Université Paris 7 | **Premier semestre 2008-2009**
L1 MASS - Groupe 1M4 | **MA1 - Algèbre et Analyse élémentaires**

TD 5 : Problèmes de géométrie

1 Géométrie analytique

Exercice 1. Donnez une paramétrisation de la droite (Δ) (du plan) d'équation $4x - 3y + 1 = 0$.

Exercice 2. Donnez une paramétrisation du plan P d'équation $3x + y + 2z + 1 = 0$.

Exercice 3. Donnez l'équation de la médiatrice d'un segment $[A, B]$, où A et B ont pour coordonnées respectives (x_A, y_A) et (x_B, y_B).

Exercice 4. Donnez les équations cartésiennes des deux bissectrices associées aux deux droites sécantes suivantes : $(\Delta_1) : 3x + 4y + 3 = 0$ et $(\Delta_2) : 12x - 5y + 4 = 0$.

Exercice 5. Donnez une équation cartésienne du plan P perpendiculaire au plan P' d'équation $2x - 3y + 4z - 1 = 0$ et contenant la droite (Δ) d'intersection de P' avec le plan d'équation $y = 0$.

Exercice 6. Donnez l'équation générale des plans contenant la droite d'équation $\left\{ \begin{array}{l} x - y - z = 0 \\ 2x + y + z + 1 = 0 \end{array} \right.$

Exercice 7. A quelle(s) condition(s) l'équation $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ est-elle celle d'un cercle ? Donnez le cas échéant le centre et le rayon de ce cercle.

2 Géométrie affine, géométrie euclidienne

Exercice 8. Soient A, B, C et D quatre points dans l'espace. Montrez que les milieux de $[A, B]$, $[B, C]$, $[C, D]$ et $[D, A]$ forment un parallélogramme.

Exercice 9. Soit $ABCD$ un quadrilatère. Montrez que $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si les milieux des diagonales sont confondus.

Exercice 10. Soit $ABCD$ un parallélogramme.

1) Montrez que $ABCD$ est un losange si et seulement si ses diagonales sont perpendiculaires.
2) Montrez que $ABCD$ est un rectangle si et seulement si ses diagonales sont de même longueur.

Exercice 11. Soit ABC un triangle non plat.

1) Montrez que les médianes du triangle sont concourantes.
2) Montrez que les hauteurs du triangle sont concourantes.
3) Montrez que les médiatrices du triangle sont concourantes.

Exercice 12. Soient A,B et C trois points du plan.

1) Pour quelles positions de M atteint-on le minimum de $MA^2 + MB^2$?
2) Pour quelles positions de M atteint-on le minimum de $MA^2 + MB^2 + MC^2$?

Exercice 13. Soit $ABCD$ un rectangle non plat, H et K les projetés orthogonaux respectifs de B et D sur la diagonale AC. Calculez la distance HK en fonction des longueurs respectives a et b des cotés AB et BC. Indication. On calculera $\overrightarrow{HK}.\overrightarrow{AC}$.

Exercice 14. Soit $ABCD$ un parallélogramme non plat du plan tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. On considère encore un point P tel que la parallèle à (AB) menée par P coupe (AD) en E et (BC) en F ; tel que la parallèle à (AD) menée par P coupe (AB) en G et (CD) en H. Montrez que les trois droites (EH), (FG) et (AC) sont concourantes ou parallèles. Indication. On se placera dans le repère cartésien $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$; on notera (λ, μ) les coordonnées de P dans ce repère et l'on calculera les équations des droites considérées.

Exercice 15. Dans un triangle ABC rectangle en A, on note A' le milieu de $[BC]$, H le projeté orthogonal de A sur (BC), I et J les projetés orthogonaux de H sur (AB) et (AC). Montrez que (IJ) est orthogonal à (AA').

Exercice 16. *Théorèmes de Ménélaüs et de Céva.*

Soit ABC un triangle du plan, $A' \in (BC)$, $B' \in (CA)$, $C' \in (AB)$ trois points distincts des sommets du triangle.

1) Montrez que A', B' et C' sont alignés si et seulement si $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}.\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}.\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1$.
2) Montrez que (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes ou parallèles si et seulement si $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}.\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}.\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$.

Indication. On se placera dans le repère cartésien $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Exercice 17. *Théorème de Pappus.*

On considère deux droites Δ et Δ' sécantes en un point O. On considère également trois points A_1, A_2 et A_3 (resp. B_1, B_2 et B_3) de Δ (resp. Δ'), de sorte que lorsque $i < j$ les droites (A_iB_j) et (A_jB_i) sont sécantes ; on appelle alors $M_{i,j}$ leur point d'intersection.

Montrez que les trois points $M_{1,2}$, $M_{2,3}$ et $M_{1,3}$ sont alignés.

Indication. On considèrera le repère cartésien $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, où $\overrightarrow{i}$ (resp. $\overrightarrow{j}$) dirige Δ (resp. Δ'). On montrera alors que si a_i (resp. b_j) désigne l'abscisse de A_i (resp. l'ordonné de B_j), le point $M_{i,j}$ a pour coordonnées

$$\left(\frac{a_i a_j (b_j - b_i)}{b_j a_j - b_i a_i}, \frac{b_i b_j (a_j - a_i)}{b_j a_j - b_i a_i}\right)$$

3 Orthogonalité

Exercice 18. Montrez que les vecteurs $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ forment une base orthogonale de $\mathbf{R}^3$. En déduire une base orthonormée.

Quelles sont les coordonnées dans cette base de $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$?

Exercice 19. Trouvez une base orthogonale ayant comme premier vecteur le vecteur $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

Exercice 20. Montrez que si un vecteur de $\overrightarrow{E}$ est orthogonal à tout vecteur de $\overrightarrow{E}$, il est nul.

Exercice 21. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\overrightarrow{E}$. Montrez que si l'ensemble des vecteurs orthogonaux à $\vec{v}$ coïncide avec l'ensemble des vecteurs orthogonaux à $\vec{u}$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.