Correction d'un exercice

Dans l'exercice 2 de la feuille d'exercices 10 de 1M3, que l'on n'a pas fini en TD le vendredi 19 décembre, on considérait le système d'équations linéaires suivant :

$$(S) \qquad \begin{cases} x+y+z+u+v=0 \\ x+y-z-u+v=1 \\ x-y+z-u-v=2 \end{cases}$$

C'est un système de 3 équations à 5 inconnues, donc nécessairement le rang est inférieur ou égal à 3, et il y a au moins deux inconnues secondaires. Le rang est exactement 3 si les 3 équations sont indépendantes, ce que l'on va vérifier en obtenant un système échelonné équivalent à (S) par la méthode du pivot. On fait $L_2 \leftarrow L_1 - L_2$, et $L_3 \leftarrow L_1 - L_3$ pour éliminer les x sur les lignes 2 et 3, on obtient :

$$(S') \qquad \begin{cases} x + y + z + u + v = 0 \\ \qquad 2z + 2u = -1 \\ 2y + 2u + 2v = -2 \end{cases}$$

puis pour simplifier $L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_3$, et $L_3 \leftarrow L_2$:

$$(S'') \qquad \begin{cases} x + y + z + u + v = 0 \\ y + u + v = -1 \\ 2z + 2u = -1 \end{cases}$$

ce qui rend le système échelonné. Sur cette forme, il est clair que les trois équations sont indépendantes. Donc le rang du système (S''), comme celui de (S), vaut exactement 3. On peut choisir x, y, z comme inconnues principales, et u, v comme inconnues secondaires. (il n'y a pas d'équation de compatibilité, le système est toujours compatible). On sait que la dimension de l'espace des solutions est 2 (= nombre d'inconnues secondaires = nombre total d'inconnues moins le rang).

On a choisi u et v comme inconnues secondaires, ils vont être les paramètres de l'espace des solutions. Posons pour plus de clarté $u = s$ et $v = t$. Alors on peut donner les solutions (x, y, z, u, v) du système en fonction de s et t. D'une part $u = s$ et $v = t$, d'autre part on peut déterminer x, y, z grâce au système (S'') :

$$\begin{cases} x + y + z = -s-t \\ y = -1-s-t \\ 2z = -1-2s \end{cases}$$

d'où : $z = -\frac{1}{2} - s$, $y = -1 - s - t$ et $x = \frac{3}{2} + s$. Finalement :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}+s \\ -1-s-t \\ -\frac{1}{2}-s \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc l'espace des solutions est bien un sous-espace affine de $\mathbb{R}^5$ de dimension 2. Un repère de cet espace est constitué de :
- origine : $(\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 0, 0)$;
- vecteurs de base : $(1, -1, -1, 1, 0)$, $(0, -1, 0, 0, 1)$.