Qu'est-ce qu'un élément de Coxeter ?

Vivien Ripoll

Universität Wien

Séminaire de Combinatoire du LaCIM
Montréal, 11 juillet 2014

travail en collaboration avec
Vic Reiner (Minneapolis) et **Christian Stump** (Berlin)

Plan

1. Définitions “classiques” d’un élément de Coxeter
   - ... pour un système de Coxeter (W, S)
   - ... pour un groupe de réflexion réel
   - ... pour un groupe de réflexion complexe

2. Définitions étendues
   - ... avec des structures de Coxeter alternatives
   - ... avec des automorphismes de réflexion
   - ... avec d’autres valeurs propres... Résultat principal et conséquence pour la combinatoire de Coxeter-Catalan

3. Automorphismes galoisiens
   - Corps de définition de W et automorphismes galoisiens
   - Action sur les classes de conjugaison d’éléments de Coxeter généralisés

1. Définitions "classiques" d'un élément de Coxeter
   - ... pour un système de Coxeter (W, S)
   - ... pour un groupe de réflexion réel
   - ... pour un groupe de réflexion complexe

2. Définitions étendues
   - ... avec des structures de Coxeter alternatives
   - ... avec des automorphismes de réflexion
   - ... avec d'autres valeurs propres... Résultat principal et conséquence pour la combinatoire de Coxeter-Catalan

3. Automorphismes galoisiens
   - Corps de définition de W et automorphismes galoisiens
   - Action sur les classes de conjugaison d'éléments de Coxeter généralisés

1. Définitions “classiques” d'un élément de Coxeter
   - ... pour un système de Coxeter (W, S)
   - ... pour un groupe de réflexion réel
   - ... pour un groupe de réflexion complexe

2. Définitions étendues
   - ... avec des structures de Coxeter alternatives
   - ... avec des automorphismes de réflexion
   - ... avec d'autres valeurs propres... Résultat principal et conséquence pour la combinatoire de Coxeter-Catalan

3. Automorphismes galoisiens
   - Corps de définition de W et automorphismes galoisiens
   - Action sur les classes de conjugaison d'éléments de Coxeter généralisés

Système de Coxeter

Définition

Un système de Coxeter (W, S) est un groupe W muni d'un ensemble générateur S d'involutions, et qui a une présentation de la forme :

$$W = \left\langle S \mid s^2 = 1 \ (\forall s \in S); \ (st)^{m_{s,t}} = 1 \ (\forall s \neq t \in S) \right\rangle ,$$

avec $m_{s,t} \in \mathbb{N}_{\geq 2} \cup \{\infty\}$ pour $s \neq t$.

$\rightsquigarrow$ graphe de Coxeter

Système de Coxeter

Définition

Un système de Coxeter (W, S) est un groupe W muni d'un ensemble générateur S d'involutions, et qui a une présentation de la forme :

$$W = \left\langle S \mid s^2 = 1 \ (\forall s \in S); \ (st)^{m_{s,t}} = 1 \ (\forall s \neq t \in S) \right\rangle \ ,$$

avec $m_{s,t} \in \mathbb{N}_{\geq 2} \cup \{\infty\}$ pour $s \neq t$.

$\rightsquigarrow$ graphe de Coxeter

Éléments de Coxeter, définition 0

Définition

Notons $S := \{s_1, \dots, s_n\}$. Un élément de Coxeter de (W, S) est un élément de la forme

$$c = s_{\pi(1)} \cdots s_{\pi(n)} \quad \text{pour } \pi \in \mathfrak{S}_n.$$

Proposition

*Si le graphe de Coxeter de (W, S) est une **forêt**, alors tous les éléments de Coxeter sont conjugués.*

$\Longrightarrow$ c'est le cas lorsque W est fini

Éléments de Coxeter, définition 0

Définition

Notons $S := \{s_1, \ldots, s_n\}$. Un élément de Coxeter de (W, S) est un élément de la forme

$$c = s_{\pi(1)} \cdots s_{\pi(n)} \quad \text{pour } \pi \in \mathfrak{S}_n.$$

Proposition

Si le graphe de Coxeter de (W, S) est une ***forêt****, alors tous les éléments de Coxeter sont conjugués.*

$\Longrightarrow$ c'est le cas lorsque W est fini

1. Définitions “classiques” d’un élément de Coxeter
   - ... pour un système de Coxeter (W, S)
   - ... pour un groupe de réflexion réel
   - ... pour un groupe de réflexion complexe

2. Définitions étendues
   - ... avec des structures de Coxeter alternatives
   - ... avec des automorphismes de réflexion
   - ... avec d’autres valeurs propres... Résultat principal et conséquence pour la combinatoire de Coxeter-Catalan

3. Automorphismes galoisiens
   - Corps de définition de W et automorphismes galoisiens
   - Action sur les classes de conjugaison d’éléments de Coxeter généralisés

Groupe de réflexion

- V $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n
- W sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(V)$ engendré par des réflexions

$\rightsquigarrow$ W admet une structure de **système de Coxeter**.
On prend $S = \{$ réflexions par rapport aux murs d'une chambre fixée de l'arrangement d'hyperplans de $W\}$.

Définition

Soit W un groupe de réflexion réel fini. Un élément de Coxeter de W est un produit (dans n'importe quel ordre) de toutes les réflexions par rapport aux murs d'une chambre fixée de W.

Proposition

L'ensemble des éléments de Coxeter de W forme une classe de conjugaison.

Groupe de réflexion

- V $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n
- W sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(V)$ engendré par des réflexions

$\rightsquigarrow$ W admet une structure de **système de Coxeter**.
On prend $S = \{$ réflexions par rapport aux murs d'une chambre fixée de l'arrangement d'hyperplans de $W\}$.

Définition

Soit W un groupe de réflexion réel fini. Un élément de Coxeter de W est un produit (dans n'importe quel ordre) de toutes les réflexions par rapport aux murs d'une chambre fixée de W.

Proposition

L'ensemble des éléments de Coxeter de W forme une classe de conjugaison.

Groupe de réflexion

- V $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n
- W sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(V)$ engendré par des réflexions

$\rightsquigarrow$ W admet une structure de **système de Coxeter**.
On prend $S = \{$ réflexions par rapport aux murs d'une chambre fixée de l'arrangement d'hyperplans de $W\}$.

Définition

Soit W un groupe de réflexion réel fini. Un élément de Coxeter de W est un produit (dans n'importe quel ordre) de toutes les réflexions par rapport aux murs d'une chambre fixée de W.

Proposition

L'ensemble des éléments de Coxeter de W forme une classe de conjugaison.

Groupe de réflexion

- V $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n
- W sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(V)$ engendré par des réflexions

$\rightsquigarrow$ W admet une structure de **système de Coxeter**.
On prend $S = \{$ réflexions par rapport aux murs d'une chambre fixée de l'arrangement d'hyperplans de $W\}$.

Définition

Soit W un groupe de réflexion réel fini. Un élément de Coxeter de W est un produit (dans n'importe quel ordre) de toutes les réflexions par rapport aux murs d'une chambre fixée de W.

Proposition

L'ensemble des éléments de Coxeter de W forme une classe de conjugaison.

Géométrie des éléments de Coxeter

(W est désormais supposé irréductible)

$h :=$ le nombre de Coxeter $=$ l'ordre d'un élément de Coxeter.

Fait : $h = d_n$, le plus grand degré invariant de W.
$d_1 \leq \cdots \leq d_n$ degrés de $f_1, \ldots, f_n$ tels que $\mathbb{C}[V]^W = \mathbb{C}[f_1, \ldots, f_n]$

Proposition (Coxeter)

Si c est un élément de Coxeter, il existe un plan $P \subseteq V$ stable par c et sur lequel c agit comme une rotation d'angle $\frac{2\pi}{h}$.
En particulier, c admet $e^{\frac{2i\pi}{h}}$ (et $e^{-\frac{2i\pi}{h}}$) pour valeur propre.

Géométrie des éléments de Coxeter

(W est désormais supposé irréductible)

$h :=$ le nombre de Coxeter $=$ l'ordre d'un élément de Coxeter.

Fait : $h = d_n$, le plus grand degré invariant de W.
$d_1 \leq \cdots \leq d_n$ degrés de $f_1, \ldots, f_n$ tels que $\mathbb{C}[V]^W = \mathbb{C}[f_1, \ldots, f_n]$

Proposition (Coxeter)

Si c est un élément de Coxeter, il existe un plan $P \subseteq V$ stable par c et sur lequel c agit comme une rotation d'angle $\frac{2\pi}{h}$.
En particulier, c admet $e^{\frac{2i\pi}{h}}$ (et $e^{-\frac{2i\pi}{h}}$) pour valeur propre.

Géométrie des éléments de Coxeter

(W est désormais supposé irréductible)

$h :=$ le nombre de Coxeter $=$ l'ordre d'un élément de Coxeter.

Fait : $h = d_n$, le plus grand degré invariant de W.
$d_1 \leq \cdots \leq d_n$ degrés de $f_1, \ldots, f_n$ tels que $\mathbb{C}[V]^W = \mathbb{C}[f_1, \ldots, f_n]$

Proposition (Coxeter)

Si c est un élément de Coxeter, il existe un plan $P \subseteq V$ stable par c et sur lequel c agit comme une rotation d'angle $\frac{2\pi}{h}$.
En particulier, c admet $e^{\frac{2i\pi}{h}}$ (et $e^{-\frac{2i\pi}{h}}$) pour valeur propre.

Géométrie des éléments de Coxeter (suite)

c est même $e^{\frac{2i\pi}{h}}$-régulier au sens de Springer : le vecteur propre associé $v \in V$ n'est pas dans les hyperplans de réflexion.

[Springer] : l'ensemble des éléments ζ-réguliers forme une classe de conjugaison.

Proposition

$$c \text{ est un élément de Coxeter de } W$$
$$\Updownarrow$$
$$c \text{ admet } e^{\frac{2i\pi}{h}} \text{ pour valeur propre}$$
$$\Updownarrow$$
$$c \text{ est } e^{\frac{2i\pi}{h}}\text{-régulier}$$

Géométrie des éléments de Coxeter (suite)

c est même $e^{\frac{2i\pi}{h}}$-régulier au sens de Springer : le vecteur propre associé $v \in V$ n'est pas dans les hyperplans de réflexion.

[Springer] : l'ensemble des éléments ζ-réguliers forme une classe de conjugaison.

Proposition

c est un élément de Coxeter de W

$$\Updownarrow$$

c admet $e^{\frac{2i\pi}{h}}$ pour valeur propre

$$\Updownarrow$$

c est $e^{\frac{2i\pi}{h}}$-régulier

Géométrie des éléments de Coxeter (suite)

c est même $e^{\frac{2i\pi}{h}}$-régulier au sens de Springer : le vecteur propre associé $v \in V$ n'est pas dans les hyperplans de réflexion.

[Springer] : l'ensemble des éléments ζ-réguliers forme une classe de conjugaison.

Proposition

c est un élément de Coxeter de W

$$\Updownarrow$$

c admet $e^{\frac{2i\pi}{h}}$ pour valeur propre

$$\Updownarrow$$

c est $e^{\frac{2i\pi}{h}}$-régulier

1. Définitions "classiques" d'un élément de Coxeter
   - ... pour un système de Coxeter (W, S)
   - ... pour un groupe de réflexion réel
   - ... pour un groupe de réflexion complexe
2. Définitions étendues
   - ... avec des structures de Coxeter alternatives
   - ... avec des automorphismes de réflexion
   - ... avec d'autres valeurs propres... Résultat principal et conséquence pour la combinatoire de Coxeter-Catalan
3. Automorphismes galoisiens
   - Corps de définition de W et automorphismes galoisiens
   - Action sur les classes de conjugaison d'éléments de Coxeter généralisés

Groupe de réflexion complexe

- V $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n
- W sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(V)$ engendré par des "réflexions" ($r \in \mathrm{GL}(V)$ d'ordre fini et fixant un hyperplan)
- on suppose W bien engendré, i.e., il peut être engendré par n réflexions.

On définit $h := d_n$ le plus grand degré invariant.

[Springer] $\Longrightarrow$ l'ensemble des éléments de W $e^{\frac{2i\pi}{h}}$-réguliers...

- est non vide et forme une classe de conjugaison de W ;
- $=$ l'ensemble des éléments avec $e^{\frac{2i\pi}{h}}$ comme valeur propre.

Définition (Bessis '06)

Soit W un groupe de réflexion complexe irréductible bien engendré. On appelle élément de Coxeter de W un élément $e^{\frac{2i\pi}{h}}$-régulier.

Groupe de réflexion complexe

- V $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n
- W sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(V)$ engendré par des "réflexions" ($r \in \mathrm{GL}(V)$ d'ordre fini et fixant un hyperplan)
- on suppose W bien engendré, i.e., il peut être engendré par n réflexions.

On définit $h := d_n$ le plus grand degré invariant.

[Springer] $\implies$ l'ensemble des éléments de W $e^{\frac{2i\pi}{h}}$-réguliers...

- est non vide et forme une classe de conjugaison de W ;
- $=$ l'ensemble des éléments avec $e^{\frac{2i\pi}{h}}$ comme valeur propre.

Définition (Bessis '06)

Soit W un groupe de réflexion complexe irréductible bien engendré. On appelle élément de Coxeter de W un élément $e^{\frac{2i\pi}{h}}$-régulier.

Groupe de réflexion complexe

- V $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n
- W sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(V)$ engendré par des "réflexions" ($r \in \mathrm{GL}(V)$ d'ordre fini et fixant un hyperplan)
- on suppose W bien engendré, i.e., il peut être engendré par n réflexions.

On définit $h := d_n$ le plus grand degré invariant.

[Springer] $\implies$ l'ensemble des éléments de W $e^{\frac{2i\pi}{h}}$-réguliers...

- est non vide et forme une classe de conjugaison de W ;
- $=$ l'ensemble des éléments avec $e^{\frac{2i\pi}{h}}$ comme valeur propre.

Définition (Bessis '06)

Soit W un groupe de réflexion complexe irréductible bien engendré. On appelle élément de Coxeter de W un élément $e^{\frac{2i\pi}{h}}$-régulier.

Groupe de réflexion complexe

- V $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n
- W sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(V)$ engendré par des "réflexions" ($r \in \mathrm{GL}(V)$ d'ordre fini et fixant un hyperplan)
- on suppose W bien engendré, i.e., il peut être engendré par n réflexions.

On définit $h := d_n$ le plus grand degré invariant.

[Springer] $\Longrightarrow$ l'ensemble des éléments de W $e^{\frac{2i\pi}{h}}$-réguliers...

- est non vide et forme une classe de conjugaison de W ;
- $=$ l'ensemble des éléments avec $e^{\frac{2i\pi}{h}}$ comme valeur propre.

Définition (Bessis '06)

Soit W un groupe de réflexion complexe irréductible bien engendré. On appelle élément de Coxeter de W un élément $e^{\frac{2i\pi}{h}}$-régulier.

Groupe de réflexion complexe

- V $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n
- W sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(V)$ engendré par des "réflexions" ($r \in \mathrm{GL}(V)$ d'ordre fini et fixant un hyperplan)
- on suppose W bien engendré, i.e., il peut être engendré par n réflexions.

On définit $h := d_n$ le plus grand degré invariant.

[Springer] $\Longrightarrow$ l'ensemble des éléments de W $e^{\frac{2i\pi}{h}}$-réguliers...

- est non vide et forme une classe de conjugaison de W ;
- $=$ l'ensemble des éléments avec $e^{\frac{2i\pi}{h}}$ comme valeur propre.

Définition (Bessis '06)

Soit W un groupe de réflexion complexe irréductible bien engendré. On appelle élément de Coxeter de W un élément $e^{\frac{2i\pi}{h}}$-régulier.

Groupe de réflexion complexe

- V $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n
- W sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(V)$ engendré par des "réflexions" ($r \in \mathrm{GL}(V)$ d'ordre fini et fixant un hyperplan)
- on suppose W bien engendré, i.e., il peut être engendré par n réflexions.

On définit $h := d_n$ le plus grand degré invariant.

[Springer] $\implies$ l'ensemble des éléments de W $e^{\frac{2i\pi}{h}}$-réguliers...

- est non vide et forme une classe de conjugaison de W ;
- $=$ l'ensemble des éléments avec $e^{\frac{2i\pi}{h}}$ comme valeur propre.

Définition (Bessis '06)

Soit W un groupe de réflexion complexe irréductible bien engendré. On appelle élément de Coxeter de W un élément $e^{\frac{2i\pi}{h}}$-régulier.

Groupe de réflexion complexe

- V $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n
- W sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(V)$ engendré par des "réflexions" ($r \in \mathrm{GL}(V)$ d'ordre fini et fixant un hyperplan)
- on suppose W bien engendré, i.e., il peut être engendré par n réflexions.

On définit $h := d_n$ le plus grand degré invariant.

[Springer] $\implies$ l'ensemble des éléments de W $e^{\frac{2i\pi}{h}}$-réguliers...

- est non vide et forme une classe de conjugaison de W ;
- $=$ l'ensemble des éléments avec $e^{\frac{2i\pi}{h}}$ comme valeur propre.

Définition (Bessis '06)

Soit W un groupe de réflexion complexe irréductible bien engendré. On appelle élément de Coxeter de W un élément $e^{\frac{2i\pi}{h}}$-régulier.

1. Définitions “classiques” d'un élément de Coxeter
   - ... pour un système de Coxeter (W, S)
   - ... pour un groupe de réflexion réel
   - ... pour un groupe de réflexion complexe

2. Définitions étendues
   - ... avec des structures de Coxeter alternatives
   - ... avec des automorphismes de réflexion
   - ... avec d'autres valeurs propres... Résultat principal et conséquence pour la combinatoire de Coxeter-Catalan

3. Automorphismes galoisiens
   - Corps de définition de W et automorphismes galoisiens
   - Action sur les classes de conjugaison d'éléments de Coxeter généralisés

1. Définitions "classiques" d'un élément de Coxeter
   - ... pour un système de Coxeter (W, S)
   - ... pour un groupe de réflexion réel
   - ... pour un groupe de réflexion complexe

2. Définitions étendues
   - ... avec des structures de Coxeter alternatives
   - ... avec des automorphismes de réflexion
   - ... avec d'autres valeurs propres... Résultat principal et conséquence pour la combinatoire de Coxeter-Catalan

3. Automorphismes galoisiens
   - Corps de définition de W et automorphismes galoisiens
   - Action sur les classes de conjugaison d'éléments de Coxeter généralisés

Autres structures de Coxeter

En général un groupe de réflexion réel n'a pas qu'une seule structure de Coxeter. Exemple : $I_2(6) \simeq A_1 \times A_2$

Mais :

Proposition (observation/folklore)

Soit W un groupe de réflexion réel fini, R l'ensemble de toutes les réflexions de W. Soit $S, S' \subseteq R$ tels que (W, S) et (W, S') soient des systèmes de Coxeter. Alors (W, S) et (W, S') sont des systèmes de Coxeter isomorphes.

preuve moche ! (vérification sur la classification)

Autres structures de Coxeter

En général un groupe de réflexion réel n'a pas qu'une seule structure de Coxeter. Exemple : $I_2(6) \simeq A_1 \times A_2$

Mais :

Proposition (observation/folklore)

Soit W un groupe de réflexion réel fini, R l'ensemble de toutes les réflexions de W. Soit $S, S' \subseteq R$ tels que (W, S) et (W, S') soient des systèmes de Coxeter. Alors (W, S) et (W, S') sont des systèmes de Coxeter isomorphes.

preuve moche ! (vérification sur la classification)

Autres structures de Coxeter

En général un groupe de réflexion réel n'a pas qu'une seule structure de Coxeter. Exemple : $I_2(6) \simeq A_1 \times A_2$

Mais :

Proposition (observation/folklore)

Autrement dit :
*(W, S) système de Coxeter **fini**. $R := \bigcup_{w \in W} wSw^{-1}$. Soit $S' \subseteq R$ tel que (W, S') soit aussi un système de Coxeter. Alors (W, S') est isomorphe à (W, S).*

preuve moche ! (vérification sur la classification)

Autres structures de Coxeter

En général un groupe de réflexion réel n'a pas qu'une seule structure de Coxeter. Exemple : $I_2(6) \simeq A_1 \times A_2$

Mais :

Proposition (observation/folklore)

Autrement dit :
*(W, S) système de Coxeter **fini**. $R := \bigcup_{w \in W} wSw^{-1}$. Soit $S' \subseteq R$ tel que (W, S') soit aussi un système de Coxeter. Alors (W, S') est isomorphe à (W, S).*

preuve moche ! (vérification sur la classification)

Nouveaux éléments de Coxeter

Pour W groupe de réflexion réel, on peut obtenir des structures de Coxeter ne provenant pas d'une chambre de l'arrangement...
Structure isomorphe mais pas conjuguée !

Exemple de $I_2(5)$.

Définition

On appelle élément de Coxeter généralisé de W un produit (dans n'importe quel ordre) des éléments de S, où S est tel que

- S est constitué de réflexions ;
- (W, S) est un système de Coxeter.

Nouveaux éléments de Coxeter

Pour W groupe de réflexion réel, on peut obtenir des structures de Coxeter ne provenant pas d'une chambre de l'arrangement...
Structure isomorphe mais pas conjuguée !

Exemple de $I_2(5)$.

Définition

On appelle élément de Coxeter généralisé de W un produit (dans n'importe quel ordre) des éléments de S, où S est tel que

- S est constitué de réflexions ;
- (W, S) est un système de Coxeter.

Nouveaux éléments de Coxeter

Pour W groupe de réflexion réel, on peut obtenir des structures de Coxeter ne provenant pas d'une chambre de l'arrangement...
Structure isomorphe mais pas conjuguée !

Exemple de $I_2(5)$.

Définition

On appelle **élément de Coxeter généralisé** de W un produit (dans n'importe quel ordre) des éléments de S, où S est tel que

- S est constitué de réflexions ;
- (W, S) est un système de Coxeter.

1. Définitions “classiques” d’un élément de Coxeter
   - ... pour un système de Coxeter (W, S)
   - ... pour un groupe de réflexion réel
   - ... pour un groupe de réflexion complexe

2. Définitions étendues
   - ... avec des structures de Coxeter alternatives
   - ... avec des automorphismes de réflexion
   - ... avec d’autres valeurs propres... Résultat principal et conséquence pour la combinatoire de Coxeter-Catalan

3. Automorphismes galoisiens
   - Corps de définition de W et automorphismes galoisiens
   - Action sur les classes de conjugaison d’éléments de Coxeter généralisés

Automorphismes de réflexion

(W, S) et (W, S') sont des systèmes de Coxeter isomorphes $\Longrightarrow$ il existe un automorphisme ψ de W envoyant S sur S'.

Fait : ψ est alors un automorphisme de réflexion de W, i.e., un automorphisme de W stabilisant l'ensemble R de toutes les réflexions.

Proposition

c est un élément de Coxeter généralisé de W

$$\Updownarrow$$

$c = \psi(c_0)$ avec ψ automorphisme de réflexion et c_0 élément de Coxeter classique de W.

1. Définitions “classiques” d’un élément de Coxeter
   - ... pour un système de Coxeter (W, S)
   - ... pour un groupe de réflexion réel
   - ... pour un groupe de réflexion complexe

2. Définitions étendues
   - ... avec des structures de Coxeter alternatives
   - ... avec des automorphismes de réflexion
   - ... avec d’autres valeurs propres... Résultat principal et conséquence pour la combinatoire de Coxeter-Catalan

3. Automorphismes galoisiens
   - Corps de définition de W et automorphismes galoisiens
   - Action sur les classes de conjugaison d’éléments de Coxeter généralisés

Remplacer $e^{2i\pi/h}$?

W groupe de réflexion complexe irréductible bien engendré.
Remplacer $e^{2i\pi/h}$-régulier par régulier d'ordre h, i.e., ζ-régulier avec ζ racine h-ième primitive de l'unité.

Théorème (Reiner-R.-Stump)

Soit $c \in W$. Équivalences entre :

(i) *c est régulier d'ordre h ;*

(ii) *$c = w^p$ pour w élément de Coxeter classique ($e^{2i\pi/h}$-régulier) et p premier avec h ;*

(iii) *c a une valeur propre d'ordre h ;*

(iv) *$c = \psi(w)$ avec w élément de Coxeter classique et ψ automorphisme de réflexion de W.*

Si W est réel, alors c'est aussi équivalent à :

(v) *Il existe $S \subseteq R$ tel que (W, S) soit un système de Coxeter et c soit le produit (dans n'importe quel ordre) des éléments de S.*

Remplacer $e^{2i\pi/h}$?

W groupe de réflexion complexe irréductible bien engendré.
Remplacer $e^{2i\pi/h}$-régulier par régulier d'ordre h, i.e., ζ-régulier avec ζ racine h-ième primitive de l'unité.

Théorème (Reiner-R.-Stump)

Soit $c \in W$. Équivalences entre :

(i) *c est régulier d'ordre h ;*

(ii) *$c = w^p$ pour w élément de Coxeter classique ($e^{2i\pi/h}$-régulier) et p premier avec h ;*

(iii) *c a une valeur propre d'ordre h ;*

(iv) *$c = \psi(w)$ avec w élément de Coxeter classique et ψ automorphisme de réflexion de W.*

Si W est réel, alors c'est aussi équivalent à :

(v) *Il existe $S \subseteq R$ tel que (W, S) soit un système de Coxeter et c soit le produit (dans n'importe quel ordre) des éléments de S.*

Remplacer $e^{2i\pi/h}$?

W groupe de réflexion complexe irréductible bien engendré.
Remplacer $e^{2i\pi/h}$-régulier par régulier d'ordre h, i.e., ζ-régulier avec ζ racine h-ième primitive de l'unité.

Théorème (Reiner-R.-Stump)

Soit $c \in W$. Équivalences entre :

(i) *c est régulier d'ordre h ;*

(ii) *$c = w^p$ pour w élément de Coxeter classique ($e^{2i\pi/h}$-régulier) et p premier avec h ;*

(iii) *c a une valeur propre d'ordre h ;*

(iv) *$c = \psi(w)$ avec w élément de Coxeter classique et ψ automorphisme de réflexion de W.*

Si W est réel, alors c'est aussi équivalent à :

(v) *Il existe $S \subseteq R$ tel que (W, S) soit un système de Coxeter et c soit le produit (dans n'importe quel ordre) des éléments de S.*

Combinatoire de Coxeter-Catalan

On appelle un élément vérifiant (i)-(v) un élément de Coxeter généralisé de W.

Corollaire

Soit W g.r.c irréductible bien engendré, et $R = \mathrm{Refs}(W)$. Toute propriété connue pour les éléments de Coxeter classiques, et qui ne dépend que de la combinatoire du couple (W, R), s'étend aux éléments de Coxeter généralisés... En particulier, tout ce qui touche à la combinatoire de Coxeter-Catalan :

- *Les treillis de partitions non-croisées $\mathrm{NC}(W, c)$ sont tous des posets isomorphes entre eux ;*
- *Le nombre de décompositions réduites d'un élément de Coxeter généralisé c en réflexions est $\frac{n!h^n}{|W|}$;*
- *L'action d'Hurwitz du groupe de tresses B_n sur les décompositions réduites de c est transitive...*

Combinatoire de Coxeter-Catalan

On appelle un élément vérifiant (i)-(v) un élément de Coxeter généralisé de W.

Corollaire

Soit W g.r.c irréductible bien engendré, et $R = \mathrm{Refs}(W)$.
Toute propriété connue pour les éléments de Coxeter classiques, et qui ne dépend que de la combinatoire du couple (W, R), s'étend aux éléments de Coxeter généralisés... En particulier, tout ce qui touche à la combinatoire de Coxeter-Catalan :

- *Les treillis de partitions non-croisées $\mathrm{NC}(W, c)$ sont tous des posets isomorphes entre eux ;*
- *Le nombre de décompositions réduites d'un élément de Coxeter généralisé c en réflexions est $\frac{n!h^n}{|W|}$;*
- *L'action d'Hurwitz du groupe de tresses B_n sur les décompositions réduites de c est transitive...*

Combinatoire de Coxeter-Catalan

On appelle un élément vérifiant (i)-(v) un élément de Coxeter généralisé de W.

Corollaire

Soit W g.r.c irréductible bien engendré, et $R = \mathrm{Refs}(W)$. Toute propriété connue pour les éléments de Coxeter classiques, et qui ne dépend que de la combinatoire du couple (W, R), s'étend aux éléments de Coxeter généralisés... En particulier, tout ce qui touche à la combinatoire de Coxeter-Catalan :

- *Les treillis de partitions non-croisées $\mathrm{NC}(W, c)$ sont tous des posets isomorphes entre eux ;*
- *Le nombre de décompositions réduites d'un élément de Coxeter généralisé c en réflexions est $\frac{n!h^n}{|W|}$;*
- *L'action d'Hurwitz du groupe de tresses B_n sur les décompositions réduites de c est transitive...*

Combinatoire de Coxeter-Catalan

On appelle un élément vérifiant (i)-(v) un élément de Coxeter généralisé de W.

Corollaire

Soit W g.r.c irréductible bien engendré, et $R = \mathrm{Refs}(W)$.
Toute propriété connue pour les éléments de Coxeter classiques, et qui ne dépend que de la combinatoire du couple (W, R), s'étend aux éléments de Coxeter généralisés... En particulier, tout ce qui touche à la combinatoire de Coxeter-Catalan :

- *Les treillis de partitions non-croisées $\mathrm{NC}(W, c)$ sont tous des posets isomorphes entre eux ;*
- *Le nombre de décompositions réduites d'un élément de Coxeter généralisé c en réflexions est $\frac{n!h^n}{|W|}$;*
- *L'action d'Hurwitz du groupe de tresses B_n sur les décompositions réduites de c est transitive...*

Combinatoire de Coxeter-Catalan

On appelle un élément vérifiant (i)-(v) un élément de Coxeter généralisé de W.

Corollaire

Soit W g.r.c irréductible bien engendré, et $R = \mathrm{Refs}(W)$.
Toute propriété connue pour les éléments de Coxeter classiques, et qui ne dépend que de la combinatoire du couple (W, R), s'étend aux éléments de Coxeter généralisés... En particulier, tout ce qui touche à la combinatoire de Coxeter-Catalan :

- *Les treillis de partitions non-croisées $\mathrm{NC}(W, c)$ sont tous des posets isomorphes entre eux ;*
- *Le nombre de décompositions réduites d'un élément de Coxeter généralisé c en réflexions est $\frac{n!h^n}{|W|}$;*
- *L'action d'Hurwitz du groupe de tresses B_n sur les décompositions réduites de c est transitive...*

Combinatoire de Coxeter-Catalan

On appelle un élément vérifiant (i)-(v) un élément de Coxeter généralisé de W.

Corollaire

Soit W g.r.c irréductible bien engendré, et $R = \mathrm{Refs}(W)$.
Toute propriété connue pour les éléments de Coxeter classiques, et qui ne dépend que de la combinatoire du couple (W, R), s'étend aux éléments de Coxeter généralisés... En particulier, tout ce qui touche à la combinatoire de Coxeter-Catalan :

- *Les treillis de partitions non-croisées $\mathrm{NC}(W, c)$ sont tous des posets isomorphes entre eux ;*
- *Le nombre de décompositions réduites d'un élément de Coxeter généralisé c en réflexions est $\frac{n!h^n}{|W|}$;*
- *L'action d'Hurwitz du groupe de tresses B_n sur les décompositions réduites de c est transitive...*

1. Définitions "classiques" d'un élément de Coxeter
   - ... pour un système de Coxeter (W, S)
   - ... pour un groupe de réflexion réel
   - ... pour un groupe de réflexion complexe
2. Définitions étendues
   - ... avec des structures de Coxeter alternatives
   - ... avec des automorphismes de réflexion
   - ... avec d'autres valeurs propres... Résultat principal et conséquence pour la combinatoire de Coxeter-Catalan
3. Automorphismes galoisiens
   - Corps de définition de W et automorphismes galoisiens
   - Action sur les classes de conjugaison d'éléments de Coxeter généralisés

1. Définitions “classiques” d’un élément de Coxeter
   - ... pour un système de Coxeter (W, S)
   - ... pour un groupe de réflexion réel
   - ... pour un groupe de réflexion complexe

2. Définitions étendues
   - ... avec des structures de Coxeter alternatives
   - ... avec des automorphismes de réflexion
   - ... avec d’autres valeurs propres... Résultat principal et conséquence pour la combinatoire de Coxeter-Catalan

3. Automorphismes galoisiens
   - Corps de définition de W et automorphismes galoisiens
   - Action sur les classes de conjugaison d’éléments de Coxeter généralisés

Corps de définition de W

Définition

Le corps de définition K_W de W est le plus petit corps sur lequel on peut écrire toutes les matrices de W.

Fait : K_W est le corps engendré par les traces des éléments de W.

Exemples

W groupe de Weyl : $K_W = \mathbb{Q}$
$W = H_3$ ou H_4 : $K_W = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$
$W = I_2(m)$: $K_W = \mathbb{Q}(\cos \frac{2\pi}{m})$

Corps de définition de W

Définition

Le corps de définition K_W de W est le plus petit corps sur lequel on peut écrire toutes les matrices de W.

Fait : K_W est le corps engendré par les traces des éléments de W.

Exemples

W groupe de Weyl : $K_W = \mathbb{Q}$
$W = H_3$ ou H_4 : $K_W = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$
$W = I_2(m)$: $K_W = \mathbb{Q}(\cos \frac{2\pi}{m})$

Corps de définition de W

Définition

Le corps de définition K_W de W est le plus petit corps sur lequel on peut écrire toutes les matrices de W.

Fait : K_W est le corps engendré par les traces des éléments de W.

Exemples

W groupe de Weyl : $K_W = \mathbb{Q}$
$W = H_3$ ou H_4 : $K_W = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$
$W = I_2(m)$: $K_W = \mathbb{Q}(\cos \frac{2\pi}{m})$

Action de Galois sur W

Soit $\Gamma := \mathrm{Gal}(K_W/\mathbb{Q})$. Pour $\gamma \in \Gamma$ et $w \in W$, on peut définit $\gamma(w)$ en agissant sur les coefficients de la matrice de w. dans K_W.

Problème : W n'est pas toujours préservé par l'action de Γ.

Mais : par magie, $\gamma(W)$ est le **même groupe de réflexion** que W dans la classification $\implies$ ils sont conjugués : $\gamma(W) = aWa^{-1}$, pour $a \in \mathrm{GL}(V)$.

$$W \xrightarrow{\gamma} \gamma(W) \xrightarrow{a^{-1}(-)a} a^{-1}\gamma(W)a = W$$

$\rightsquigarrow$ on obtient un automorphisme de réflexion ψ de W, associé à γ, défini modulo conjugaison par un élément du normalisateur $N_{\mathrm{GL}(V)}(W)$.

Un tel automorphisme ψ est appelé automorphisme galoisien de W associé à γ.

Action de Galois sur W

Soit $\Gamma := \mathrm{Gal}(K_W/\mathbb{Q})$. Pour $\gamma \in \Gamma$ et $w \in W$, on peut définit $\gamma(w)$ en agissant sur les coefficients de la matrice de w. dans K_W.

Problème : W n'est pas toujours préservé par l'action de Γ.

Mais : par magie, $\gamma(W)$ est le **même groupe de réflexion** que W dans la classification $\Longrightarrow$ ils sont conjugués : $\gamma(W) = aWa^{-1}$, pour $a \in \mathrm{GL}(V)$.

$$W \xrightarrow{\gamma} \gamma(W) \xrightarrow{a^{-1}(-)a} a^{-1}\gamma(W)a = W$$

$\rightsquigarrow$ on obtient un automorphisme de réflexion ψ de W, associé à γ, défini modulo conjugaison par un élément du normalisateur $N_{\mathrm{GL}(V)}(W)$.

Un tel automorphisme ψ est appelé automorphisme galoisien de W associé à γ.

Action de Galois sur W

Soit $\Gamma := \mathrm{Gal}(K_W/\mathbb{Q})$. Pour $\gamma \in \Gamma$ et $w \in W$, on peut définit $\gamma(w)$ en agissant sur les coefficients de la matrice de w. dans K_W.

Problème : W n'est pas toujours préservé par l'action de Γ.

Mais : par magie, $\gamma(W)$ est le **même groupe de réflexion** que W dans la classification $\implies$ ils sont conjugués : $\gamma(W) = aWa^{-1}$, pour $a \in \mathrm{GL}(V)$.

$$W \xrightarrow{\gamma} \gamma(W) \xrightarrow{a^{-1}(-)a} a^{-1}\gamma(W)a = W$$

$\rightsquigarrow$ on obtient un automorphisme de réflexion ψ de W, associé à γ, défini modulo conjugaison par un élément du normalisateur $N_{\mathrm{GL}(V)}(W)$.

Un tel automorphisme ψ est appelé automorphisme galoisien de W associé à γ.

Action de Galois sur W

Soit $\Gamma := \mathrm{Gal}(K_W/\mathbb{Q})$. Pour $\gamma \in \Gamma$ et $w \in W$, on peut définit $\gamma(w)$ en agissant sur les coefficients de la matrice de w. dans K_W.

Problème : W n'est pas toujours préservé par l'action de Γ.

Mais : par magie, $\gamma(W)$ est le **même groupe de réflexion** que W dans la classification $\implies$ ils sont conjugués : $\gamma(W) = aWa^{-1}$, pour $a \in \mathrm{GL}(V)$.

$$W \xrightarrow{\gamma} \gamma(W) \xrightarrow{a^{-1}(-)a} a^{-1}\gamma(W)a = W$$

$\rightsquigarrow$ on obtient un automorphisme de réflexion ψ de W, associé à γ, défini modulo conjugaison par un élément du normalisateur $N_{\mathrm{GL}(V)}(W)$.

Un tel automorphisme ψ est appelé automorphisme galoisien de W associé à γ.

Action de Galois sur W

Soit $\Gamma := \mathrm{Gal}(K_W/\mathbb{Q})$. Pour $\gamma \in \Gamma$ et $w \in W$, on peut définit $\gamma(w)$ en agissant sur les coefficients de la matrice de w. dans K_W.

Problème : W n'est pas toujours préservé par l'action de Γ.

Mais : par magie, $\gamma(W)$ est le **même groupe de réflexion** que W dans la classification $\implies$ ils sont conjugués : $\gamma(W) = aWa^{-1}$, pour $a \in \mathrm{GL}(V)$.

$$W \xrightarrow{\gamma} \gamma(W) \xrightarrow{a^{-1}(-)a} a^{-1}\gamma(W)a = W$$

$\rightsquigarrow$ on obtient un automorphisme de réflexion ψ de W, associé à γ, défini modulo conjugaison par un élément du normalisateur $N_{\mathrm{GL}(V)}(W)$.

Un tel automorphisme ψ est appelé automorphisme galoisien de W associé à γ.

Action de Galois sur W

Soit $\Gamma := \mathrm{Gal}(K_W/\mathbb{Q})$. Pour $\gamma \in \Gamma$ et $w \in W$, on peut définit $\gamma(w)$ en agissant sur les coefficients de la matrice de w. dans K_W.

Problème : W n'est pas toujours préservé par l'action de Γ.

Mais : par magie, $\gamma(W)$ est le **même groupe de réflexion** que W dans la classification $\implies$ ils sont conjugués : $\gamma(W) = aWa^{-1}$, pour $a \in \mathrm{GL}(V)$.

$$W \xrightarrow{\gamma} \gamma(W) \xrightarrow{a^{-1}(-)a} a^{-1}\gamma(W)a = W$$

$\rightsquigarrow$ on obtient un automorphisme de réflexion ψ de W, associé à γ, défini modulo conjugaison par un élément du normalisateur $N_{\mathrm{GL}(V)}(W)$.

Un tel automorphisme ψ est appelé automorphisme galoisien de W associé à γ.

Automorphismes galoisiens de W

- Le caractère de ψ (vu comme une représentation de W) est $w \mapsto \gamma(\mathrm{tr}_V(w))$.
- Tout automorphisme galoisien de W est un automorphisme de réflexion.
- Soit ϕ un automorphisme de réflexion de W. Alors ϕ est un automorphisme galoisien de W associé à $\gamma \in \Gamma$ si et seulement si ϕ satisfait

$$\forall w \in W, \mathrm{tr}_V(\phi(w)) = \gamma(\mathrm{tr}_V(w)).$$

Théorème (Marin-Michel '10)

Soit W un g.r.c. irréductible. Tout automorphisme de réflexion de W est un automorphisme galoisien (associé à un certain $\gamma \in \Gamma$).

Automorphismes galoisiens de W

- Le caractère de ψ (vu comme une représentation de W) est $w \mapsto \gamma(\mathrm{tr}_V(w))$.
- Tout automorphisme galoisien de W est un automorphisme de réflexion.
- Soit ϕ un automorphisme de réflexion de W. Alors ϕ est un automorphisme galoisien de W associé à $\gamma \in \Gamma$ si et seulement si ϕ satisfait

$$\forall w \in W, \mathrm{tr}_V(\phi(w)) = \gamma(\mathrm{tr}_V(w)).$$

Théorème (Marin-Michel '10)

Soit W un g.r.c. irréductible. Tout automorphisme de réflexion de W est un automorphisme galoisien (associé à un certain $\gamma \in \Gamma$).

Automorphismes galoisiens de W

- Le caractère de ψ (vu comme une représentation de W) est $w \mapsto \gamma(\mathrm{tr}_V(w))$.
- Tout automorphisme galoisien de W est un automorphisme de réflexion.
- Soit ϕ un automorphisme de réflexion de W. Alors ϕ est un automorphisme galoisien de W associé à $\gamma \in \Gamma$ si et seulement si ϕ satisfait

$$\forall w \in W, \mathrm{tr}_V(\phi(w)) = \gamma(\mathrm{tr}_V(w)).$$

Théorème (Marin-Michel '10)

Soit W un g.r.c. irréductible. Tout automorphisme de réflexion de W est un automorphisme galoisien (associé à un certain $\gamma \in \Gamma$).

Automorphismes galoisiens de W

- Le caractère de ψ (vu comme une représentation de W) est $w \mapsto \gamma(\mathrm{tr}_V(w))$.
- Tout automorphisme galoisien de W est un automorphisme de réflexion.
- Soit ϕ un automorphisme de réflexion de W. Alors ϕ est un automorphisme galoisien de W associé à $\gamma \in \Gamma$ si et seulement si ϕ satisfait

$$\forall w \in W, \mathrm{tr}_V(\phi(w)) = \gamma(\mathrm{tr}_V(w)).$$

Théorème (Marin-Michel '10)

Soit W un g.r.c. irréductible. Tout automorphisme de réflexion de W est un automorphisme galoisien (associé à un certain $\gamma \in \Gamma$).

Automorphismes galoisiens de W

- Le caractère de ψ (vu comme une représentation de W) est $w \mapsto \gamma(\mathrm{tr}_V(w))$.
- Tout automorphisme galoisien de W est un automorphisme de réflexion.
- Soit ϕ un automorphisme de réflexion de W. Alors ϕ est un automorphisme galoisien de W associé à $\gamma \in \Gamma$ si et seulement si ϕ satisfait

$$\forall w \in W, \mathrm{tr}_V(\phi(w)) = \gamma(\mathrm{tr}_V(w)).$$

Théorème (Marin-Michel '10)

Soit W un g.r.c. irréductible. Tout automorphisme de réflexion de W est un automorphisme galoisien (associé à un certain $\gamma \in \Gamma$).

1. Définitions “classiques” d’un élément de Coxeter
   - ... pour un système de Coxeter (W, S)
   - ... pour un groupe de réflexion réel
   - ... pour un groupe de réflexion complexe

2. Définitions étendues
   - ... avec des structures de Coxeter alternatives
   - ... avec des automorphismes de réflexion
   - ... avec d’autres valeurs propres... Résultat principal et conséquence pour la combinatoire de Coxeter-Catalan

3. Automorphismes galoisiens
   - Corps de définition de W et automorphismes galoisiens
   - Action sur les classes de conjugaison d’éléments de Coxeter généralisés

Action simplement transitive de Γ

Via les automorphismes galoisiens, $\Gamma = \mathrm{Gal}(K_W/\mathbb{Q})$ n'agit pas directement sur W, mais sur les classes de $N_{\mathrm{GL}(V)}(W)$-conjugaison de W.

$\rightsquigarrow$ action de Γ sur
$\mathrm{Cox}(W) := \{$classes de conjugaison d'élts de Coxeter généralisés$\}$
[Marin-Michel] et [RRS] $\implies$ cette action est transitive.

Théorème (RRS)

Pour W g.r.c. irréductible bien engendré, l'action de $\Gamma = \mathrm{Gal}(K_W/\mathbb{Q})$ sur $\mathrm{Cox}(W)$ est simplement transitive :

$$\forall C, C' \in \mathrm{Cox}(W), \exists! \gamma \in \Gamma, C' = \gamma \cdot C.$$

Par conséquent : $|\mathrm{Cox}(W)| = [K_W : \mathbb{Q}]$.

$\implies$ caractérisations de K_W utilisant les **exposants** de W [Malle].

Action simplement transitive de Γ

Via les automorphismes galoisiens, $\Gamma = \mathrm{Gal}(K_W/\mathbb{Q})$ n'agit pas directement sur W, mais sur les classes de $N_{\mathrm{GL}(V)}(W)$-conjugaison de W.

$\rightsquigarrow$ action de Γ sur

$\mathrm{Cox}(W) :=$ {classes de conjugaison d'élts de Coxeter généralisés}

[Marin-Michel] et [RRS] $\Longrightarrow$ cette action est transitive.

Théorème (RRS)

Pour W g.r.c. irréductible bien engendré, l'action de $\Gamma = \mathrm{Gal}(K_W/\mathbb{Q})$ sur $\mathrm{Cox}(W)$ est simplement transitive :

$$\forall C, C' \in \mathrm{Cox}(W), \exists! \gamma \in \Gamma, C' = \gamma \cdot C.$$

Par conséquent : $|\mathrm{Cox}(W)| = [K_W : \mathbb{Q}]$.

$\Longrightarrow$ caractérisations de K_W utilisant les **exposants** de W [Malle].

Action simplement transitive de Γ

Via les automorphismes galoisiens, $\Gamma = \mathrm{Gal}(K_W/\mathbb{Q})$ n'agit pas directement sur W, mais sur les classes de $N_{\mathrm{GL}(V)}(W)$-conjugaison de W.

$\rightsquigarrow$ action de Γ sur
$\mathrm{Cox}(W) :=$ {classes de conjugaison d'élts de Coxeter généralisés}
[Marin-Michel] et [RRS] $\implies$ cette action est transitive.

Théorème (RRS)

Pour W g.r.c. irréductible bien engendré, l'action de $\Gamma = \mathrm{Gal}(K_W/\mathbb{Q})$ sur $\mathrm{Cox}(W)$ est simplement transitive :

$$\forall C, C' \in \mathrm{Cox}(W), \exists! \gamma \in \Gamma, C' = \gamma \cdot C.$$

Par conséquent : $|\mathrm{Cox}(W)| = [K_W : \mathbb{Q}]$.

$\implies$ caractérisations de K_W utilisant les **exposants** de W [Malle].

Action simplement transitive de Γ

Via les automorphismes galoisiens, $\Gamma = \mathrm{Gal}(K_W/\mathbb{Q})$ n'agit pas directement sur W, mais sur les classes de $N_{\mathrm{GL}(V)}(W)$-conjugaison de W.

$\rightsquigarrow$ action de Γ sur
$\mathrm{Cox}(W) := \{$classes de conjugaison d'élts de Coxeter généralisés$\}$
[Marin-Michel] et [RRS] $\implies$ cette action est transitive.

Théorème (RRS)

Pour W g.r.c. irréductible bien engendré, l'action de $\Gamma = \mathrm{Gal}(K_W/\mathbb{Q})$ sur $\mathrm{Cox}(W)$ est simplement transitive :

$$\forall C, C' \in \mathrm{Cox}(W), \exists! \gamma \in \Gamma, C' = \gamma \cdot C.$$

Par conséquent : $|\mathrm{Cox}(W)| = [K_W : \mathbb{Q}]$.

$\implies$ caractérisations de K_W utilisant les **exposants** de W [Malle].

Action simplement transitive de Γ

Via les automorphismes galoisiens, $\Gamma = \mathrm{Gal}(K_W/\mathbb{Q})$ n'agit pas directement sur W, mais sur les classes de $N_{\mathrm{GL}(V)}(W)$-conjugaison de W.

$\rightsquigarrow$ action de Γ sur
$\mathrm{Cox}(W) :=$ {classes de conjugaison d'élts de Coxeter généralisés}
[Marin-Michel] et [RRS] $\implies$ cette action est transitive.

Théorème (RRS)

Pour W g.r.c. irréductible bien engendré, l'action de $\Gamma = \mathrm{Gal}(K_W/\mathbb{Q})$ sur $\mathrm{Cox}(W)$ est simplement transitive :

$$\forall C, C' \in \mathrm{Cox}(W), \exists! \gamma \in \Gamma, C' = \gamma \cdot C.$$

Par conséquent : $|\mathrm{Cox}(W)| = [K_W : \mathbb{Q}]$.

$\implies$ caractérisations de K_W utilisant les **exposants** de W [Malle].

Action simplement transitive de Γ

Via les automorphismes galoisiens, $\Gamma = \mathrm{Gal}(K_W/\mathbb{Q})$ n'agit pas directement sur W, mais sur les classes de $N_{\mathrm{GL}(V)}(W)$-conjugaison de W.

$\rightsquigarrow$ action de Γ sur
$\mathrm{Cox}(W) := \{$classes de conjugaison d'élts de Coxeter généralisés$\}$
[Marin-Michel] et [RRS] $\implies$ cette action est transitive.

Théorème (RRS)

Pour W g.r.c. irréductible bien engendré, l'action de $\Gamma = \mathrm{Gal}(K_W/\mathbb{Q})$ sur $\mathrm{Cox}(W)$ est simplement transitive :

$$\forall C, C' \in \mathrm{Cox}(W), \exists! \gamma \in \Gamma, C' = \gamma \cdot C.$$

Par conséquent : $|\mathrm{Cox}(W)| = [K_W : \mathbb{Q}]$.

$\implies$ caractérisations de K_W utilisant les **exposants** de W [Malle].

Autres résultats, questions...

- La propriété de transitivité des automorphismes de réflexion sur les éléments réguliers d'ordre h s'étend aux éléments Springer-réguliers d'ordre quelconque.

- la caractérisation des éléments de Coxeter généralisés pour les groupes réels s'étend aux groupes de Shephard (présentation similaire à Coxeter).

- pour les autres groupes complexes bien engendrés, pas de présentation naturelle, pas (encore ?) de vision "combinatoire" des éléments de Coxeter.

Merci !

Autres résultats, questions...

- La propriété de transitivité des automorphismes de réflexion sur les éléments réguliers d'ordre h s'étend aux éléments Springer-réguliers d'ordre quelconque.

- la caractérisation des éléments de Coxeter généralisés pour les groupes réels s'étend aux groupes de Shephard (présentation similaire à Coxeter).

- pour les autres groupes complexes bien engendrés, pas de présentation naturelle, pas (encore ?) de vision "combinatoire" des éléments de Coxeter.

Merci !

Autres résultats, questions...

- La propriété de transitivité des automorphismes de réflexion sur les éléments réguliers d'ordre h s'étend aux éléments Springer-réguliers d'ordre quelconque.

- la caractérisation des éléments de Coxeter généralisés pour les groupes réels s'étend aux groupes de Shephard (présentation similaire à Coxeter).

- pour les autres groupes complexes bien engendrés, pas de présentation naturelle, pas (encore ?) de vision "combinatoire" des éléments de Coxeter.

Merci !

Autres résultats, questions...

- La propriété de transitivité des automorphismes de réflexion sur les éléments réguliers d'ordre h s'étend aux éléments Springer-réguliers d'ordre quelconque.

- la caractérisation des éléments de Coxeter généralisés pour les groupes réels s'étend aux groupes de Shephard (présentation similaire à Coxeter).

- pour les autres groupes complexes bien engendrés, pas de présentation naturelle, pas (encore ?) de vision "combinatoire" des éléments de Coxeter.

Merci !

Autres résultats, questions...

- La propriété de transitivité des automorphismes de réflexion sur les éléments réguliers d'ordre h s'étend aux éléments Springer-réguliers d'ordre quelconque.
- la caractérisation des éléments de Coxeter généralisés pour les groupes réels s'étend aux groupes de Shephard (présentation similaire à Coxeter).
- pour les autres groupes complexes bien engendrés, pas de présentation naturelle, pas (encore ?) de vision "combinatoire" des éléments de Coxeter.

Merci !