Université Paris 7 | **Premier semestre 2008-2009**
L1 MASS - Groupe 1M4 | **MA1 - Algèbre et Analyse élémentaires**

TD 7 : Matrices. Orthogonalité et distances

---

1 Révisions de géométrie

Exercice 1.

a) Distance de l'origine O au plan P d'équation $x+y+z=1$. Projeté orthogonal de O sur P. Symétrique orthogonal de O par rapport à P.

b) Mêmes questions en remplaçant O par le point $M=(x,y,z)$. En déduire l'expression matricielle

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + B$$

de la projection orthogonale sur P, puis celle de la symétrie orthogonale par rapport à P.

Exercice 2.

a) Donner les équations des plans dont une représentation paramétrique est :

$$P: \begin{cases} x = 1+3s-t \\ y = 2-s-t \\ z = -2+s-t \end{cases} (s,t\in\mathbb{R});\quad Q: \begin{cases} x = 1+s-t \\ y = 3-s-t \\ z = 1+2s-t \end{cases} (s,t\in\mathbb{R});\quad R: \begin{cases} x = as+bt \\ y = bs+ct \\ z = cs+at \end{cases} \begin{pmatrix} s,t\in\mathbb{R} \\ a\neq b\neq c\neq a \end{pmatrix}.$$

(Dans chaque cas, comment sait-on a priori qu'il s'agit d'un plan ?)

b) Donner un repère du plan P. Donner une repère orthonormé du plan P.

Exercice 3. (Dans le plan.) Donner l'équation cartésienne de la droite d'équations paramétriques $x=2t-1$, $y=-3t+2$ $(t\in\mathbb{R})$.

Exercice 4. Trouver les plans passant par la droite D d'équations

$$x+y+z=1,\quad x-y-2z=0,\quad \text{et}$$

a) parallèle à l'axe Ox ;

b) parallèle à l'axe Oy ;

c) parallèle à l'axe Oz ;

d) parallèle à la droite Δ d'équations $y+z=1$, $x-y=-1$

Existe-t-il un plan passant par D et parallèle au plan xOy ? un plan passant par D et perpendiculaire à l'axe Ox ?

Exercice 5. Equation du plan passant par $(0,0,0)$, $(1,1,1)$, $(2,-5,4)$.

Exercice 6. Equation du plan d'équations paramétriques $x = 1+s+t, y = -1-s-t, z = -1+s-t$.

Exercice 7. Deux plans ont pour équations $x+y+z=0$, $x+y+z=1$. Que peut-on en dire ?

Exercice 8. Montrer que les droites d'équations paramétriques $M = A + t\overrightarrow{u}$ et $N = B + t\overrightarrow{v}$ sont concourantes (ou parallèles) si et seulement si les trois vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont liés.

Exercice 9. (Dans le plan.) Trouver une CNS pour que les points (x,y) et (x',y') se correspondent dans une symétrie orthogonale par rapport à la droite D d'équation $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$.

En déduire l'expression matricielle $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B$ de la symétrie orthogonale par rapport à D.

Application. On prend pour D la droite d'angle polaire θ, c'est-à -dire la droite telle que angle$(Ox, D) = \theta$. Déterminer les matrices A et B.

Exercice 10. A quelle condition sur m le plan P_m d'équation $mx + y - (m+1)z = m$ et le plan Q_m d'équation $x + my - z = m^2$ sont-ils *a)* parallèles ? *b)* confondus ? *c)* perpendiculaires ?

Exercice 11. Trouver le symétrique orthogonal de l'origine par rapport au plan d'équation $ax + by + cz = d$.

2 Matrices et applications linéaires

Exercice 12. Déterminer l'application $g \circ f$ lorsque f est l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$x' = 2x - 4y$$
$$y' = x + 2y$$

et g est l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$x' = x - 3y$$
$$y' = x + 3y$$

.

Exercice 13. Montrer que l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$x' = 2x - 4y$$
$$y' = x + 2y$$

est bijective. Quelle est l'application inverse ?

Exercice 14. Montrer que l'application f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\begin{aligned} x' &= x + 2y + 3z \\ y' &= y + 2z \\ z' &= z \end{aligned}$$

est bijective. Quelle est l'application inverse ?

Exercice 15. Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que cette application est bijective, et déterminer l'application inverse. Interprétation géométrique.

Exercice 16. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ de matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $f^4 = f \circ f \circ f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$.

Exercice 17. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\overrightarrow{E}$ et f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\overrightarrow{E}$ qui à un couple de réels (s,t) associe le vecteur $s\overrightarrow{u} + t\overrightarrow{v}$. Montrer que cette application est injective si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont non colinéaires.

Exercice 18. Montrer que si une transformation linéaire de $\mathbb{R}^2$ est surjective, elle est aussi injective (et donc bijective).

Exercice 19.

Pour quelle valeur du paramètre m, l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ de matrice

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

est-elle bijective ? Lorsque f est bijective, déterminer l'application inverse. Lorsque f n'est pas bijective, est-elle injective ? surjective ?

Exercice 20. On se place en dimension 2. Soit p une application linéaire de $\overrightarrow{E}$ dans $\overrightarrow{E}$ telle que $p \circ p = p$, $p \neq \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}}$, $p \neq 0$. Montrer qu'il existe un vecteur $\overrightarrow{u}$ tel que $p(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$ et un vecteur $\overrightarrow{v}$ tel que $p(\overrightarrow{v}) = 0$. Montrer que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ forment une base de $\overrightarrow{E}$. Quelle est la matrice de p dans cette base. Interprétation géométrique ?

Exercice 21. On pose
$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer les produits AB et BA. A quelle condition sont-ils égaux ?

b) Calculer A^{-1}, B^{-1}. Vérifier que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ et que $(AB)^{-1} \neq A^{-1}B^{-1}$ en général.

Exercice 22. Montrer que la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
est inversible, puis calculer son inverse.

3 Orthogonalité et calculs de distance

Exercice 23. On se place dans $\mathbb{R}^2$ avec le produit scalaire usuel. Vérifier que $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$. Montrer qu'il en est de même de $\overrightarrow{u}$ et $-\overrightarrow{v}$. Faire une figure.

Exercice 24. Soit Π le plan défini par la paramétrisation
$$\begin{cases} x = 1 - \sqrt{2}\mu \\ y = 1 + 4\lambda + 3\mu \\ z = 1 - 3\lambda + \sqrt{5}\mu \end{cases}$$
Donner un repère orthonormé de Π.

Exercice 25. On considère le point A de coordonnées $(1, 2, 3)$ et le plan Π d'équation $-2x + y - z = 3$.

a) Déterminer le projeté orthogonal de A sur Π.

b) Donner la distance de A au plan Π.

Exercice 26. On considère la droite D définie par le point D_0 de coordonnées $(1, 2, 2)$ et le vecteur directeur $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer le projeté orthogonal du point A de coordonnées $(1, 2, 3)$ sur D.

b) Donner la distance de A à la droite D.

Exercice 27. Soient les plans Π et Π' d'équations respectives $x+y+z+1 = 0$ et $x+y+z-5 = 0$.

a) Montrer que Π et Π' sont parallèles.

b) Déterminer la distance entre ces deux plans.

Exercice 28. Soit Π le plan d'équation $x - 2y + 4z + 1 = 0$ et D la droite d'équation $\begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ 2x + y + 3z + 5 = 0 \end{cases}$

a) Montrer qu'ils sont parallèles.

b) Calculer la distance de D à H.

Exercice 29. Calculer la distance entre les droites D_1 et D_2 définies respectivement par le point de coordonnées $(1, 3, 1)$ et le vecteur directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, le point de coordonnées $(2, 1, 2)$ et le vecteur directeur $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 30. Déterminer, dans le plan euclidien, l'équation de la droite D passant par le point M_0 de coordonnées $(1, 2)$ et située à la distance l du point M_1 de coordonnées $(3, 4)$.

Exercice 31. Donner l'équation générale des plans situés à la distance $d = 4$ du point M_1 de coordonnées $(1, 2, 3)$.

Exercice 32. Donner l'équation générale des plans situés à la distance $d = 4$ du point M_1 de coordonnées $(1, 1, 1)$ et passant par les points de coordonnées $(-7, -1, 0)$ et $(0, -1, -7/2)$.

4 Exercices supplémentaires de géométrie

Exercice 33. Soient D et Δ deux droites du plan. On note $p : \mathbb{R}^2 \to D$ la projection orthogonale sur D et $q : \mathbb{R}^2 \to \Delta$ la projection orthogonale sur Δ. Montrer que si D et Δ sont orthogonales, alors l'application $q \circ p$ envoie tout le plan sur un point. Démontrer la réciproque. Faire une figure.

Exercice 34. Soient A, B, C trois points du plan, et α, β, γ trois réels tels que $\alpha + \beta + \gamma = 1$. En quel point est atteint le minimum de $f(M) = \alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2$. *Remarque.* L'énoncé sous-entend que ce point existe. Ce n'est pas une raison pour ne pas le démontrer.

Exercice 35. On considère trois points A, B, C non alignés dans le plan. Montrer que tout point M s'ecrit $aA + bB + cC$ avec $a + b + c = 1$ d'une façon unique. On dit que a, b, c sont les *coordonnées barycentriques* du point M dans le *repère affine* ABC. Que représente dans ces coordonnées l'équation $a = 0$? Quel rapport y a-t-il entre les coordonnées barycentriques et les coordonnées ordinaires dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$? Régionner le plan suivant les signes de a, b et c.

Exercice 36. (Dans le plan) Soit D une droite et A un point extérieur à D. Quel est le lieu des points M tels que $MA^2 = \mathrm{dist}(M, D)^2$? (Trouver l'équation de ce lieu dans un repère bien choisi, représenter la courbe.)