Université Paris 7 **L1 MASS - Groupe 1M4**

Premier semestre 2008-2009 **MA1 - Algèbre et Analyse élémentaires**

TD 4 : Notions élémentaires de géométrie analytique

---

1 Systèmes linéaires et changement de base

Exercice 1. On considère le système suivant :

$$\begin{cases} -x & - & 4y & + & 3z & = & -1 \\ 2x & + & 4y & + & z & = & 2 \\ 3x & + & 6y & - & z & = & 2 \end{cases}$$

1) Sans le résoudre, prévoir le nombre de solutions.
2) Résoudre le système.

Exercice 2. On considère le système suivant :

$$(S)\begin{cases} x & + & \lambda y & + & \mu z & = & A \\ & & ay & + & bz & = & B \\ & & cy & + & dz & = & C \end{cases}$$

où $\lambda, \mu, a, b, c, d, A, B, C$ sont des paramètres quelconques. Montrer de deux façons différentes que (S) admet une unique solution si et seulement si le sous-système

$$(S')\begin{cases} ay & + & bz & = & B \\ cy & + & dz & = & C \end{cases}$$

admet une unique solution.

Exercice 3. On considère le plan P muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j})$ et on considère la transformation R du plan qui au point de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associe le point de coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{pmatrix}$.

1) Soient $\vec{I} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{J} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$. Est-ce que $(\vec{I}, \vec{J})$ forme une base de P ?
2) On pose $\vec{I'} = R(\vec{I})$ et $\vec{J'} = R(\vec{J})$. Calculer les coordonnées des vecteurs $\vec{I'}$ et $\vec{J'}$. Est-ce que $(\vec{I'}, \vec{J'})$ forme une base de P ?
3) Que peut-on dire de la transformation R (on pourra s'aider d'un dessin) ?

Exercice 4. On considère le système suivant :

$$(S)\begin{cases} x & + & y & + & mz & = & m \\ x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & + & my & - & z & = & 1 \end{cases}$$

Discuter, selon les valeurs du paramètre m, du nombre de solutions de (S). Résoudre le système dans chaque cas.

2 Géométrie dans le plan

Exercice 5. Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{u}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs non nuls. Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires si et seulement si $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = 0$

Exercice 6. Expliquer pourquoi l'équation de la droite passant par deux points de coordonnées (x_0, y_0) et (x_1, y_1) peut s'écrire $\begin{vmatrix} x_0 - x_1 & x - x_1 \\ y_0 - y_1 & y - y_1 \end{vmatrix} = 0$, ou encore $\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x \\ y_0 & y_1 & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Exercice 7. Soit $(D) : ax + by + c = 0$. Montrer que le vecteur $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ dirige (D) et que $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dirige l'orthogonal de (D).

Exercice 8. Donner une équation de la droite (Δ), parallèle à $(D) : 2x - 3y + 5 = 0$, et passant par le point A, dans chacun des cas suivants :
- A a pour coordonnées $(9/2, -1/6)$;
- A a pour coordonnées $(1, -1)$;
- A a pour coordonnées $(0, 0)$.

Exercice 9. Donner une équation de la droite (Δ), perpendiculaire à $(D) : x + 2y + 5 = 0$ et passant par le point B de coordonnées $(6, -4)$.

Exercice 10. Déterminer pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$ les droites $(D_m) : mx + 3y - 1 = 0$ et $(\Delta_m) : x + (m + 2)y - m = 0$ sont sécantes, parallèles, ou confondues.

Exercice 11. Déterminer les coordonnées du (des) point(s) d'intersection de la droite d'équation $ax + by + c = 0$ avec les axes de coordonnées. Pourquoi est-il intéressant de mettre l'équation d'une droite sous la forme $px + qy = 1$ lorsqu'on veut la tracer rapidement ? Quand cela est-il possible ?

Exercice 12. Montrer que si trois droites d'équations $ax + by + c = 0$, $a'x + b'y + c' = 0$, et $a''x + b''y + c'' = 0$ sont concourantes, alors $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0$. Montrer que la réciproque est fausse.

Exercice 13. On considère deux droites $(D) : ax + by + c = 0$ et $(D') : a'x + b'y + c' = 0$, que l'on suppose sécantes. Montrer que l'équation générale d'une droite passant par le point d'intersection de (D) et (D') est :

$$\lambda(ax + by + c) + \mu(a'x + b'y + c') = 0 \text{ avec } (\lambda, \mu) \neq (0, 0)$$

3 Géométrie dans l'espace

Exercice 14. Donnez un couple d'équations pour la droite passant par $A = (1, 5, 7)$ et $B = (2, 1, 3)$

Exercice 15. Donnez un couple d'équations pour la droite passant par $A = (1, 5, 7)$ et de vecteur directeur $\vec{V} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 16. Déterminez l'intersection des plans $P_1 : x - 2y + z + 3 = 0$, $P_2 : 2x + y - z - 2 = 0$ et $P_3 : 4x + y - z + 4 = 0$.

Exercice 17. Donnez une équation du plan passant par $A = (1, 5, 7)$ et perpendiculaire à $\vec{V} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 18. Donnez une équation du plan passant par $A = (1, 1, 1)$ et parallèle à $\vec{V_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{V_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Exercice 19. Donnez une équation du plan passant par $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, 1, 0)$ et $C = (1, 0, 1)$.

Exercice 20. Donnez une équation du plan passant par $A = (1, 2, 1)$, $B = (2, 1, 1)$ et perpendiculaire au plan $x + y + z + 1 = 0$.

Exercice 21. Donnez une équation du plan passant par $A = (1, 2, 1)$ et perpendiculaire aux plans $x + 2y + z + 3 = 0$ et $2x + y - z + 1 = 0$.

Exercice 22. Donnez un couple d'équations cartésiennes puis paramétriques de la droite passant par $A = (1, 1, 1)$ et $B = (1, 0, 2)$.

Exercice 23. Intersection de la droite d'équation $\left\{ \begin{array}{l} 3x + y + 2z + 1 = 0 \\ x + 3y + 5z + 2 = 0 \end{array} \right.$ avec chacun des plans de coordonnées.

Exercice 24. Soit la droite d'équation $\left\{ \begin{array}{c} 3x + y + 2z - 1 = 0 \\ x + 2y - z + 2 = 0 \end{array} \right.$ et le plan défini par $x - y - z + 1 = 0$; montrez qu'ils sont perpendiculaires.

Exercice 25. Donnez un point et un vecteur directeur de la droite d'équation $\left\{ \begin{array}{l} x + y + 2z + 1 = 0 \\ 2x - y - z - 1 = 0 \end{array} \right.$

Exercice 26. Montrez que les droites définies par $\left\{ \begin{array}{c} x + y - 3z = 0 \\ x - y - z + 2 = 0 \end{array} \right.$ et $\left\{ \begin{array}{c} x - y + z = 0 \\ 2x + y - 3z - 1 = 0 \end{array} \right.$ ont un point commun. En déduire qu'elles sont contenues dans un même plan ; en déduire une équation de ce plan.