TD 2 : Sommes et récurrences

Exercice 1. Rappeler la formule donnant une factorisation de $a^n - b^n$. Applications :

a) On considère le polynôme $P(X) = 2X^3 - 5X^2 + 3X - 7$. Si a et b sont deux réels distincts, calculer rapidement le quotient $\frac{P(a)-P(b)}{a-b}$.

b) On considère maintenant un polynôme $P(X)$ quelconque, à coefficients réels. Montrer que si $P(X)$ s'annule en $z \in \mathbb{R}$, alors il est multiple de $(X - z)$ (c'est-à-dire qu'on peut écrire $P(X) = (X - z)Q(X)$ où $Q(X)$ est un autre polynôme). [On pourra écrire la forme de $P(X) - P(z)$.]

Exercice 2. Soit $a > -1$ un réel. Montrer que pour tout n, $(1 + a)^n \geq 1 + na$.

Exercice 3. Montrer les égalités suivantes par la méthode de votre choix :

a) $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

b) $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c) Développer $(k + 1)^4 - k^4$. En déduire, en utilisant les deux formules précédentes, une formule donnant $\sum_{k=1}^n k^3$ en fonction de n.

Exercice 4. Montrer que pour $k \geq 2$, $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$. En déduire une majoration de la somme $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 5. Soient $a, b > 0$. Calculer de deux façons différentes le minimum de l'expression $ta + \frac{b}{t}$, pour $t > 0$.

Exercice 6.

a) Trouver des constantes A et B telles que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$A(x^2 + y^2) \leq 6x^2 + 4xy + 3y^2 \leq B(x^2 + y^2).$$

b) Trouver les meilleures constantes possibles.

Exercice 7.

a) Soit n un entier naturel. Montrer qu'il existe des entiers u_n et v_n tels que $(1 + \sqrt{2})^n = u_n + v_n\sqrt{2}$.

b) Montrer alors que pour tout n le couple (u_n, v_n) est solution de l'équation $|x^2 - 2y^2| = 1$.

Exercice 8. Montrer les inégalités suivantes :

a) $\sqrt{ac} + \sqrt{bd} \leq \sqrt{(a+b)(c+d)}$ $(a, b, c, d \geq 0)$

b) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

c) $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a$

d) $a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2bc + b^2ca + c^2ab$