PARIS 7 MA1 (MASS)
2008-2009

CORRIGÉ DE L'EXAMEN PARTIEL DU 9 DÉCEMBRE 2008
Durée 2 h 15

Les notations log *et* ln *sont synonymes et désignent la même fonction. Les deux notations sont acceptées.*

Questions de cours. *a*) Énoncé du théorème des accroissements finis.

b) Développement limité de $\log(1 + x)$ en 0 à l'ordre n.

c) Développement limité de e^x en 0 à l'ordre n.

Réponses. *a*) *Théorème des accroissements finis.* Soit f une fonction réelle continue définie sur un intervalle $[a, b]$, dérivable dans $]a, b[$. Alors il existe un point c de $]a, b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

b)

$$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n) \quad (x \to 0).$$

c)

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \quad (x \to 0).$$

Exercice 1. *a*) Étudier la limite de $\sqrt{e^x + 1} - \sqrt{e^x}$ quand x tend vers $+\infty$.

b) Montrer que $\log(x + 1) - \log x \sim \frac{1}{x}$ quand x tend vers $+\infty$.

c) Donner la partie principale de $x^2 + x^4 + x^6$ pour x tendant vers zéro.

d) Donner la partie principale de $x^2 + x^4 + x^6$ pour x tendant vers $+\infty$.

e) Donner un exemple de deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ ayant même limite pour x tendant vers $+\infty$ et telles que le rappport $f(x)/g(x)$ ne tende pas vers 1 quand x tend vers $+\infty$.

Solution. *a*) En appliquant l'identité $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$, on obtient

$$\sqrt{e^x + 1} - \sqrt{e^x} = \frac{(e^x + 1) - 1}{\sqrt{e^x + 1} + \sqrt{e^x}} = \frac{1}{\sqrt{e^x + 1} + \sqrt{e^x}}$$

Puisque $\sqrt{e^x} = e^{x/2}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, on a

$$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{e^x + 1} - \sqrt{e^x}) = 0.$$

b) Dans l'expression $x + 1$, où x tend vers $+\infty$, on met en facteur le terme dominant :

$$x + 1 = x(1 + \frac{1}{x}).$$

En reportant dans l'expression étudiée, on obtient

$$\log(x + 1) - \log x = \log x + \log(1 + \frac{1}{x}) - \log x = \log(1 + \frac{1}{x}) \sim \frac{1}{x} \quad (x \to +\infty)$$

puisque $\frac{1}{x}$ tend vers zéro quand x tend vers $+\infty$ et qu'on sait que $\log(1 + u) \sim u$ quand u tend vers zéro.

c) Quand x tend vers zéro, le terme dominant dans la somme $x^2 + x^4 + x^6$ pour x est celui dont l'ordre (= le degré) est le plus petit, soit x^2. On a donc

$$x^2 + x^4 + x^6 \sim x^2 \qquad (x \to 0).$$

Si on n'est pas convaincu, on observe que

$$x^2 + x^4 + x^6 = x^2(1 + x^2 + x^4)$$

et que la parenthèse tend vers 1 quand x tend vers zéro. On a donc $x^2 + x^4 + x^6 \sim x^2 \quad (x \to 0)$ par définition du signe $\sim$.

d) Quand x tend vers l'infini, le terme dominant dans la somme $x^2 + x^4 + x^6$ pour x est celui dont le degré est le plus grand, soit x^6. On a donc

$$x^2 + x^4 + x^6 \sim x^6 \qquad (x \to +\infty).$$

e) On peut prendre par exemple $f(x) = 3x^2$ et $g(x) = x^2$. On a

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty = \lim_{x\to+\infty} g(x),$$

mais

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 3 \neq 1.$$

Il est donc faux que deux fonctions ayant même limite soint équivalentes. On a aussi des contre-exemples quand la limite est nulle :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x} = 0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x},$$

mais

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3/x}{1/x} = 3 \neq 1.$$

Par contre, deux fonctions ayant la même limite l *non nulle* et *non infinie* sont équivalentes, puisque dans ce cas

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{l} = 1.$$

Exercice 2. Écrire avec des quantificateurs

a) La suite $(u_n) = (u_0, u_1, u_2, \dots)$ tend vers l quand n tend vers $+\infty$.

b) La suite $(u_n) = (u_0, u_1, u_2, \dots)$ est bornée.

c) La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ possède un maximum.

Solution. *a*) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N},\ (\forall n \in \mathbb{N},)\ n \geqslant \mathrm{N} \Rightarrow |u_n - l| \leqslant \varepsilon.$

b) $\exists \mathrm{M} \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant \mathrm{M}.$

c) $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ f(y) \leqslant f(x)$. (Il y a d'autres solutions possibles.)

Exercice 3. On se place dans l'espace, identifié à $\mathbb{R}^3$ par le choix d'un repère $(\mathrm{O}\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

On considère un plan P d'équation $ax + by + cz = d$. On suppose que $c \neq 0$.

a) Montrer que pour tout point M de coordonnées x, y, z la droite passant par M et parallèle à l'axe Oz rencontre le plan P en un unique point M′ de coordonnées x', y', z'. On donnera l'expression de x', y', z' en fonction de x, y, z.

b) L'application qui au point M associe M′ est appelée *projection sur* P *parallèlement à* Oz. On la notera $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Montrer que si on note X la colonne des coordonnées de M et X′ la colonne des coordonnées de $\mathrm{M}' = p(\mathrm{M})$, la colonne X′ est donnée en fonction de X par une relation de la forme

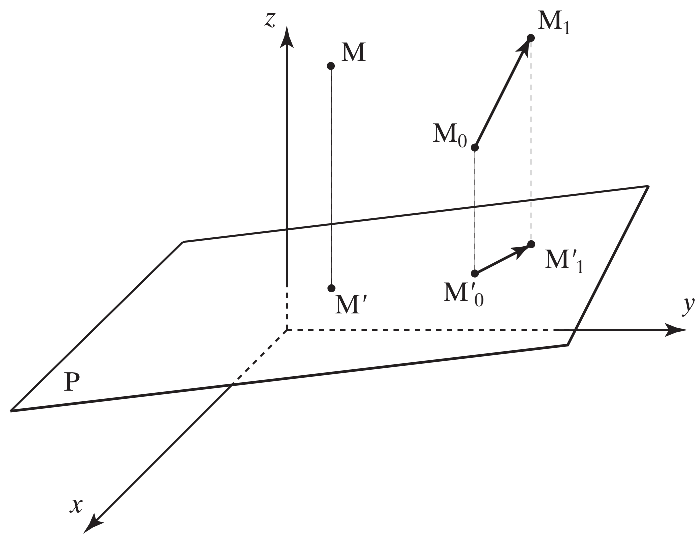
$$\mathrm{X}' = \mathrm{AX} + \mathrm{B}$$

où A est une matrice 3×3 et B une matrice 3×1 (matrice-colonne). On donnera l'expression explicite de A et de B.

c) Soient M_0 et M_1 deux points de l'espace. Montrer que si on note U la colonne des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{M_0M_1}$, et U' celle des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{M_0'M_1'} = \overrightarrow{p(M_0)\,p(M_1)}$, on a la relation

$$U' = AU.$$

d) Vérifier par le calcul que $A^2 = A$. Pouvait-on prévoir ce résultat ?



Solution. *a*) La droite passant par M et parallèle à l'axe Oz est formée des points dont l'abscisse et l'ordonnée sont les mêmes que ceux de M. (On rappelle que x est appelée l'abscisse, y l'ordonnée et z la cote.)

Un point (x', y', z') de cette droite vérifie donc les conditions

$$x' = x, \quad y' = y.$$

Pour que de plus il appartienne au plan P, il faut et il suffit qu'il vérifie la relation

$$ax' + by' + cz' = d;$$

qui s'écrit aussi

$$z' = -\frac{1}{c}(ax' + by' - d)$$

(puisque par hypothèse $c \neq 0$), ce qui équivaut à

$$z' = -\frac{1}{c}(ax + by - d).$$

La parallèle à Oz menée de M rencontre bien le point donné en un point M', unique, dont les coordonnées sont données en fonction de celles de M par les formules

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = -\dfrac{a}{c}x - \dfrac{b}{c}y - \dfrac{d}{c} \end{cases}$$

b) Ces relations s'écrivent aussi

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{a}{c} & -\frac{b}{c} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{d}{c} \end{pmatrix},$$

soit

$$\mathrm{X}' = \mathrm{AX} + \mathrm{B}$$

avec les notations de l'énoncé, où on pose

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{a}{c} & -\frac{b}{c} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{d}{c} \end{pmatrix}.$$

c) Notons $\mathrm{X}_0, \mathrm{X}_1, \mathrm{U}$ les colonnes de coordonnées de $\mathrm{M}_0, \mathrm{M}_1$ et du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{M}_0\mathrm{M}_1}$. Notons de même $\mathrm{X}'_0, \mathrm{X}'_1, \mathrm{U}'$ les colonnes de coordonnées de $\mathrm{M}'_0, \mathrm{M}'_1$ et du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{M}_0\mathrm{M}_1}$. On a $\mathrm{U} = \mathrm{X}_1 - \mathrm{X}_0$ et $\mathrm{U}' = \mathrm{X}'_1 - \mathrm{X}'_0$.

Par suite, on a

$$\mathrm{U}' = \mathrm{X}'_1 - \mathrm{X}'_0 = (\mathrm{AX}_1 + \mathrm{B}) - (\mathrm{AX}_0 + \mathrm{B}) = \mathrm{AX}_1 - \mathrm{AX}_0 = \mathrm{A}(\mathrm{X}_1 - \mathrm{X}_0) = \mathrm{AU}.$$

d) Calculons le produit $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A} \times \mathrm{A}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{a}{c} & -\frac{b}{c} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{a}{c} & -\frac{b}{c} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1\times 1 + 0\times 0 + 0\times\left(-\frac{a}{c}\right) & 1\times 0 + 0\times 1 + 0\times\left(-\frac{b}{c}\right) & 1\times 0 + 0\times 0 + 0\times 0 \\ 0\times 1 + 1\times 0 + 0\times\left(-\frac{a}{c}\right) & 0\times 0 + 1\times 1 + 0\times\left(-\frac{b}{c}\right) & 0\times 0 + 1\times 0 + 0\times 0 \\ -\frac{a}{c}\times 1 - \frac{b}{c}\times 0 + 0\times\left(-\frac{a}{c}\right) & -\frac{a}{c}\times 0 - \frac{b}{c}\times 1 + 0\times\left(-\frac{b}{c}\right) & -\frac{a}{c}\times 0 - \frac{b}{c}\times 0 + 0\times 0 \end{pmatrix}$$

On obtient

$$\mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{a}{c} & -\frac{b}{c} & 0 \end{pmatrix}$$

soit $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}$.

Ce résultat était prévisible, puisque AU représente la projection sur P parallèlement à Oz du vecteur U, et que la projection d'un vecteur déjà porté par le plan P comme AU est égal à ce vecteur : $\mathrm{A}(\mathrm{AU}) = \mathrm{AU}$, et ce quel que soit U. D'où il résulte que $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}$.

Exercice 4. *a*) Soit f la fonction définie par $f(x) = xe^{-x}\log x$ pour $x > 0$ et $f(0) = 0$. Cette fonction est-elle continue en 0 ? dérivable en 0 ?

b) Représenter le graphe de f.

c) Montrer qu'il existe un point $x \neq 0$ et un seul tel que la tangente au graphe de f en ce point passe par l'origine.

Solution. *a*) Quand x tend vers zéro, e^{-x} tend vers $e^0 = 1$, tandis que le produit $x\log x$ tend vers zéro. Par suite,

$$\lim_{x\to 0, x>0} f(x) = 0 = f(0),$$

ce qui montre que f est continue en 0. La dérivée de f en 0, si elle existe, est égale à

$$\lim_{x\to 0, x>0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

Or on a

$$\lim_{x\to 0, x>0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0, x>0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0, x>0} e^{-x}\log x = -\infty.$$

La fonction f n'est donc pas dérivable en 0. On sait toutefois que son graphe présente pour $x = 0$ une demi-tangente verticale, dirigée vers le bas.

b) Pour étudier les variations de f, calculons sa dérivée. On obtient

$$\begin{aligned} f'(x) &= (xe^{-x}\log x)' \\ &= (x)'e^{-x}\log x + x(e^{-x})'\log x + xe^{-x}(\log x)' \qquad \text{(dérivée d'un produit de trois facteurs)} \\ &= e^{-x}\log x - xe^{-x}\log x + e^{-x} \\ &= e^{-x}(1+\log x - x\log x) \end{aligned}$$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x) = 1 + \log x - x\log x$. On a

$$g'(x) = \frac{1}{x} - \log x - 1$$

La fonction $g'(x)$ est toujours décroissante, puisque $1/x$ et $-\log x$ sont décroissantes sur $]0, +\infty[$ (on peut aussi calculer g''), et on a

$$g'(1) = 0, \quad , \lim_{x\to 0} g'(x) = +\infty, \quad , \lim_{x\to+\infty} g'(x) = -\infty.$$

D'où le tableau des variations de g.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$-\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Ce tableau montre que g s'annule deux fois, une fois en un point α situé entre 0 et 1, et une seconde fois en un point β situé à droite de 1. De plus, on a $g(x) > 0$ entre α et β, $g(x) < 0$ en-dehors de $[\alpha, \beta]$.

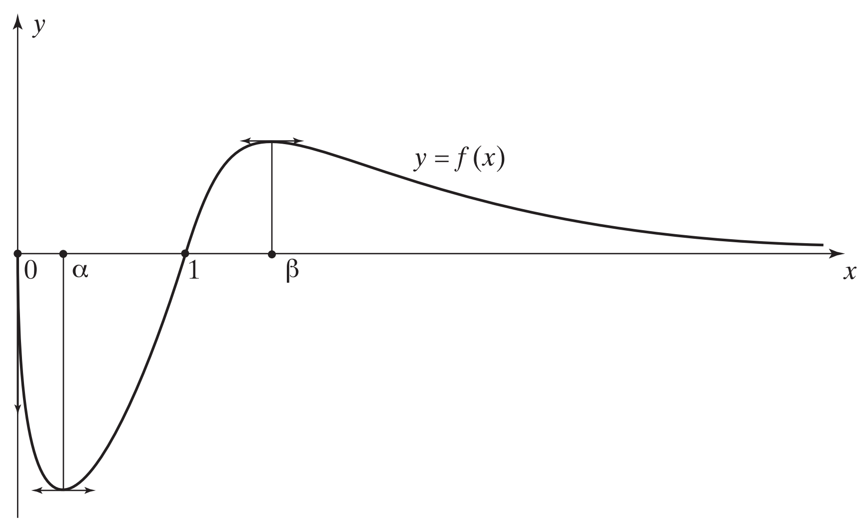
On déduit de là le tableau des variations de f :

x	0		α		1		β		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$		$\nearrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

On sait que $\log x \leqslant x$, on a donc par conséquent $0 \leqslant f(x) \leqslant x^2e^{-x}$ pour $x \geqslant 1$ et

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

En rassemblant les informations ci-dessus, et en se rappelant que le graphe de f admet une demi-tangente verticale dirigée vers le bas en $x = 0$, on obtient une esquisse du graphe de f.



c) L'équation de la tangente au point d'abscisse a au graphe de f est

$$y = f(a) + f'(a)(x-a).$$

Cette droite passe par l'origine si son équation est satisfaite quand on, on prend $x = 0$, $y = 0$, c'est-à-dire si $0 = f(a) - f'(a)a$ ou $af'(a) - f(a) = 0$.

Nous devons donc montrer que l'équation

$$xf'(x) - f(x)$$

n'a qu'une seule solution dans $]0, +\infty[$. Posons

$$\mathrm{F}(x) = xf'(x) - f(x) = e^{-x}(x - x^2 \log x)$$

(tous calculs faits). Dans $]0, +\infty[$, l'équation $\mathrm{F}(x) = 0$ est équivalente à

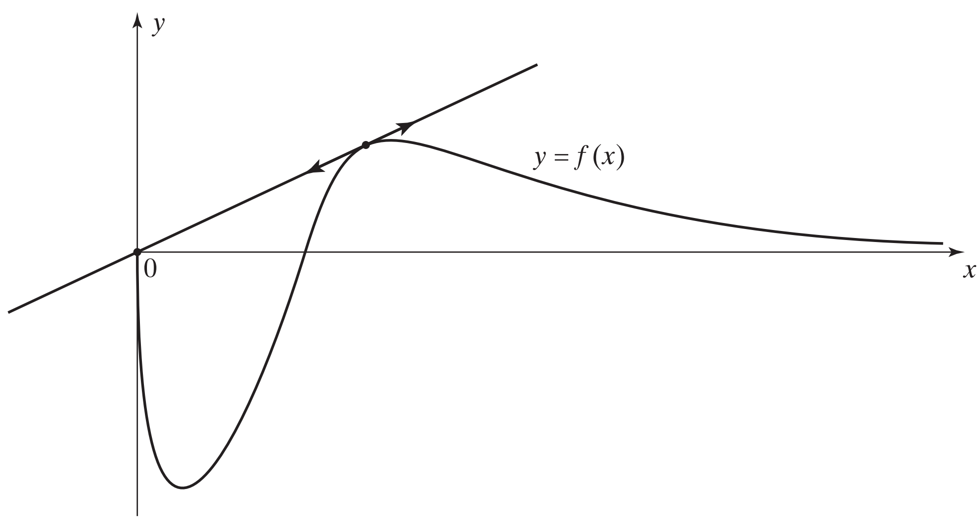
$$\log x = \frac{1}{x}$$

ou à

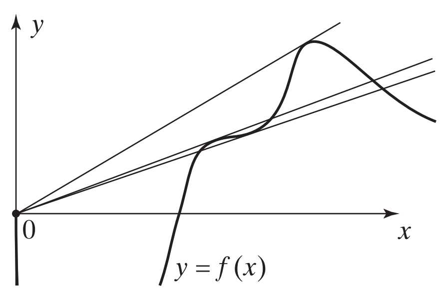
$$\frac{1}{x} - \log x = 0.$$

On a déjà observé que la fonction $\frac{1}{x} - \log x$ est décroissante et que $\frac{1}{x} - \log x$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers zéro, et vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$. En appliquant la corollaire du théorème des valeurs intermédiaires et en observant que $\frac{1}{x} - \log x$ est strictement décroissante (en général, on ne mentionne pas explicitement ces points, ils sont sous-entendus et on se contente du tableau de variations), on en déduit que l'équation $\frac{1}{x} - \log x = 0$ a une solution et une seule dans $]0, +\infty[$, et qu'il en est de même de $\mathrm{F}(x) = 0$. C'est ce qu'on voulait démontrer.

L'analyse confirme donc ce qu'on pouvait lire sur le graphe :



Mais en cette matière le graphe ne prouve rien, parce qu'on n'est pas vraiment sûr qu'il n'y ait pas sur le graphe de f de petites bosses ne changeant pas le sens de variation, et donc invisibles sur le tableau de variations, comme :



En réalité, la plupart des informations fiables qu'on peut tirer du graphe se trouvent déjà sur le tableau de variations.