Université Paris 7 | **Premier semestre 2008-2009**
L1 MASS - Groupe 1M4 | **MA1 - Algèbre et Analyse élémentaires**

TD 1 : Identités, égalités, inégalités

Exercice 1.

Parmi les relations suivantes, quelles sont celles vérifiées quels que soient les quatre réels x_1, x_2, y_1 et y_2, vérifiant $x_1 \leq y_1$ et $x_2 \leq y_2$?

1. $x_1^2 \leq y_1^2$
2. $x_1 - x_2 \leq y_1 - y_2$
3. $x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2$
4. $x_1 x_2 \leq y_1 y_2$
5. $\frac{x_1}{x_2} \leq \frac{y_1}{y_2}$

Même question si l'on suppose de plus les quatre réels positifs.

Exercice 2.

Calculer les sommes suivantes, pour n un entier.

1. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$
2. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$
3. $\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$
4. $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$

Exercice 3.

Démontrer la formule

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

pour n et k entiers naturels ≥ 1.

Exercice 4.

Résoudre dans $\mathbf{R}$ les inéquations suivantes.

1. $\sqrt{x} \leq x$
2. $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+3} \leq 1$
3. $|x-2| < 1$

Exercice 5.

Démontrer les inégalités suivantes.

1. $x + \frac{1}{x} \geq 2$ pour $x > 0$.
2. $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab}$ pour a et $b > 0$.
3. $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ pour a et $b > 0$.
4. $4xy \leq (x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2)$ pour x et y réels.

5.

a) $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$ pour a, b et $c \geq 0$.

b) En déduire, pour a, b et $c > 0$

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9$$

6. $x < 1 + x^2$ pour x réel.

7. $\frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}$ pour a, b et c trois réels positifs tels que $a \leq b + c$.

Exercice 6. *Périmètres, aires, et inégalités*

1. On considère un rectangle quelconque, de périmètre p, d'aire S. Montrer que :

$$p \geq 4\sqrt{S}$$

Dans quel cas est-ce égal ?

Un paysan a de quoi faire 1km de barrières, et veut construire un champ rectangulaire de surface maximale ; comment doit-il s'y prendre ?

2. On considère un parallélépipède rectangle. On note p la somme des longueurs des arêtes, S la somme des aires des faces, et V le volume.

a) En utilisant une formule du cours, montrer que :

$$p \geq 12\sqrt[3]{V}$$

b) Montrer que

$$p^2 \geq 24S$$

On montrera que cela revient à vérifier que pour $x, y, z \geq 0$:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$$

Quand est-ce une égalité ? Formuler un "problème du paysan" et le résoudre.

c) (Plus difficile) De manière plus générale, montrer que pour tout $x_1, \ldots, x_n$ réels,

$$\sum_i x_i^2 \geq \alpha_n \sum_{i<j} x_i x_j$$

où α_n est une constante (dépendant de n) à déterminer.

Exercice 7. *Suite géométrique et développement décimal*

1. Montrer que $1 = 0,999999...$

2. Montrer que le nombre réel $3,24242424...$ est rationnel.

Remarque culturelle : on peut montrer plus généralement que tout nombre réel ayant un développement décimal périodique est rationnel, et en fait cela caractérise les nombres rationnels. En effet la réciproque est vraie, à savoir que tout nombre rationnel admet un développement décimal périodique. Ce résultat fut établi par Wallis en 1693.

Exercice 8.

1. *Intérêts composés.* Une somme d'argent S placée à 5% rapporte au bout d'un an $0,05S$. Combien aura-t-on d'argent en tout au bout de n ans (le taux restant constant) ? Au bout de combien d'années aura-t-on doublé son capital de départ ?

2. *Croissance biologique* Une population de bactéries fonctionne de la manière suivante (tout du moins dans cet exercice) :

- aujourd'hui à 14h, il y a N bactéries (génération 0) ;
- à 15h, chaque bactérie donne naissance à r nouvelles bactéries (génération 1), et ne meurt pas ;
- à 16h, chaque *nouvelle* bactérie (c'est-à-dire celles nées à l'étape précédente) donne naissance à r nouvelles bactéries ;
- etc...

Faire un schéma avec N et r à choisir. On suppose que les bactéries ne meurent jamais. En fonction de N et r :

- quel est le nombre de bactéries qui apparaissent à 23h ?
- combien y aura-t-il de bactéries en tout demain à 13h05 ?
- combien de bactéries sont apparues aujourd'hui entre 17h55 et 22h05 ?

On suppose maintenant que chaque bactérie a une durée de vie de 5h. Combien y aura-t-il alors de bactéries en tout demain à 13h05 ?

Exercice 9.

Soient a et b deux entiers distincts.

1. Montrer que pour tout entier n, $a^n - b^n$ est divisible par $a - b$. Montrer que si n est pair, alors $a^n - b^n$ est en outre divisible par $a + b$.

2. De façon plus générale, montrer que si d divise n, alors $a^n - b^n$ est divisible par $a^d - b^d$.

3. On définit le n-ième nombre de Mersenne par : $M_n = 2^n - 1$. Montrer que si M_n est un nombre premier, alors n est premier. *Remarque culturelle :* La réciproque est fausse. On conjecture cependant qu'il existe une infinité de nombres de Mersenne premiers, mais on ne sait actuellement pas le démontrer ; le plus grand nombre de Mersenne premier connu aujourd'hui est $2^{32582657} - 1$.

4. (Plus difficile) Montrer que si 2^n+1 est un nombre premier, alors n est une puissance de 2. *Remarque culturelle :* on définit ainsi le n-ième nombre de Fermat : $F_n = 2^{2^n} - 1$. Les seuls nombres de Fermat premiers connus actuellement sont F_0, F_1, F_2, F_3, F_4. À partir de F_5, les nombres de Fermat semblent tous être composés, mais on ne l'a pas prouvé.