Université du Québec à Montréal — **Session d'automne 2011**
Groupe-cours 51 — **MAT1112 - Calcul I**
Vivien Ripoll

Intégrales de fractions rationnelles : méthode et exemple (cours du 4 novembre)

On cherche à calculer $\int \frac{P(x)}{Q(x}dx$, où P et Q sont des polynômes. On va présenter la méthode générale et l'appliquer pas à pas sur un exemple :

$$I(x) = \int \frac{2x^4 - 4x^3 + 8x^2 + 3}{x^4 - x^3 - x + 1}dx \ .$$

1. Se ramener au cas où deg(numérateur) < deg(dénominateur), en écrivant $P = QA + R$, avec A et R polynômes, tel que $\deg R < \deg Q$. Ainsi $\frac{P}{Q} = A + \frac{R}{Q}$.
   Ex. : $2x^4 - 4x^3 + 8x^2 + 3 = (\qquad)\ (x^4 - x^3 - x + 1) +$ donc

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \left(\qquad + \frac{\qquad}{x^4 - x^3 - x + 1} \right) dx \\ &= \qquad + \int F(x)dx \quad \text{avec } F(x) = \end{aligned}$$

   et il reste à calculer $\int F(x)dx$.

2. Factoriser Q le plus possible.
   Proposition. On peut toujours factoriser Q avec des facteurs de la forme

$$\begin{array}{ll} (\lambda x + \mu)^k & \text{avec } \lambda \neq 0,\ k \geq 1\,; \qquad \text{et} \\ (ax^2 + bx + c)^k & \text{avec } a \neq 0,\ k \geq 1, \text{ et } \Delta = b^2 - 4ac < 0)\ . \end{array}$$

   Pour ce faire, il faut trouver des racines α de Q (c'est-à-dire des solutions de $Q(x) = 0$), et factoriser Q par $(x - \alpha)$.
   Ex. :

$$\begin{array}{rcll} x^4 - x^3 - x + 1 &=& (\qquad\qquad)(ax^3 + bx^2 + cx + d) & \text{(car } \quad \text{est racine évidente)} \\ &=& & \text{(on trouve } a, b, c, d \text{ par identification)} \\ &=& (\qquad\qquad)(\qquad\qquad)(a'x^2 + b'x + c') & \text{(car } \quad \text{est encore racine évidente)} \\ &=& & \text{(en identifiant)} \end{array}$$

   On ne peut pas factoriser davantage car pour le polynôme $\qquad\qquad$, $\Delta = \qquad\qquad < 0$.

3. *Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle.*
   Proposition. Si P/Q est telle que $\deg P < \deg Q$, et qu'on écrit Q (conformément au point précédent) sous la forme

$$Q = \prod_{i=1}^{r} (\lambda_i x + \mu_i)^{u_i} \ \times \ \prod_{j=1}^{s} (a_j x^2 + b_j x + c_j)^{v_j} \quad ,$$

   alors on peut écrire P/Q sous la forme d'une somme de :
   - termes $\dfrac{A}{(\lambda_i x + \mu_i)^k}$, avec $1 \leq k \leq u_i$ (pour chaque i) ; et de

- termes $\dfrac{Ax+B}{(a_jx^2+b_jx+c_j)^k}$, avec $1 \leq k \leq v_j$ (pour chaque j).

Ex. : D'après la proposition ci-dessus, F a la forme suivante :

$$F = \frac{A}{\qquad} + \frac{B}{\qquad} + \frac{Cx+D}{\qquad} \ .$$

On identifie A, B, C, D en développant (il existe aussi d'autres méthodes parfois plus rapides). Après calculs on obtient $A = \quad$, $B = \quad$, $C = \quad$ et $D = \quad$ donc :

$$F =$$

4. Calculs des $\displaystyle\int \frac{A}{(\lambda x+\mu)^k}$: il suffit de faire le changement de variable $u = \lambda x + \mu$ et d'utiliser les primitives usuelles.
   Ex. : $\int \frac{\quad}{\qquad} dx = \qquad$; et $\int \frac{\quad}{(\qquad)^2} dx = \qquad$.
5. Calculs des $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k}$.
   (a) On fait apparaître $2ax+b$ au numérateur, de sorte que dans le reste il n'y ait plus qu'une constante :
   $$\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k} = \frac{A}{2a}\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^k} + \frac{B-\frac{Ab}{2a}}{(ax^2+bx+c)^k} \ .$$
   Ex. : On obtient :

   (b) On s'occupe du premier terme : facile avec substitution (c'est de la forme u'/u^k).

   Ex. : .

   (c) On s'occupe du deuxième terme : il faut calculer $\displaystyle\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^k}dx$.
   L'idée est de "compléter le carré", et de se ramener, après un changement de variable, à calculer $\int \frac{1}{(1+u^2)^k}du$. On peut ensuite calculer cette intégrale avec un changement de variable trigonométrique.
   Le cas $k=1$ est le plus facile (et le seul que l'on fera en pratique dans les exercices). En effet $\int \frac{1}{1+u^2}du = \arctan(u) + C$.
   Ex. :
   $$\int \qquad dx = \int \qquad dx =$$
   On pose $u = \qquad$; $du = \qquad$. On obtient :
   $$=$$

Conclusion de l'exemple :

$$I(x) = \int \frac{2x^4-4x^3+8x^2+3}{x^4-x^3-x+1}dx \quad =$$

Pour un autre exemple, voir **[RB]**, Ex. 7.5 p.55.