Université du Québec à Montréal **Session d'automne 2011**
Groupe-cours 51 **MAT1112 - Calcul I**
Vivien Ripoll

Ellipses, hyperboles, paraboles, et quelques courbes de niveau

---

I Zoologie

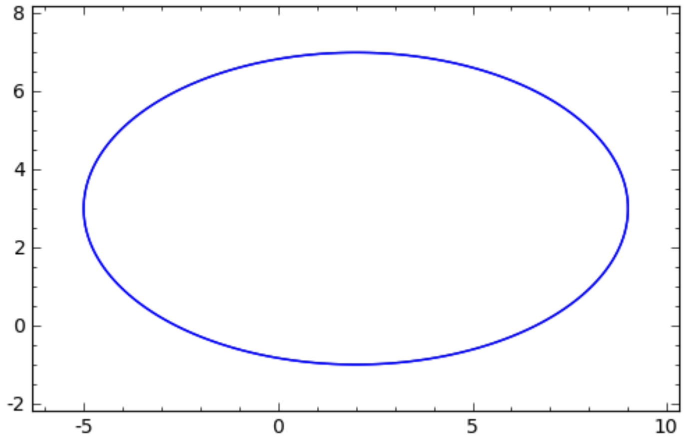
I.1 Ellipses

Soient $a, b > 0$, et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. L'équation

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \tag{1}$$

est l'équation d'une ellipse centrée en le point (x_0, y_0), de demi-grand axe a et de demi-petit axe b. Elle est symétrique par rapport à l'axe vertical $x = x_0$, et par rapport à l'axe horizontal $y = y_0$.

Exemple :



$$\frac{(x-2)^2}{49} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1$$

Remarque : Si $a = b$, on obtient un cercle de centre (x_0, y_0) et de rayon a.

En général il faut manipuler l'expression pour arriver à la forme de l'équation (1).

Exemple : soit l'équation $x^2 - 2x + 3y^2 + 3y - \dfrac{9}{4} = 0$.

Il faut voir $x^2 - 2x$ comme le début de l'identité remarquable $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$. De même, on voit $3y^2 + 3y$ comme le début de l'identité remarquable $3(y^2 + y + \frac{1}{4}) = 3(y + \frac{1}{2})^2$. On transforme ainsi l'équation en :

$x^2 - 2x + 1 - 1 + 3(y^2 + y + \frac{1}{4}) - \frac{3}{4} - \frac{9}{4} = 0$

$(x-1)^2 + 3(y + \frac{1}{2})^2 = 4$

$\frac{(x-1)^2}{2^2} + \frac{(y+\frac{1}{2})^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1.$

Exercice : Donner centre, grand axe et petit axe de l'ellipse d'équation $2x^2 - x + 5y^2 + 2y - \frac{7}{40} = 0$.

I.2 Hyperboles

Soient $a, b > 0$, et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. L'équation

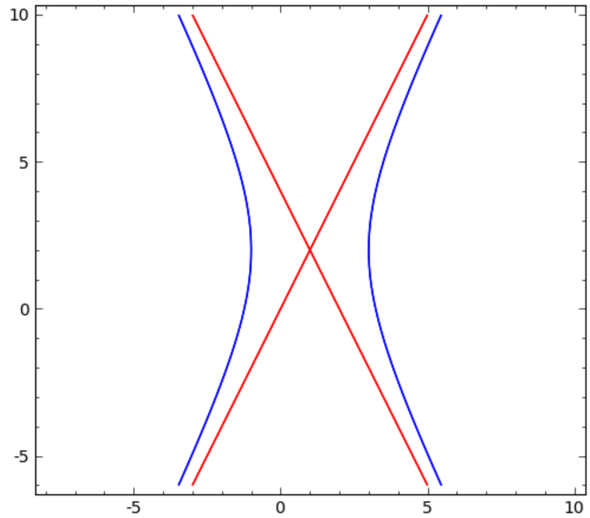
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \tag{2}$$

est l'équation d'une hyperbole. Elle est symétrique par rapport à l'axe vertical $x = x_0$, et par rapport à l'axe horizontal $y = y_0$. Elle contient les points $(x_0 + a, 0)$ et $(-x_0 - a, 0)$, et admet deux asympotes d'équations

$$y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0) \quad \text{et} \quad y - y_0 = -\frac{b}{a}(x - x_0).$$

Exemple :

L'hyperbole d'équation $\dfrac{(x-1)^2}{4} - \dfrac{(y-2)^2}{16} = 1$ et ses deux asymptotes.



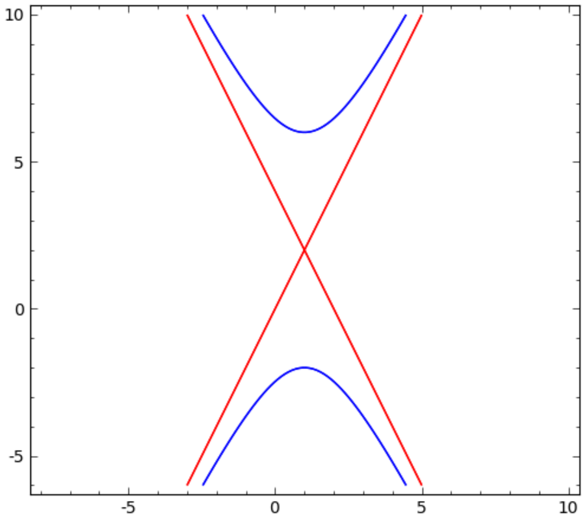
L'équation suivante est aussi une équation d'hyperbole :

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = -1 \tag{2'}$$

Les propriétés sont les mêmes que dans le cas précédent, mais il faut échanger le rôle de x et de y.

Exemple :

L'hyperbole d'équation $\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{16} = -1$ et ses deux asymptotes.



L'équation suivante est aussi une équation d'hyperbole :

$$(x - x_0)(y - y_0) = a \ , \quad \text{avec } a \neq 0. \tag{2''}$$

Les asymptotes sont alors la droite verticale $x = x_0$ et la droite horizontale $y = y_0$.

Remarque : Comme pour les ellipses, il faut parfois manipuler l'expression pour arriver à la forme de l'équation (2) (2') ou (2").

I.3 Paraboles

L'équation

$$y - y_0 = k(x - x_0)^2 \tag{3}$$

(pour $k \neq 0$) est une équation de parabole. Cette parabole est de sommet (x_0, y_0) et est symétrique par rapport à la droite verticale $x = x_0$.

De même, l'équation

$$x - x_0 = k(y - y_0)^2 \tag{3'}$$

(pour $k \neq 0$) est une équation de parabole, de sommet (x_0, y_0), et symétrique par rapport à la droite horizontale $y = y_0$.

I.4 Pour aller plus loin

Paraboles, hyperboles et ellipses sont des exemples d'une famille de courbes planes appelées *les coniques*. Géométriquement, ce sont les courbes résultant de l'intersection d'un cône de révolution avec un plan.

L'équation générale d'une conique est de la forme

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

où l'un au moins de A, B et C est non nul.

Dans la plupart des cas, on peut se ramener à une équation des types présentés dans les paragraphes 1, 2 ou 3, quitte à faire un changement de base (voir cours d'algèbre linéaire). On peut obtenir alors des ellipses, hyperboles, ou paraboles, qui ne sont pas nécessairement orientées selon les axes x et y.

II Applications aux courbes de niveau

Exemples :

(a) Étudier selon les valeurs de k, la forme de la courbe de niveau k de la fonction $f(x, y) = x^2 - 2x + 3y^2 + 3y$. En déduire une idée de la forme du graphe de f.

(b) Mêmes questions pour la fonction $g(x, y) = x^2 - 4x - 2y^2 - 18y$.

(c) Mêmes questions pour la fonction $h(x, y) = 2x + y^2 + 3y$.