**Université Paris 7** | **Premier semestre 2008-2009**
**L1 MASS - Groupe 1M4** | **MA1 - Algèbre et Analyse élémentaires**

**TD 6 : Géométrie et matrices**

# 1 Vecteurs

**Exercice 1.** Déterminer la décomposition du vecteur $(1,1,1)$ en somme d'un vecteur colinéaire à $(1,2,3)$ et d'un vecteur orthogonal.

**Exercice 2.** Donner une condition nécessaire et suffisante pour que les vecteurs $(1,1,1)$, $(1,2,3)$, $(m,1,-1)$ soient liés. Quelle est alors la relation de liaison ?

**Exercice 3.** Soit $ABCD$ un rectangle, et soit $M$ un point quelconque du plan. Montrer que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}$.

**Exercice 4.** Soient $A$ et $B$ deux points de l'espace, de coordonnées $(a,a',a'')$ et $(b,b',b'')$. Montrer directement que l'ensemble des points équidistants de $A$ et de $B$ est un plan, dont on donnera l'équation. Vérifier sur l'équation que ce plan est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$, et qu'il passe par le milieu de $AB$.

Résoudre le même exercice sans calculs de coordonnées.

**Exercice 5.** Exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ en fonction des distances $AB$, $AC$, $BC$.

**Exercice 6.** Montrer que les diagonales d'un quadrilatère sont orthogonales si et seulement si les sommes des carrés des côtés opposés sont égales.

**Exercice 7.** Montrer que les diagonales d'un quadrilatère sont orthogonales si et seulement si les médianes ont même longueur.

**Exercice 8.**

a) Soient $A$, $B$, $C$, $D$ quatre points de l'espace. Montrer qu'on a toujours

$$\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{CD}^2-\overrightarrow{BC}^2-\overrightarrow{AD}^2=2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}.$$

b) En déduire que *dans un parallélogramme, la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des côtés.* (On peut montrer que cette propriété caractérise le parallélogramme.)

c) À l'aide du résultat de la question b), montrer que dans un triangle $ABC$ où l'on pose $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, la longueur $s_A$ de la médiane issue de $A$ est donnée par la formule

$$s_A^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2).$$

d) Soit $G$ l'isobarycentre du triangle $ABC$. À l'aide du résultat de la question c), montrer que

$$AG \perp BG \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 5c^2.$$

**EXERCICE 9.** Soient $A, B, C$ trois points de l'espace, et soit $M$ un point quelconque. Montrer que

$$AB^2 + BC^2 + CA^2 \leq 3(MA^2 + MB^2 + MC^2).$$

**EXERCICE 10.** Soient $A$ et $B$ deux points de l'espace, $I$ leur milieu. Montrer que pour tout point $M$ on a

$$MA^2 + MB^2 = 2\,MI^2 + \frac{1}{2}AB^2.$$

## 2 Barycentres, familles orthogonales

**EXERCICE 11.** Soient $A$, $B$ et $C$ trois points non alignés du plan, $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ des réels. On suppose que les barycentres suivants existent : $G = bary((A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma))$ ; $A' = bary((A,-\alpha),(B,\beta),(C,\gamma))$ ; $B' = bary((A,\alpha),(B,-\beta),(C,\gamma))$ et $C' = bary((A,\alpha),(B,\beta),(C,-\gamma))$.

a) Indiquez à quelle(s) condition(s) sur $(\alpha,\beta,\gamma)$ correspond l'hypothèse de l'existence des quatre barycentres définis ci-dessus.

b) Montrez que $(AA')$, $(BB')$ et $(CC')$ sont concourantes en $G$.

c) Montrez que $(B'C')$ passe par $A$.

d) Déduisez de la question précédente que $(A'C')$ passe par $B$, et que $(A'B')$ passe par $C$.

**EXERCICE 12.** Existe-t-il quatre vecteurs de l'espace deux à deux orthogonaux ?

**EXERCICE 13.** Donnez un repère orthonormé du plan d'équation $2x + y + z = 1$.

**EXERCICE 14.** Donnez un repère orthonormé de l'espace dont le premier vecteur est orthogonal à $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

## 3 Matrices et applications affines

**Exercice 15.** Soit $D$ la droite d'équation $\left\{ \begin{array}{c} x+y-z=2 \\ x-2y-3z=1 \end{array} \right.$. Indiquez la nature de la projection orthogonale de $D$ sur les plans $xOy$, $yOz$ puis $xOz$, en donnant une équation de ce domaine.

**Exercice 16.** Donnez la matrice $M$ de l'homothétie (du plan) de rapport $\lambda$ et de centre $O$, dans une base quelconque. Calculez $M^n$ pour $n \in \mathbf{N}$. Qu'en pensez-vous ?

**Exercice 17.** On considère dans cet exercice le plan centré en son origine $O$. Soit $s$ la symétrie par rapport à la droite $\Delta$ d'équation $y-2x-1=0$.

a) Donnez un vecteur $\vec{u}$ orthogonal à $\Delta$, et un vecteur $\vec{v}$ dirigeant $\Delta$. Ecrivez la matrice $M'$ de $s$ dans la base $B_s = (\vec{u}, \vec{v})$.

b) Calculez $M'^2$. Qu'en pensez-vous ? En déduire $M'^n$ pour $n \in \mathbf{N}$.

c) La base $B_s$ est-elle orthonormée ?

d) Donnez la matrice $M$ de $s$ dans la base canonique $B = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

e) Ecrivez la matrice de passage $P$ de $B$ à $B_s$. Vérifiez la relation $M = PM'P^{-1}$.

**Exercice 18.** Donnez la matrice $R_\theta$ de la rotation $r$ autour de l'origine et d'angle $\theta$. Calculez le produit $R_\theta R_{\theta'}$. Que remarquez-vous ?

**Exercice 19.** Pour $a$, $b$ et $c$ des réels tels que $a^2+b^2+c^2=1$, formez la matrice (relativement à la base canonique) de la réflexion par rapport au plan $P$ d'équation $ax+by+cz=0$.

## 4 Initiation au calcul matriciel

**Exercice 20.** Calculer les produits $AB$ et $BA$ avec

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

Que remarquez-vous ?

**Exercice 21.** Résoudre $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} .X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, pour $a$ et $b$ réels fixés. En déduire l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

**Exercice 22.** Soient les matrices $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. À quelle(s) condition(s) sur $(a, b, c, d)$ existe-t-il une matrice $X$ telle que $UX + XU = M$ ?

Même question avec $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

**Exercice 23.** Trouver les matrices $X$ de taille $2 \times 2$ telles que $X^2 + X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.