

# GROUPES DE RÉFLEXIONS, GROUPES DE TRESSSES, STRUCTURES DE GARSIDE

VIVIEN RIPOLL

ENS - Magistère MMFAI

Présentation du domaine de recherche

12 octobre 2006

## INTRODUCTION

Considérons un groupe de réflexions fini  $W \subseteq GL(V)$ . La *théorie de Coxeter*, que l'on rappelle dans la première partie, fournit de puissants outils combinatoires pour étudier  $W$  et la géométrie de son action sur  $V$ . Elle sert également de point de départ aux travaux de Brieskorn-Saito et Deligne sur  $B(W)$  (le *groupe de tresses* associé à  $W$ ), ainsi que sur le monoïde d'Artin-Tits (voir partie 2).

Au début des années 2000 est apparue une autre approche, aussi puissante que la théorie de Coxeter — elle permet par exemple de retrouver les grands théorèmes de structure de  $B(W)$ . En remplaçant la partie génératrice  $S$  de la théorie de Coxeter par l'ensemble  $\mathcal{R}$  de *toutes* les réflexions de  $W$ , on a construit un nouveau monoïde, dont les propriétés vérifient les axiomes de *monoïde de Garside*, ce que nous expliquons dans la troisième partie. Nous insisterons en particulier sur la notion de *partitions non-croisées*, qui apparaît dans le type  $A$  et peut se généraliser.

Enfin, nous signalerons quelques questions ouvertes qui se posent actuellement dans ce domaine.

Dans toute cette présentation, pour plus de clarté, on donnera de façon assez allusive les propriétés générales, et on détaillera le cas fondamental d'un groupe de type  $A$ , *i.e.* un groupe de permutations.

*Je remercie mon directeur de M2 — et futur directeur de thèse — David Bessis, qui m'a fait connaître ce domaine et aidé à en comprendre les bases.*

## 1. THÉORIE CLASSIQUE DE COXETER

Dans cette partie, on rappelle brièvement les liens entre groupes de réflexions et systèmes de Coxeter. Pour plus de détails, de nombreuses références existent, citons en particulier Bourbaki [Bo], Humphreys [H], ou le plus récent Kane [K].

**1.1. Groupes de réflexions.** Soit  $V$  un espace euclidien, et  $W \subseteq O(V)$  un groupe de réflexions réel fini, *i.e.* un sous-groupe fini de  $O(V)$  engendré par des réflexions. On note  $\mathcal{R}$  l'ensemble de toutes les réflexions de  $W$ . Pour  $r \in \mathcal{R}$ , on pose  $H_r := \text{Ker}(r-1)$ . On note  $\mathcal{A}$  l'arrangement d'hyperplans ainsi formé, *i.e.*  $\mathcal{A} := \{H_r, r \in \mathcal{R}\}$ , et  $V^{\text{reg}} := V - \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H$ . Les composantes connexes de  $V^{\text{reg}}$  sont appelées *chambres*, et on note  $\mathcal{C}$  l'ensemble des chambres. On choisit une chambre  $C$  de  $\mathcal{C}$ , et on pose  $S := \{s \in \mathcal{R}, H_s \text{ mur de } C\}$ . Les résultats suivants sont classiques ([Bo, Ch. V.3]) :

### Théorème 1.1

- (i) l'ensemble  $S$  engendre le groupe  $W$  ;
- (ii) l'action naturelle de  $W$  sur  $\mathcal{C}$  est simplement transitive, *i.e.*

$$\forall C' \in \mathcal{C}, \exists ! w \in W, C' = wC ;$$
- (iii) le convexe  $\bar{C}$  est un domaine fondamental (strict) pour l'action de  $W$  sur  $V$ , *i.e.*

$$\forall v \in V, |Wv \cap \bar{C}| = 1.$$

La classification des groupes de réflexions finis se fait à l'aide de la combinatoire des *systèmes de Coxeter*.

**1.2. Systèmes de Coxeter.** On considère ici un groupe abstrait  $W$ , et une partie  $S$  de  $W$  dont tous les éléments sont d'ordre 2. Pour  $s, t \in S$ , on note  $m_{s,t}$  l'ordre du produit  $st$  dans  $W$  (éventuellement  $+\infty$ ).

### Définition 1.2

On dit que  $(W, S)$  est un système de Coxeter si on a la présentation suivante :

$$W \simeq \langle S \mid \forall s \in S, s^2 = 1; \forall s, t \in S, \underbrace{sts \dots}_{m_{s,t}} = \underbrace{tst \dots}_{m_{s,t}} \rangle_{\text{Gr}}.$$

On établit une caractérisation des systèmes de Coxeter (la condition d'échange, cf. [Bo, Ch. IV.1]), qui permet de démontrer le théorème suivant :

### Théorème 1.3

Soit  $W$  un groupe de réflexions réel fini, et  $S$  l'ensemble des réflexions par rapport aux murs d'une chambre. Alors  $(W, S)$  est un système de Coxeter.

Ce théorème permet d'étudier les groupes de réflexions d'un point de vue combinatoire. Réciproquement, on peut essayer de construire un groupe de réflexions à partir d'un système de Coxeter. Soit  $(W, S)$  un système de Coxeter. On cherche à représenter  $W$  dans l'espace vectoriel  $V$  de base les symboles  $(e_s)_{s \in S}$ . On veut envoyer un élément  $s$  de  $S$  sur une réflexion «orthogonale» de  $GL(V)$ , mais pour quel produit scalaire ? On définit une forme bilinéaire symétrique sur mesure, en posant :

$$\forall s, t \in S, (e_s \cdot e_t) := -\cos\left(\frac{\pi}{m_{s,t}}\right).$$

On montre que cette représentation  $W \rightarrow \mathrm{GL}(V)$  est fidèle (Tits), et que  $(W, S)$  est fini si et seulement si la forme bilinéaire est définie positive ([Bo, Ch. V.4]). On en déduit que cette construction induit des correspondances bijectives entre :

- classes d'équivalence de systèmes de Coxeter finis — où  $(W, S) \sim (W', S')$  s'il existe une bijection entre  $S$  et  $S'$  qui induit un isomorphisme entre  $W$  et  $W'$  ;
- classes de matrices symétriques à coefficients entiers tels que la forme définie ci-dessus soit définie positive ;
- classes d'isomorphisme de groupes de réflexions réels finis.

Le point de vue de la forme bilinéaire permet par tâtonnements de classifier les groupes de réflexions finis. On se ramène aux groupes irréductibles (les autres s'obtiennent par produits directs), et on utilise une description pratique via les *graphes de Coxeter* : le graphe de  $(W, S)$  a pour sommets les éléments de  $S$ , et pour  $s, t \in S$ , une arête étiquetée par  $m_{s,t}$  les relie si  $m_{s,t} \geq 3$ . La classification des groupes de réflexions irréductibles aboutit à 4 familles infinies, notées  $A_n$  (qui correspond au groupe symétrique  $\mathfrak{S}_{n+1}$ ),  $B_n$ ,  $D_n$ , et  $I_2(m)$ , et des types exceptionnels :  $E_6, E_7, E_8, F_4, H_3, H_4$  (voir [H, Ch. 2.4]).

## 2. GROUPE DE TRESSSES, MONOÏDE DE GARSIDE

On se donne maintenant un groupe de réflexions réel fini  $W$ . Le groupe de tresses de  $W$  permet d'étudier la topologie de  $V^{\mathrm{reg}}$  «complexifié».

**2.1. Groupe et monoïde de tresses.** La structure topologique de  $V^{\mathrm{reg}}$  est triviale : c'est une union disjointe finie d'espaces contractiles. Si l'on complexifie l'espace vectoriel  $V$ , on peut voir  $W$  comme un groupe de réflexions complexes agissant sur  $V_{\mathbb{C}} := V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ . On note de même  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$  l'arrangement d'hyperplans complexifié, et  $V_{\mathbb{C}}^{\mathrm{reg}} := V_{\mathbb{C}} - \bigcup_{H \in \mathcal{A}_{\mathbb{C}}} H$ . Le groupe  $W$  agissant naturellement à gauche sur  $V_{\mathbb{C}}^{\mathrm{reg}}$ , on construit l'espace-quotient  $W \backslash V_{\mathbb{C}}^{\mathrm{reg}}$ . Cet espace est bien plus intéressant topologiquement : dans un espace complexe, on peut «tourner» autour d'un hyperplan (complexe), on obtient ainsi un espace connexe, et généralement non simplement connexe. Le groupe fondamental  $\pi_1(W \backslash V_{\mathbb{C}}^{\mathrm{reg}})$ , noté  $B(W)$ , est appelé *groupe de tresses* de  $W$ . On montre que la projection  $V_{\mathbb{C}}^{\mathrm{reg}} \xrightarrow{p} W \backslash V_{\mathbb{C}}^{\mathrm{reg}}$  est un revêtement galoisien. Par conséquent, si l'on note  $P(W) := \pi_1(V_{\mathbb{C}}^{\mathrm{reg}})$  (appelé groupe des tresses *pures*), on a une suite exacte courte :

$$1 \rightarrow P(W) \rightarrow B(W) \xrightarrow{\varphi} W \rightarrow 1.$$

La construction du morphisme  $\varphi$  est simple. Fixons un point-base  $v_0 \in V_{\mathbb{C}}^{\mathrm{reg}}$ , et son image  $p(v_0)$  dans  $W \backslash V_{\mathbb{C}}^{\mathrm{reg}}$ . Un lacet  $\gamma$  de point-base  $p(v_0)$  se relève en un chemin dans  $V_{\mathbb{C}}^{\mathrm{reg}}$  de  $v_0$  vers un certain translaté  $w.v_0$  de  $v_0$ . Cet élément  $w$  est l'image de la classe  $\bar{\gamma} \in B(W)$  par  $\varphi$ .

Considérons l'exemple fondamental du type  $A$ . Le groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$  agissant classiquement sur  $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^n$ , les hyperplans de  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$  sont d'équation  $x_i = x_j$ , et on obtient  $V_{\mathbb{C}}^{\mathrm{reg}} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n, \forall i \neq j, x_i \neq x_j\}$ . L'espace des orbites est donc  $\mathfrak{S}_n \backslash V_{\mathbb{C}}^{\mathrm{reg}} = \{P \subseteq \mathbb{C}, |P| = n\}$ , noté ici  $X_n$ . Ainsi un élément du groupe fondamental

$\pi_1(X_n)$  se voit comme une «tresse», et un élément de  $\pi_1(V_{\mathbb{C}}^{\text{reg}})$  comme un tresse «pure», qui se projette (par  $\varphi$ ) en l'identité de  $\mathfrak{S}_n$  (cf. figure 1).

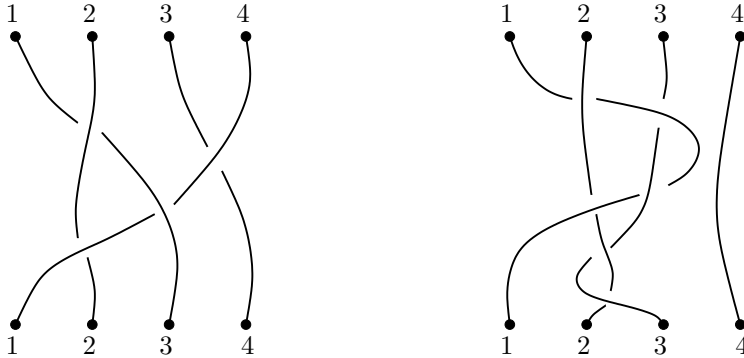
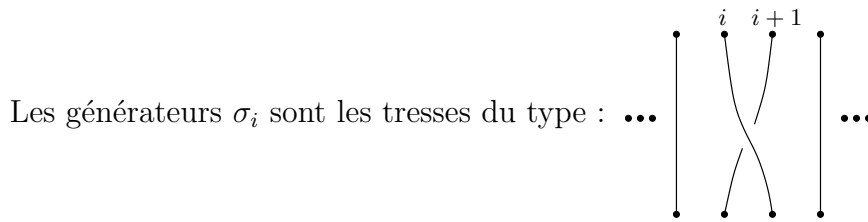


FIG. 1. Type  $A$  : représentation d'une tresse non pure et d'une tresse pure.

On montre que ce groupe a une présentation par générateurs et relations :

$$\pi_1(X_n) \simeq \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ si } |i - j| \geq 2, \text{ et } \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \rangle_{\text{Gr}}.$$



On retrouve donc la présentation de Coxeter de  $\mathfrak{S}_n$ , où l'on a retiré les relations quadratiques. Cette propriété est en fait valable pour tous les groupes de réflexions réels. Pour un système de Coxeter fini  $(W, S)$ , on définit ainsi le *groupe d'Artin* associé :

$$A(W, S) := \langle S \mid \forall s, t \in S, \underbrace{sts \dots}_{m_{s,t}} = \underbrace{tst \dots}_{m_{s,t}} \rangle_{\text{Gr}}.$$

Un théorème de Brieskorn de 1971 (dans [Bri]) affirme que pour tout groupe de réflexions réel fini  $W$ , le groupe de tresses  $B(W)$  est isomorphe au groupe d'Artin associé.

La compréhension de  $A(W, S)$  ainsi que de la topologie de  $V_{\mathbb{C}}^{\text{reg}}$  passe par l'étude du *monoïde d'Artin-Tits* :

$$A_+(W, S) := \langle S \mid \forall s, t \in S, \underbrace{sts \dots}_{m_{s,t}} = \underbrace{tst \dots}_{m_{s,t}} \rangle_{\text{Mon}}.$$

Les structures de  $A(W, S)$  et  $A_+(W, S)$  ont été examinées en détail, en particulier par Deligne et Brieskorn-Saito [D, BS] en 1972. Ils démontrent que  $A_+(W, S)$  se plonge dans  $A(W, S)$  (ce qui n'était pas du tout évident *a priori*), et parviennent à construire une forme normale dans  $A(W, S)$  qui permet d'y résoudre le problème des mots (problème déjà traité pour le type  $A$  par Garside en 1969 [G]).

**2.2. Monoïde de Garside.** En 1999, Dehornoy et Paris ont voulu formaliser ces propriétés, en introduisant dans [Deh, DP] la notion de *monoïde de Garside*, structure plus générale dans laquelle les stratégies de preuve et les résultats de Deligne et Brieskorn-Saito restent valables.

**Définition 2.1** ([Deh])

Un monoïde  $M$  est un monoïde de Garside si :

- le monoïde  $M$  est atomique (i.e.  $\forall m \in M, \exists N \in \mathbb{N}$ , tel que si  $m = m_1 \dots m_N$  alors l'un des  $m_i$  vaut 1);
- le monoïde  $M$  est simplifiable à gauche et à droite;
- les ensembles partiellement ordonnés  $(M, \preceq)$  et  $(M, \succcurlyeq)$  sont des treillis, où la relation d'ordre est :  $p \preceq q$  (resp.  $q \succcurlyeq p$ ) s'il existe  $r \in M$  tel que  $pr = q$  (resp.  $rp = q$ );
- il existe un élément  $\Delta \in M$ , appelé élément de Garside, tel que  $\{m \in M, m \preceq \Delta\}$  coïncide avec  $\{m \in M, \Delta \succcurlyeq m\}$ , soit fini, et engendre  $M$ .

Rappelons la définition de treillis :

**Définition 2.2**

Soit  $(E, \leq)$  un ensemble partiellement ordonné. On dit que  $E$  est un treillis si :

- (i)  $E$  est borné :  $\exists a, b \in E, \forall x \in E, a \leq x \leq b$ ;
- (ii) pour tout  $x, y \in E$ ,  $x$  et  $y$  admettent un infimum  $x \wedge y$ ;
- (iii) pour tout  $x, y \in E$ ,  $x$  et  $y$  admettent un supremum  $x \vee y$ .

Lorsque l'ensemble  $E$  est fini, il est facile de voir que deux quelconques de ces propriétés entraînent la troisième.

Revenons au cas d'un groupe de réflexions  $W$ , muni d'un ensemble de réflexions fondamentales  $S$ . Rappelons ici la définition classique de l'ordre sur  $W$  relatif à la partie génératrice  $S$ .

**Définition 2.3**

Soit  $w \in W$ . Une  $S$ -décomposition de  $w$  est une suite de réflexions  $s_1, \dots, s_p \in S$  telle que  $w = s_1 \dots s_p$ ; on parle de  $S$ -décomposition réduite si la longueur  $p$  est minimale. On appelle  $S$ -longueur de  $w$ , et on note  $\ell_S(w)$ , la longueur d'une  $S$ -décomposition réduite de  $w$ . On définit l'ordre partiel  $\preceq_S$  sur  $W$  par :

$$u \preceq_S v \Leftrightarrow \ell_S(u) + \ell_S(u^{-1}v) = \ell_S(v)$$

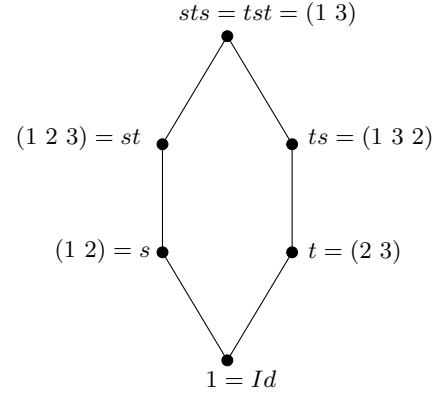
Concrètement,  $u \preceq_S v$  signifie que  $u$  s'écrit en un préfixe d'une décomposition réduite de  $v$ .

On peut voir  $A_+(W, S)$  comme un monoïde de Garside, l'axiome principal à vérifier étant la propriété de treillis : celle-ci revient en fait à montrer que l'ensemble ordonné  $(W, \preceq_S)$  forme lui-même un treillis.

Par exemple, considérons le cas élémentaire du groupe de type  $A_2$ ; on pose  $W = \mathfrak{S}_3$ . En notant  $s = (1\ 2)$  et  $t = (2\ 3)$ , on obtient la présentation :

$$\begin{aligned} W &= \langle s, t \mid s^2 = t^2 = 1, sts = tst \rangle_{\text{Gr}} \\ &= \{1, s, t, st, ts, sts\}. \end{aligned}$$

On voit sur la figure ci-contre que  $(W, \preccurlyeq_S)$  a bien une structure de treillis.



De façon plus générale, pour montrer que  $(W, \preccurlyeq_S)$  est un treillis, on utilise la géométrie de l'arrangement d'hyperplans, en voyant un élément de  $W$  comme un chemin entre deux chambres. Détaillons ici simplement une démonstration élémentaire de cette propriété pour le type  $A$ . Soit  $n \geq 2$ . On pose  $W = \mathfrak{S}_n$ ; les réflexions de  $W$  sont les transpositions de  $\mathfrak{S}_n$ , et un ensemble de réflexions fondamentales est  $S := \{(1\ 2), (2\ 3), \dots, (n-1\ n)\}$ . Soit  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ ; on définit l'ensemble des croisements de  $\sigma$  :

$$C(\sigma) := \{\{i, j\}, i < j \text{ et } \sigma(i) > \sigma(j)\}.$$

Ainsi, les éléments de  $S$  sont les seules permutations dont l'ensemble des croisements est de cardinal 1. On commence par une formule facile à établir :

#### Lemme 2.4

Soit  $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$ . Alors :

$$C(\sigma\tau) = C(\tau)\Delta\tau^{-1}(C(\sigma)),$$

où  $\Delta$  est l'opération de différence symétrique.

On en déduit la proposition suivante.

#### Proposition 2.5

Pour tout  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ ,  $|C(\sigma)| = \ell_S(\sigma)$ .

**Démonstration :** D'après le lemme, si  $\sigma = s_1 \dots s_p$ , alors  $|C(\sigma)| \leq |C(s_1)| + \dots + |C(s_p)| = p$ , donc  $|C(\sigma)| \leq \ell_S(\sigma)$ . Pour l'autre inégalité, on procède par récurrence sur  $N := |C(\sigma)|$ . L'initialisation est évidente, et si  $|C(\sigma)| = N \geq 1$ , alors il existe  $1 \leq i < n$ , tel que  $\sigma(i) > \sigma(i+1)$ . On pose  $\sigma' = \sigma (i\ i+1)$ ; le lemme implique que  $|C(\sigma)| = N - 1$ , donc par hypothèse de récurrence  $\ell(\sigma') = N - 1$ . On peut conclure puisque  $\ell(\sigma) \leq \ell(\sigma') + 1$ .  $\square$

#### Corollaire 2.6

L'application  $(\mathfrak{S}_n, \preccurlyeq_S) \rightarrow (\mathcal{P}(\{P \subseteq \{1, \dots, n\}, |P| = 2\}), \subseteq)$   
 $\sigma \mapsto C(\sigma^{-1})$   
est un morphisme injectif d'ensembles (partiellement) ordonnés.

**Démonstration :** L'injectivité est facile à vérifier. D'autre part,

$$\begin{aligned}
 \sigma \preceq_S \tau &\Leftrightarrow \ell_S(\sigma) + \ell_S(\sigma^{-1}\tau) = \ell_S(\tau) \\
 &\Leftrightarrow |C(\sigma)| + |C(\sigma^{-1}\tau)| = |C(\tau)| && \text{d'après 2.5} \\
 &\Leftrightarrow |C(\sigma^{-1})| + |C(\tau^{-1}\sigma)| = |C(\tau^{-1})| \\
 &\Leftrightarrow C(\sigma^{-1}) \sqcup \sigma(C(\tau^{-1}\sigma)) = C(\tau^{-1}) && \text{d'après 2.4} \\
 &\Leftrightarrow C(\sigma^{-1}) \subseteq C(\tau^{-1}).
 \end{aligned}$$

□

On peut conclure en montrant que l'image de ce morphisme forme un treillis (voir par exemple [E, pp. 183–186]).

### 3. LE MONOÏDE DUAL

Aujourd'hui un axe de recherche important consiste à tenter d'étendre la théorie de Coxeter aux groupes de réflexions complexes. Cependant, un obstacle capital est que pour beaucoup de ces groupes, il n'existe pas d'ensemble de réflexions minimal «naturel» qui jouerait le rôle de  $S$ . C'est pourquoi on est amené à travailler plutôt avec l'ensemble  $\mathcal{R}$  de toutes les réflexions de  $W$ . Dans l'article [B] (2003), Bessis commence ainsi à mettre en place une théorie «duale» pour les groupes de réflexions réels, où en particulier l'ordre  $\preceq_S$  est remplacé par l'ordre  $\preceq_{\mathcal{R}}$  relatif à la  $\mathcal{R}$ -longueur — défini comme dans 2.3 en remplaçant  $S$  par  $\mathcal{R}$ . Brady et Watt travaillent indépendamment dans [BW2] sur une théorie semblable. Par analogie avec le cas classique, Bessis construit un autre monoïde de Garside, qu'on appelle *monoïde dual*, qui n'est pas isomorphe à  $A_+(W, S)$  mais dont le groupe des fractions est isomorphe à  $A(W, S)$ . Dans le cas du type  $A$ , ce monoïde avait déjà été étudié par Birman-Ko-Lee [BKL] en 1998 (voir aussi [BDM]).

Pour montrer qu'effectivement ce monoïde est de Garside, le point-clé est toujours une propriété de treillis. Cependant,  $(W, \preceq_{\mathcal{R}})$  n'est généralement pas un treillis : par exemple, il n'existe pas toujours un unique élément de longueur maximale, comme c'est le cas dans la théorie classique, où  $W = [1, w_0]$ . On considère plutôt l'intervalle  $[1, c] := \{w \in W, w \preceq_{\mathcal{R}} c\}$ , où  $c$  est un élément de Coxeter de  $W$ . Ainsi, si l'on reprend l'exemple précédent de  $\mathfrak{S}_3$ , on a  $\mathcal{R} = \{s, t, u\}$  avec  $s = (1\ 2)$ ,  $t = (2\ 3)$  et  $u = (1\ 3)$ . Pour l'ordre  $\preceq_{\mathcal{R}}$ ,  $\mathfrak{S}_3$  n'est alors plus un treillis, il faut se restreindre à un intervalle  $[1, c]$  où  $c$  est un 3-cycle :

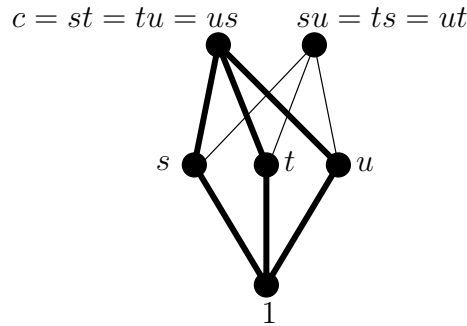


FIG. 2. L'exemple de  $\mathfrak{S}_3$  :  $([1, c], \preceq_{\mathcal{R}})$ , où  $c = (1\ 2\ 3)$ , est un treillis, mais pas  $(W, \preceq_{\mathcal{R}})$ .

Le monoïde dual peut être construit sur le modèle du monoïde d'Artin-Tits ; on s'inspire pour cela d'une présentation alternative de ce dernier, établie par Tits :

$$A_+(W, S) \simeq \langle W \mid w.w' = ww' \text{ (produit dans } W) \text{ quand } \ell_S(w) + \ell_S(w') = \ell_S(ww') \rangle_{\text{Mon}}.$$

On pose alors tout simplement, pour  $c$  un élément de Coxeter de  $W$  :

$$M(W, c) := \langle [1, c] \mid w.w' = ww' \text{ (produit dans } [1, c]) \text{ quand } \ell_{\mathcal{R}}(w) + \ell_{\mathcal{R}}(w') = \ell_{\mathcal{R}}(ww') \rangle_{\text{Mon}}.$$

On montre que  $M(W, c)$  a une présentation avec  $\mathcal{R}$  comme ensemble de générateurs (voir [B]) :

$$M(W, c) \simeq \langle \mathcal{R} \mid r'r = rr'' \text{ pour } r, r', r'' \text{ tels que } r'r = rr'' \text{ dans } W, \ell_{\mathcal{R}}(r'r) = 2 \text{ et } r'r \preceq_{\mathcal{R}} c \rangle_{\text{Mon}}.$$

On peut également signaler une construction géométrique du monoïde dual, similaire à la construction des tresses. L'idée est de considérer des chemins partant d'un point-base non réel. Nous allons expliquer ce qui se passe dans le cas du type  $A$ . On considère donc  $W = \mathfrak{S}_n$ , et l'on va représenter les tresses d'une façon différente de la façon classique. On note  $\mu_n$  l'ensemble des racines  $n$ -ièmes de l'unité. Un élément de Coxeter dans  $\mathfrak{S}_n$  est un  $n$ -cycle ; on pose ici  $c = (1\ 2\ \dots\ n)$ . On va établir un lien avec les partitions non-croisées du  $n$ -gone (voir [M] pour les partitions non-croisées en général, et [R] pour les liens avec les groupes de réflexions). Une partition de  $\mu_n$  est dite *non-croisée* si les enveloppes convexes de ses parts dans  $\mathbb{C}$  ne s'intersectent pas (voir un exemple dans la figure 3, où on a pris  $n = 9$ ).

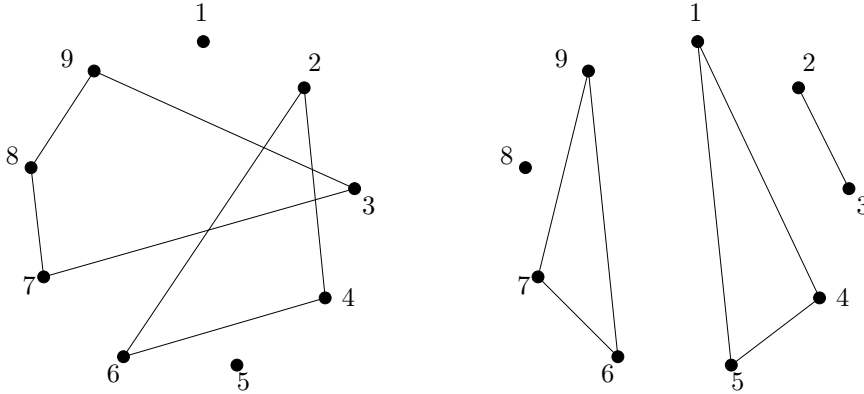


FIG. 3. La partition  $\{2, 4, 6\}, \{3, 7, 8, 9\}$  est croisée, tandis que  $\{1, 4, 5\}, \{2, 3\}, \{6, 7, 9\}$  est non-croisée.

À toute partition non-croisée, on associe un élément de  $\pi_1(X_n, \mu_n)$ , comme sur la figure 4.

Ces éléments sont par définition les générateurs du monoïde dual associé à  $\mathfrak{S}_n$ . Un tel diagramme peut également être vu comme une permutation, via le morphisme  $\pi_1(X_n, \mu_n) \rightarrow \mathfrak{S}_n$ . Les permutations obtenues ainsi sont en fait exactement les éléments de  $[1, c]$ . On va ici se contenter d'expliquer ce dernier point, et voir pourquoi cela permet de vérifier que l'intervalle  $[1, c]$  est un treillis.



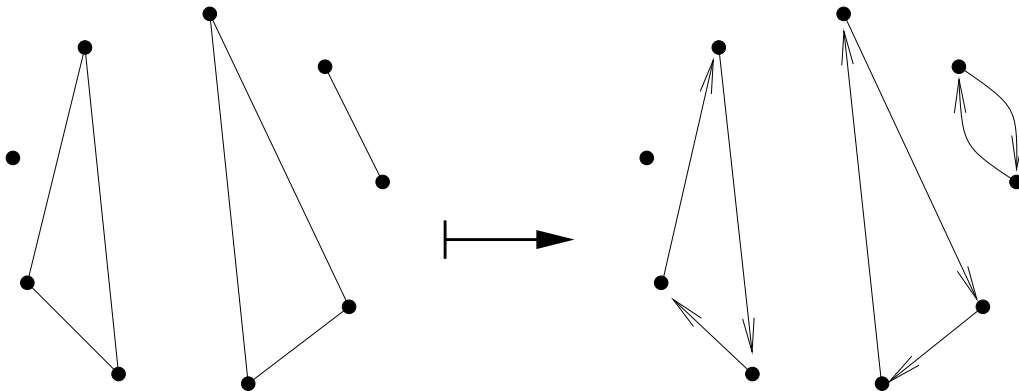


FIG. 4. Type  $A$  : construction des générateurs du monoïde dual.

Pour  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , on note  $P(\sigma)$  la partition de  $\{1, \dots, n\}$  donnée par sa décomposition en cycles, et  $p(\sigma)$  le cardinal de  $P(\sigma)$  (*i.e.* le nombre d'orbites de  $\sigma$ ). On voit facilement que  $\ell_{\mathcal{R}}(\sigma) = n - p(\sigma)$ , ce qui permet de mieux comprendre l'ordre  $\preceq_{\mathcal{R}}$ . Pour  $c$  un élément de Coxeter, on montre ainsi que  $\sigma \preceq_{\mathcal{R}} c$  si et seulement si :

- (i) pour chaque cycle  $\gamma$  de  $\sigma$ , l'ordre cyclique défini par  $\gamma$  sur  $\text{Supp}(\gamma)$  est compatible avec celui défini par  $c$  ;
- (ii) la partition  $P(\sigma)$  est non-croisée vis-à-vis de  $c$ .

Le point (i) est vérifié lorsque les cycles de  $\sigma$  « tournent » dans le même sens que  $c$ .

Il est ensuite aisé de vérifier que pour  $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_n$ ,  $\sigma \preceq_{\mathcal{R}} \sigma'$  si et seulement si  $P(\sigma)$  est une partition plus fine que  $P(\sigma')$  et que pour chaque cycle  $c_i$  de  $\sigma'$ ,  $\sigma|_{\text{Supp}(c_i)}$  vérifie les conditions (i) et (ii) relativement à  $c_i$ . Ainsi on établit un isomorphisme entre l'intervalle  $[1, c]$ , muni de  $\preceq_{\mathcal{R}}$ , et l'ensemble des partitions non-croisées du  $n$ -gone, muni de l'ordre de raffinement. Cela permet de conclure sur la propriété de treillis puisque celle-ci se vérifie de façon élémentaire pour les partitions non-croisées.

Cette démonstration de la propriété de treillis n'est malheureusement pas générale. En effet, elle utilise de façon fondamentale la géométrie convexe spécifique au type  $A$ . L'utilisation de partitions non-croisées s'adapte assez bien aux types  $B$  et  $D$ , et  $I_2(m)$  (voir [BC]). Notons au passage que le cas de  $I_2(m)$  est trivial, puisque l'élément de Coxeter est de longueur 2. Par contre, les types exceptionnels ne peuvent se faire de façon similaire : ils ont été traités par ordinateur à l'aide du logiciel GAP (cf. [B]).

Ce n'est que tout récemment (dans [BW3], 2005) que Brady et Watt ont publié une preuve globale, grâce à une approche totalement nouvelle. L'objet de mon mémoire de M2 était de comprendre, détailler et structurer cette preuve. Pour  $c$  un élément de Coxeter, on construit un complexe simplicial sphérique  $X(c)$ , de sommets les racines positives d'un système de racines du groupe. La structure de ce complexe est modélée sur celle de l'intervalle  $([1, c], \preceq_{\mathcal{R}})$  ; on associe ainsi à chaque élément  $u \preceq_{\mathcal{R}} c$  un sous-complexe  $X(u)$  de  $X(c)$ . Grâce à cette nouvelle structure, un infimum de  $u, v \in [1, c]$  peut être déterminé en travaillant sur le complexe  $X(u) \cap X(v)$ . Cette nouvelle avancée ouvre peut-être la voie

à une généralisation aux groupes de réflexions complexes bien engendrés (dans lesquels on peut encore définir un élément de Coxeter).

L'utilisation des partitions non-croisées reste néanmoins fructueuse : dans [BC], Bessis-Corran généralisent le treillis des partitions non-croisées pour un certain type de groupes de réflexions complexes.

#### 4. PROBLÈMES ACTUELS

**4.1. Numérologie et théorie des invariants.** Pour un groupe de réflexions réel fini  $W$ , et  $c$  un élément de Coxeter, on connaît une formule qui relie le cardinal de l'intervalle  $[1, c]$  aux *degrés* de  $W$ . Ces degrés sont issus de la *théorie des invariants*, dont on va donner ici quelques notions. Soit  $G$  un sous-groupe fini quelconque de  $O(V)$ . On note  $S := S(V)$  l'algèbre symétrique sur  $V$ ;  $S$  se voit comme une algèbre de polynômes : si  $(x_1, \dots, x_n)$  est une base de  $V$ ,  $S \simeq \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ . Le groupe  $G$  opère naturellement sur  $S$ , en préservant la graduation. On s'intéresse à l'ensemble des invariants  $S^G$ . On montre que  $S^G$  est elle-même une algèbre de polynômes si et seulement si  $G$  est engendré par les réflexions qu'il contient, *i.e.* quand  $G$  est un groupe de réflexions  $W$ . Dans ce cas  $S^W = \mathbb{R}[v_1, \dots, v_n]$ , où les degrés  $d_1 \leq \dots \leq d_n$  de  $v_1, \dots, v_n$  (dans  $S$ ) ne dépendent pas du choix des générateurs. On les appelle degrés de  $W$ . On montre que l'entier  $d_n$  est égal à l'ordre d'un élément de Coxeter (noté  $h$ ). Le cas du type  $A$  est encore une fois très connu : les invariants de  $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$  par  $\mathfrak{S}_n$  sont les polynômes symétriques, et forment une algèbre de polynômes engendrée par les «fonctions symétriques élémentaires». On montre ainsi que les degrés de  $A_{n-1}$  sont  $2, 3, \dots, n$ . Avec un peu de combinatoire, on peut calculer le nombre de partitions non-croisées de  $\mu_n$ , ce qui permet d'obtenir pour le groupe  $A_{n-1}$  :

$$|[1, c]| = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n},$$

*i.e.* le nombre de Catalan  $C_n$ . On note qu'on a aussi  $C_n = \prod_{i=2}^n \frac{i+n}{i}$ . Cette formule se généralise via les degrés :

##### **Proposition 4.1**

Soit  $W$  un groupe de réflexions irréductible, de degrés  $d_1, \dots, d_n = h$ . Soit  $c$  un élément de Coxeter. Le cardinal de l'intervalle  $[1, c]$  est :

$$|[1, c]| = \prod_{i=1}^n \frac{d_i + h}{d_i}.$$

Cette remarquable coïncidence a simplement été observée au cas par cas. Une démonstration directe est encore à mettre en place, et cela nécessite de relier la structure combinatoire de l'intervalle à la théorie des invariants de  $W$ ... De plus, ce nombre de Catalan «généralisé» intervient également dans d'autres domaines comme la théorie des représentations, avec la notion d'algèbres à clusters (cf. [FZ]); des liens sont en train de se tisser, d'autres restent à faire.

**4.2. Généralisations.** On cherche actuellement à généraliser les propriétés des groupes de réflexions réels finis dans (au moins) deux directions.

En restant dans les réels, on tente d'adapter les résultats des groupes finis aux systèmes de Coxeter *infinis* (construction d'un monoïde dual pour le groupe libre dans [B2]). On étudie aussi des systèmes de Coxeter *affines* : ainsi Digne donne une présentation duale du groupe de tresses du type  $\tilde{A}$  dans [Di].

Une autre direction très active depuis quelques années est celle des groupes de réflexions *complexes*. Les groupes finis engendrés par des réflexions complexes sont classifiés depuis les années 50 (Shephard-Todd, [ST]). Cependant cette classification n'est pas satisfaisante, au sens où l'on n'a pas d'équivalent de la théorie de Coxeter qui permettrait de se ramener à un problème combinatoire, et d'obtenir de façon automatique des propriétés importantes ; ces questions font l'objet de nombreuses recherches. Le groupe de tresses d'un groupe de réflexions complexes a été étudié dans [BMR] ; on commence également à construire un monoïde dual pour les groupes complexes (voir notamment [BC]).

## RÉFÉRENCES

- [B] D. Bessis, *The dual braid monoid*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **36** (2003), 647–683.
- [B2] D. Bessis, *A dual braid monoid for the free group*, J. Algebra **302** (2006), 55–69.
- [BC] D. Bessis, R. Corran, *Non-crossing partitions of type  $(e, e, r)$* , Adv. Math. **202** (2006), 1–49.
- [BKL] J. Birman, K. H. Ko, S. J. Lee, *A new approach to the word and conjugacy problem in the braid groups*, Adv. Math. **139** (1998), no. 2, 322–353.
- [BDM] D. Bessis, F. Digne, J. Michel, *Springer theory in braid groups and the Birman-Ko-Lee monoid*, Pacific J. Math. **205** (2002), 287–310.
- [BMR] M. Broué, G. Malle, R. Rouquier, *Complex reflection groups, braid groups, Hecke algebras*, J. reine angew. Math. **500** (1998), 127–190.
- [Bo] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie* Ch. 4–6, Hermann, Paris 1968.
- [Br] T. Brady, *A partial order on the symmetric group and new  $K(\pi, 1)$ 's for the braid groups*, Adv. Math. **161** (2001), no. 1, 20–40.
- [Bri] E. Brieskorn, *Die Fundamentalgruppe des Raumes der regulären Orbits einer endlichen komplexen Spiegelungsgruppe*, Invent. Math. **12** (1971), 57–61.
- [BS] E. Brieskorn, K. Saito, *Artin-Gruppen und Coxeter-Gruppen*, Invent. Math. **17** (1972) 245–271.
- [BW1] T. Brady, C. Watt, *A partial order on the orthogonal group*, Comm. Algebra **30** (2002), no. 8, 3749–3754.
- [BW2] T. Brady, C. Watt,  *$K(\pi, 1)$ 's for Artin groups of finite type*, Proceedings of the Conference on Geometric and Combinatorial Group Theory, Part I (Haifa, 2000), Geom. Dedicata **94** (2002), 225–250.
- [BW3] T. Brady, C. Watt, *Lattices in finite real reflection groups*, Preprint (2005), arXiv :math.CO/0501502.
- [D] P. Deligne, *Les immeubles des groupes de tresses généralisés*, Invent. Math. **17** (1972), 273–302.
- [Deh] P. Dehornoy, *Groupes de Garside*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **35** (2002), 267–306.
- [Di] F. Digne, *Présentations duales des groupes de tresses de type affine  $\tilde{A}$* , Comment. Math. Helv. **81** (2006), 23–47.

- [DP] P. Dehornoy, L. Paris, *Gaussian groups and Garside groups, two generalizations of Artin groups*, Proc. of London Math. Soc. **79** (1999), 569–604.
- [E] D. B. A. Epstein, J. W. Cannon, D. F. Holt, S. V. F. Levy, M. S. Paterson, W. P. Thurston, *Word processing in groups*, Jones and Bartlett Publishers, Boston MA, 1992.
- [FZ] S. Fomin, A. Zelevinsky, *Cluster algebras II : Finite type classification*, Invent. Math. **154** (2003), 63–121.
- [G] F. A. Garside, *The braid group and other groups*, Quart. J. Math. Oxford, 2 Ser. **20** (1969), 235–254.
- [H] J.E. Humphreys, *Reflection Groups and Coxeter Groups*, Cambridge Stud. Adv. Math. **29**, Cambridge Univ. Press, 1990.
- [K] R. Kane, *Reflection Groups and Invariant Theory*, CMS Books in Math. **5**, Springer-Verlag, New-York, 2001.
- [M] J. McCammond, *Noncrossing partitions in surprising locations*, American Math. Monthly, à paraître.
- [R] V. Reiner, *Non-crossing partitions for classical reflection groups*, Discrete Math. **177** (1997), 195–222.
- [S] R. Steinberg, *Finite reflection groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **91** (1959), 403–504.
- [ST] G. C. Shephard, J. A. Todd, *Finite unitary reflection groups*, Canad. J. Math. **6** (1954), 274–304.

*E-mail address:* vivien.ripoll@ens.fr