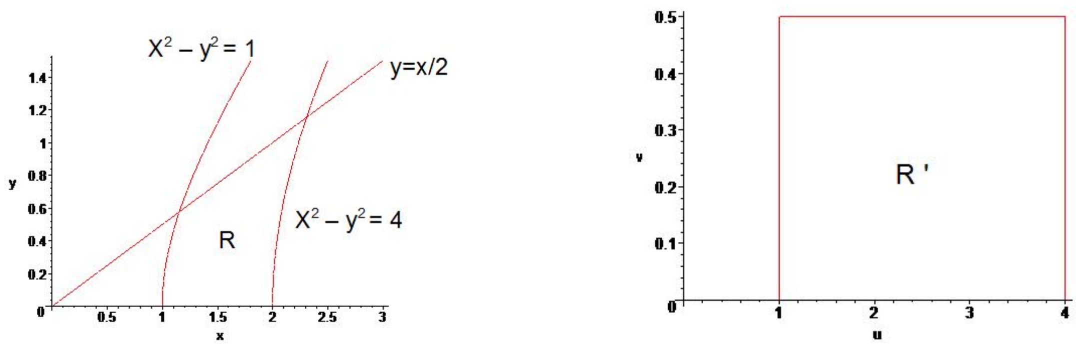



FIGURE 3 – Régions R et R'

**EXERCICE 6.** [5 points]
Calculer la valeur de l'intégrale impropre

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^3}\, dt$$

(on pourra utiliser une intégration par parties, et on admettra que $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$).

**EXERCICE 7.** [10 points]
Calculer le gradient de la fonction $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + x^2z^2$. Trouver la dérivée directionnelle de $f$ au point $A = (1, 1, -1)$ dans la direction du vecteur $\vec{v} = (2, 1, 2)$. Déterminer l'équation du plan tangent à la surface donnée par $f(x, y, z) = 3$ au point $A$.

**Fin de l'énoncé. Un aide-mémoire est disponible sur une feuille séparée.**

**Aide-mémoire pour l'examen de fin de session**
**(MAT1112, automne 2011)**

*** Dérivées partielles**

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,b)} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} \qquad \text{et} \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(a,b)} = \lim_{k\to 0}\frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}.$$

*** Dérivée directionnelle** de $f$ dans la direction $\vec{u} = (u_x, u_y)$ au point $(a,b)$ :

$$\left.\frac{df}{ds}\right|_{\vec{u},(a,b)} = f'(\vec{u},(a,b)) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+hu_x, b+hu_y)-f(a,b)}{h}.$$

*** Règle de chaines**

- $w = f(u,v)$, $u = u(x,y)$ et $v = v(x,y)$, alors

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

- $w = f(x,y,z)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$, et $z = z(t)$, alors

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

*** Optimisation sans contrainte**
$P = (a,b)$ point critique de $f = f(x,y)$.

$$A = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_P, \quad B = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_P, \quad C = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_P, \quad \text{et} \quad \Delta = B^2 - AC.$$

a) Si $\Delta < 0$ et $A < 0$, alors $f$ possède un maximum local au point $P$.
b) Si $\Delta < 0$ et $A > 0$, alors $f$ possède un minimum local au point $P$.
c) Si $\Delta > 0$, alors $f$ n'a ni minimum local, ni maximum local en $P$. Dans ce cas $(P, f(P))$ est un point-selle du graphe de $f$.
d) Si $\Delta = 0$, le test n'est pas concluant.

*** Optimisation avec contrainte** de $f(x,y,z)$ sous la contrainte $g(x,y,z) = 0$ :
Fonction de Lagrange : $\Phi(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z)$.

*** Identités trigonométriques :**

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b\\
\cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b\\
\sin(a+b) &= \sin a \cos b + \sin b \cos a\\
\sin(a-b) &= \sin a \cos b - \sin b \cos a\\
\cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x\\
\sin 2x &= 2 \sin x \cos x\\
\cos a \cos b &= \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))\\
\sin a \sin b &= \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))\\
\sin a \cos b &= \frac{1}{2}(\sin(a-b) + \sin(a+b))
\end{aligned}$$

*** Coordonnées polaires :**

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases} \text{ où } r \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{R'} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\,r\,dr\,d\theta$$

*** Coordonnées cylindriques :**

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \quad \text{où } r \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi, z \in \mathbb{R} \\ z = z \end{cases}$$

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{R'} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)\,r\,dr\,d\theta\,dz$$

*** Coordonnées sphériques :**

$$\begin{cases} x = \rho\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\varphi)\sin(\theta) \quad \text{où } \rho \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi \\ z = \rho\cos(\varphi) \end{cases}$$

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{R'} f(\rho\sin(\varphi)\cos(\theta), \rho\sin(\varphi)\sin(\theta), \rho\cos(\varphi))\,\rho^2\sin(\varphi)\,d\rho\,d\theta\,d\varphi$$

*** Changement général de coordonnées :**

Soient $D$', un domaine de $\mathbb{R}^n$, un changement de coordonnées :

$$\begin{array}{rccc} G: & D' & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x_1(u_1,u_2,\ldots,u_n) \\ x_2(u_1,u_2,\ldots,u_n) \\ \vdots \\ x_n(u_1,u_2,\ldots,u_n) \end{pmatrix} \end{array}$$

$D = G(D')$, l'image du domaine $D'$, et une fonction réelle

$$\begin{array}{rccc} f: & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1,x_2,\ldots,x_n) & \longmapsto & f(x_1,x_2,\ldots,x_n) \end{array}$$

tels que l'intégrale $n$-ième $\iint\!..\!\iint_D f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,dx_1\,dx_2\,\ldots\,dx_{n-1}\,dx_n$ existe. Alors l'intégrale $n$-ième

$$\iint\!..\!\iint_{D'} f(x_1(u_1,\ldots,u_n), x_2(u_1,\ldots,u_n),\ldots,x_n(u_1,\ldots,u_n)) \left|\frac{\partial(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial(u_1,u_2,\ldots,u_n)}\right| du_1\,du_2\,\ldots\,du_{n-1}\,du_n$$

existe et est égale à

$$\iint\!..\!\iint_D f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,dx_1\,dx_2\,\ldots\,dx_{n-1}\,dx_n.$$

*** Intégrales impropres :**

*Définition :* Soit $f$ une fonction positive sur $[a,+\infty[$. On dit que $f$ est intégrable sur $[a,+\infty[$ si $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$ existe, et dans ce cas on pose :

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx\ .$$